Управление в технических системах




NW
SW
N
O
OS
270

Е.А. Микрин, М.В. Михайлов

Навигация космических аппаратов по измерениям от глобальных спутниковых навигационных систем



УДК 629.7.05
ББК 39.62
М59

Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой системного анализа
и управления МАИ *В.В. Малышев;*
академик РАН *В.Г. Пешехонов*

Микрин, Е. А.

М59 Навигация космических аппаратов по измерениям от глобальных спутниковых навигационных систем : учебное пособие / Е. А. Микрин, М. В. Михайлов. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 345, [1] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4777-0

Рассмотрены вопросы проектирования и разработки сложных многофункциональных систем космической навигации на базе глобальных спутниковых навигационных систем для широкого класса низкоорбитальных, высокоорбитальных и высокоэллиптических космических аппаратов, а также круг вопросов, связанных с созданием бортовых средств навигации для автономного определения орбиты космического аппарата.

Для студентов и аспирантов авиа- и ракетостроительных специальностей высших технических учебных заведений, научных работников и инженеров, занимающихся разработкой, проектированием и испытаниями навигационных систем космических аппаратов.

УДК 629.7.05
ББК 39.62



ISBN 978-5-7038-4777-0

Предисловие

Первая российская аппаратура спутниковой навигации, побывавшая в космосе, — это экспериментальная аппаратура космического назначения АСН-2401-2П разработки Российского института радионавигации и времени (Санкт-Петербург). Эксперимент был осуществлен в августе–декабре 1998 г. на космическом аппарате «Союз ТМ28», который состыковался с орбитальной станцией «Мир». Дальнейшие разработки аппаратуры спутниковой навигации проводились для Международной космической станции, где в отличие от большинства других космических аппаратов имелся доступ к аппаратуре, возможность замены или возврата на Землю отказавших блоков. На МКС был проведен ряд экспериментов с аппаратурой спутниковой навигации, в том числе и международных с участием специалистов NASA и ESA, по исследованию влияния различных космических факторов на работу аппаратуры спутниковой навигации. Благодаря этим экспериментам в РКК «Энергия» накоплен огромный опыт работы по созданию космических навигационных систем на базе аппаратуры спутниковой навигации, а также по формированию инфраструктуры для их наземной отработки и испытаний.

В РКК «Энергия» была разработана и внедрена на космических кораблях «Союз МС» и «Прогресс МС», а также на МКС уникальная по своим характеристикам аппаратура АСН-К, обеспечивающая определение орбиты и ориентации космического аппарата, а также его навигацию при сближении с МКС.

В такой большой корпорации, как РКК «Энергия» работает более 1000 специалистов по навигации и управлению движением космического аппарата, но все они обучались классической системе навигации и управления движением. Специалистов по космической навигации на базе глобальной спутниковой навигационной системы всего несколько человек. Поэтому авторы сформулировали основную цель создания данного труда — подготовить курс лекций по космической навигации на базе глобальной спутниковой навигационной системы, построенный на опыте создания реальных систем аппаратуры навигации космического аппарата, позволяющий обеспечить подготовку специалистов данного направления для космической отрасли в ведущих вузах страны.

Курс лекций включает в себя рассмотрение широкого круга вопросов, связанных с созданием бортовых средств навигации для автономного определения орбиты космического аппарата, и направлен на развитие у студентов знаний, умений и навыков, позволяющих самостоятельно решать вопросы проектирования и разработки сложных многофункциональных систем космической навигации на базе глобальной спутниковой навигационной системы для широкого класса низкоорбитальных, высокоорбитальных и высокоэллиптических космических аппаратов.

Издание состоит из 11 глав.

В **главе 1** рассмотрены основные задачи, а также понятия и определения космической навигации, различные шкалы и форматы времени, используемые в навигации космических аппаратов по измерениям аппаратуры спутниковой навигации, а также основные системы координат. Показано невозмущенное движение космического аппарата, кеплеровы элементы орбит и другие представления вектора состояния космического аппарата.

В **главе 2** рассмотрено возмущенное движение низкоорбитальных космических аппаратов (на примере МКС) и высокоорбитальных космических аппаратов (на примере спутников GPS). Исследованы модели всех составляющих возмущающих ускорений, заметно влияющих на движение космического аппарата, включая возмущения, обусловленные фундаментальными параметрами вращения Земли. Предложены упрощенные алгоритмы формирования возмущений для бортового моделирования, многократно повышающие быстродействие при практическом сохранении его точности.

В **главе 3** изложены методы интегрирования уравнений движения космического аппарата и их точность. Предложен метод представления вектора состояния космического аппарата в приращениях, для которого быстродействие решения задачи прогноза повышается по сравнению с быстродействием классического метода интегрирования Рунге — Кутты четвертого порядка в ~5 раз при той же точности.

В **главах 4–6** рассмотрена идеология построения систем GPS и ГЛОНАСС, рекомендуемые официальными документами алгоритмы обработки информации, поступающей от навигационных спутников в аппаратуру потребителя, оценена точность и быстродействие этих алгоритмов, предложены методы повышения точности.

В **главе 7** приведены методы динамической фильтрации одномоментных измерений координат и скорости аппаратуры спутниковой навигации, обеспечивающей повышение точности формируемой оценки космического аппарата по сравнению с точностью одномоментных навигационных решений.

В **главе 8** проанализирована точность оценки орбиты МКС, формируемой по реальным измерениям АСН-М с использованием рассмотренных алгоритмов динамической фильтрации.

В **главе 9** рассмотрены методы динамической фильтрации «сырых» измерений АСН, обладающие существенными преимуществами по сравнению с динамической фильтрацией измерений координат как по точности формируемой оценки орбиты космического аппарата, так и устойчивости относительно различных возмущающих факторов.

Алгоритмы формирования оценки орбиты в приращениях по «сырым» измерениям АСН и измерениям бесплатформенной инерциальной навигационной системы, обладающие существенными преимуществами как по быстродействию, так и по точности формируемой оценки рассмотрены в **главе 10**.

Глава 11 посвящена особенностям навигации высокоорбитальных космических аппаратов по измерениям аппаратуры спутниковой навигации.

Предложены алгоритмы динамической фильтрации измерений, проведен анализ точности формируемой оценки орбиты, исследовано влияние на точность различных возмущающих факторов.

По завершении каждой главы (темы) приведен список контрольных вопросов, результаты ответов на которые учитываются при подведении итогов обучения за семестр во время сдачи зачета и экзамена.

Данный курс авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана, Московском физико-техническом институте (МФТИ) и в аспирантуре РКК «Энергия».

В заключение следует сказать, что настоящий курс лекций создавался в процессе разработки реальных систем навигации МКС и ее модулей, кораблей «Союз» и «Прогресс», «Пилотируемой транспортной системы нового поколения», исследовательских спутников и других объектов, разработанных в РКК «Энергия». И самое непосредственное участие в этой работе принимали коллеги и ученики авторов: С.Н. Рожков, А.С. Семенов, И.А. Краснопольский, О.Ю. Слепушкин, И.И. Ларьков и другие. Хочется высказать им огромную благодарность за активное участие в подготовке настоящего издания. Особую признательность авторы выражают Ю.В. Булгаковой за ее труд по оформлению и редактированию издания.

Список основных сокращений

АМ — антенный модуль
АП — аппаратура потребителя
АСН — аппаратура спутниковой навигации
БВС — бортовая вычислительная система
БИНС — бесплатформенная инерциальная навигационная система
БП — блок питания
БЦВМ — бортовая центральная вычислительная машина
ВЭО — высокоэллиптическая орбита
ГГСК — Гринвичская географическая система координат
ГЛОНАСС — Глобальная навигационная спутниковая система
ГСК — гринвичская (прямоугольная) система координат
ГСНС — Глобальная спутниковая навигационная система
ГСО — геостационарная орбита
ГЭВЧ — Государственный эталон времени и частоты
ДЗЗ — дистанционное зондирование Земли
ДПО — двигатели причаливания и ориентации
ДС — делитель сигнала
ДУС — датчик угловой скорости
ЕКА — Европейское космическое агентство
ИИО — инерциальные исполнительные органы
ИКД — Интерфейсный контрольный документ
ИП — интерфейсная плата
ИСК — инерциальная система координат
КА — космический аппарат
КД — корректирующий двигатель
КИК — командно-измерительный комплекс
КСВ — координаты, скорость, время
МБМВ — Международное бюро мер и весов
МКС — Международная космическая станция
МПВ — модуль приемовычислительный
МСВЗ — Международная служба вращения Земли
НВМ — навигационный вычислительный модуль
НИП — наземный измерительный пункт
НМ — навигационный модуль
НО — низкая орбита
НПМ — навигационный приемный модуль
НС — навигационный спутник
ОСК — орбитальная система координат
ПВЗ — параметры вращения Земли

ПМ — процессорный модуль
ПО — программное обеспечение
ПП — процессорная плата
ПСП — псевдослучайная последовательность
СБ — солнечная батарея
СВЧ — сверхвысокая частота
СИ — система измерений
СКД — сближающий корректирующий двигатель
ССК — связанная (с КА) система координат
УА — устройство антенное
УСМ — усилитель секундной метки
УУ — устройство усилительное
ЦВМ — центральная вычислительная машина
ЦУП — Центр управления полетами
ШВ — шкала времени

CP — careers phase (интегральная фаза)
GDOP — Geometric Dilution of Precision (геометрический фактор)
GPS — Global Positioning System
PR — pseudoranges (псевдодальность)
PVt — position, velocity, time
UT — универсальное время
UTC — универсальное международное время

Основные термины и определения

Акселерометр — устройство, формирующее выходные сигналы, пропорциональные проекциям линейных ускорений КА, обусловленных всеми негравитационными силами, на оси чувствительности акселерометра. Акселерометр может быть построен на разных физических принципах и отличаться диапазоном измеряемых линейных ускорений, точностью измерения этих ускорений.

Альманах — набор параметров, по которым могут быть рассчитаны координаты и скорости навигационных спутников на требуемый момент времени с низкой точностью. По альманаху в АСН определяется список видимых навигационных спутников.

Аппаратура потребителя — электронное устройство, принимающее и обрабатывающее сигналы от ГСНС, формирующее параметры движения потребителя.

ВЭО — высокоэллиптическая орбита КА с периодом 12 или 24 ч, наклонением ~63°, низким перигеем (1000…2000 км) и высоким апогеем.

ГЛОНАСС — российская Глобальная навигационная спутниковая система.

ГСНС — Глобальная спутниковая навигационная система, обеспечивающая возможность с помощью специальных электронных приемных устройств определять параметры движения потребителя.

ГСО — геостационарная орбита КА, близкая к круговой, совпадает с плоскостью экватора и имеет период 24 ч.

ИИО — инерциальные исполнительные органы, осуществляют управление ориентацией КА путем изменения собственного суммарного кинетического момента. ИИО подразделяют на *маховики* и *силовые гироскопы*. Маховики меняют собственный кинетический момент благодаря изменению скорости вращения тяжелого ротора без изменения направления осей вращения в ССК. Силовые гироскопы имеют постоянную высокую угловую скорость, а изменение кинетического момента осуществляется за счет поворота оси ротора. Маховики используются на КА с малыми моментами инерции, силовые гироскопы — на КА с большими моментами инерции, например, на орбитальной станции «Мир» и на МКС.

КСВ — информационное сообщение от АСН, содержащее векторы координат и скорости потребителя с их привязкой к точному времени.

«Курс» — радионавигационная система, обеспечивающая сближение кораблей «Союз» и «Прогресс» с орбитальными станциями (начиная с 1980-х годов). Система имеет активную часть, которая устанавливается на корабль, и пассивную, устанавливаемую на станции. Система является многоантенной и определяет дальность и скорость изменения дальности между

антеннами КА и станции для различных комбинаций антенн. По измеряемым параметрам определяется относительный вектор состояния и относительная ориентация, по которым система управления осуществляет сближение с дальности ~50 км до касания. Недостатком данной системы является ее большая масса, высокое энергопотребление и стоимость.

МКС — Международная космическая станция, первый модуль которой был запущен в 20 ноября 1998 г. — функционально-грузовой блок «Заря», был выведен ракетой «Протон-К». 26 июля 2000 года к функционально-грузовому блоку «Заря» был пристыкован служебный модуль «Звезда», а 2 ноября 2000 г. транспортный пилотируемый корабль «Союз ТМ-31» доставил на борт МКС экипаж первой основной экспедиции.

Сейчас МКС включает десятки модулей, изготовленных разными странами в рамках международного сотрудничества. Станция является пилотируемой, на ней непрерывно работают международные экипажи.

Обратный НС — навигационный спутник, обеспечивающий навигацию высокоорбитальных и среднеорбитальных КА. Такие КА, находясь выше орбит НС, попадают в поле зрения излучающих антенн только тех НС, которые находятся за Землей в окрестности горизонта. Например, АСН, установленная на ГСО, может работать только по обратным НС. Если расстояние между низкоорбитальными КА и прямыми НС составляет 21…25 тыс. км, то расстояние между геостационарным КА и обратным НС достигает 70…75 тыс. км. Увеличение расстояния приблизительно в 3 раза требует для работы с обратным НС применения специальных антенн.

Прецессия и нутация оси вращения Земли — угловое движение оси вращения Земли в пространстве вследствие возмущающих воздействий на «несферическую» Землю гравитационного поля Солнца, Луны и планет.

РБ — разгонный блок, обеспечивающий выведение КА с низкой орбиты, высотой ~200 км, на высокую, включая ГСО, ВЭО, межпланетные орбиты и т. п. РБ, как правило, имеет химический двигатель с высокой тягой.

«Сырые» измерения — первичные параметры, измеряемые в АСН: псевдодальности и интегральные фазы (или псевдоскорости). По «сырым» измерениям в АСН вычисляются остальные выходные параметры.

ЭРД — электрореактивный двигатель, в котором рабочее тело в виде плазмы разгоняется электромагнитным полем до высоких скоростей. ЭРД работают благодаря электроэнергии, вырабатываемой, как правило, солнечными батареями. Удельная тяга ЭРД в 5–10 раз выше удельной тяги химических двигателей, и, как следствие, масса потребного для выполнения задачи рабочего тела уменьшается в десятки раз. Но ЭРД имеет низкую тягу (граммы) и используется для довыведения КА на высокие орбиты в течение длительного времени (месяцы).

Эфемериды — набор параметров, по которым могут быть рассчитаны координаты и скорости НС на требуемый момент времени с высокой точностью. По эфемеридам в АСН вычисляют координаты и скорость потребителя.

***Broadcast*-эфемериды** — эфемериды, передаваемые от НС с определенной частотой.

***J*2000** — инерциальная система координат, совпадающая с ГСК на момент времени UTC 11:58:55,816 01.01.2000 г. Принята в качестве универсальной ИСК.

Leap_sec — рассогласование шкалы системного времени GPS со шкалой UTC на целое число секунд вследствие регулярной коррекции шкалы UTC на целую секунду.

GDOP (*Geometric Dilution of Precision*) — геометрический фактор, характеризующий взаимное геометрическое расположение НС и потребителя и определяющий точность формируемых КСВ по измерениям данного набора навигационных спутников.

GPS — Глобальная спутниковая навигационная система США.

Введение

В конце XX в. вокруг Земли было создано рукотворное глобальное навигационное поле, позволяющее в корне изменить отношение человека к времени и пространству. Сложнейшая когда-то задача определения времени и положения в пространстве сегодня решается с высокой точностью практически мгновенно. С 6 января 1980 года с 00 ч 00 мин 00 с идет отсчет времени GPS. Не исключено, что когда-то календарь GPS в силу своих естественных технических преимуществ станет единым мировым календарем человечества. Во всяком случае многие технические системы уже сегодня работают по времени GPS, в том числе и бортовая шкала времени МКС — системное время GPS, отсчитываемое в секундах от начала эры GPS (т. е. от 6 января 1980 года с 00 ч 00 мин 00 с).

Кроме GPS в мире созданы и создаются другие глобальные спутниковые навигационные системы (ГСНС), например, Российская ГСНС ГЛОНАСС, которая также, как и GPS, позволяет независимо решать весь комплекс задач пространственно-временного обеспечения потребителя. Кроме того, ГЛОНАСС удачно дополняет GPS. Совместное использование сигналов двух систем в одной аппаратуре потребителя во многих случаях обеспечивает несомненные преимущества по сравнению с возможностями только GPS.

Существует также европейская ГСНС Галилео (*Galileo*), находящаяся на этапе создания спутниковой группировки. По состоянию на ноябрь 2016 г. на орбите находится 16 спутников, 9 действующих и 7 тестируемых, а также в разработке находится китайская BeiDou. Каждая из этих систем с точки зрения потребителя может работать автономно. Однако создаваемая усилиями трех мировых космических держав (России, США, КНР) и Европейского союза, объединенная глобальная спутниковая навигационная система несомненно представляет собой рукотворное чудо, открывающее принципиально новые технические возможности для многих отраслей промышленности. Это, прежде всего, наземный, морской и воздушный транспорт, строительство, обеспечение индивидуальной безопасности и т. п.

Создание ГСНС позволяет реализовать принципиально новые методы решения всего комплекса задач пространственно-временного обеспечения управления космическими аппаратами (КА), включающего задачи навигации на участке выведения, орбитальном и участке спуска КА в атмосфере, ориентации и относительной навигации при сближении КА.

Использование ГСНС существенно, иногда на порядки, повышает точность и снижает время решения задачи, позволяет осуществлять решения автономно, без задействования наземного измерительного комплекса, а также существенно позволяет снизить массу, габариты, энергопотребление и стоимость аппаратного состава системы по сравнению с аппаратурой, решающей перечисленные задачи традиционными способами. Сегодня навигационные приемники

ГЛОНАСС и GPS используются практически во всех отраслях промышленности, их производство растет в геометрической прогрессии, тем не менее внедрение АСН в космическую технику идет крайне медленно. Несмотря на то что системы ГЛОНАСС и GPS развернуты еще в 1980-е годы и функционируют более 25 лет, далеко не все КА сегодня оснащены АСН. При этом ни на одном из существующих КА не реализуются в комплексе все перечисленные выше возможности АСН. Как правило, существующая аппаратура по своей структуре аналогична наземным навигационным приемникам и обеспечивает формирование только текущих векторов координат и скорости КА, точность которых недостаточна для решения многих навигационных задач в космосе.

Можно назвать несколько объективных причин замедленного распространения АСН в космической технике:

• консерватизм при разработке космической техники, обусловленный ее высокой стоимостью — как правило, первый серийный КА серии должен гарантированно исполнить свою миссию, поэтому разработчики КА предпочитают использовать отработанную, многократно испытанную аппаратуру, пусть она и уступает по своим характеристикам новой, более современной аппаратуре;

• тяжелые условия эксплуатации техники в космосе — перегрузки и вибрации при выведении и спуске КА, высокая радиация, большие перепады температур и давления, требования длительной безотказной эксплуатации, низкого энергопотребления, ограничений массы, объема и т. п. — часто оказывается, что фирмы, производящие лучшие образцы техники для наземной эксплуатации, не способны производить аналогичную технику для космоса;

• сложность воспроизведения при отработке аппаратуры на Земле условий ее космической эксплуатации — нередко наземное испытательное оборудование намного сложнее и дороже самой испытываемой аппаратуры. Иногда бывает, что те или иные условия реального космического полета вообще невозможно смоделировать на Земле;

• отсутствие или недостаточность обратной связи для диагностики отказов аппаратуры при ее лётной эксплуатации — после выведения КА на орбиту, как правило, отсутствует физический доступ к аппаратуре, а имеющаяся телеметрическая информация, поступающая с КА на Землю, часто бывает недостаточной для однозначного определения причин возникновения замечаний к работе аппаратуры или ее отказа;

• отсутствие высококвалифицированных специалистов по гироскопии, оптике, радиотехнике, вычислительной технике созданы целые отрасли, работают институты и производственные предприятия, но по такому глобальному и перспективному направлению космической навигации, как навигация КА по сигналам ГСНС, обучение в вузах страны практически не ведется, поэтому необходимо готовить специалистов и в области космической навигации по сигналам ГСНС. Только в этом случае применение АСН обеспечит качественный скачок в технике космического управления, как это происходило после создания бортовых ЦВМ, гиродинов, звездных датчиков.

Глава 1
Задачи космической навигации. Невозмущенное движение космического аппарата

1.1. Задачи космической навигации

Космическая навигация — широкое понятие, и разными авторами трактуется по-разному. Приведем краткое описание этого термина, представленное авторами в новой редакции Энциклопедии машиностроения:

«Космическая навигация (от лат. *navigatio* — мореплавание, *navigo* — плыву на корабле, *navis* — корабль) — область науки и техники, относящаяся к навигации космических аппаратов (КА). В узком значении космическая навигация решает задачу определения текущего положения и скорости центра масс КА, а также прогнозирования его движения. В широком значении космическая навигация включает также определение и прогнозирование параметров углового движения КА — ориентации осей КА в пространстве и его угловой скорости. Система космической навигации, выполняющая решение навигационной задачи, в общем случае включает бортовые, космические и наземные измерительные и вычислительные средства. В зависимости от типа применяемых навигационных измерительных приборов космическая навигация делится на радионавигацию, астронавигацию, инерциальную навигацию. В зависимости от участка или вида траектории в целом принято говорить об орбитальной и межпланетной навигации. Радионавигация выполняется по измерениям дальностей и скорости изменения дальностей между КА и измерительными антеннами, расположенными в разных точках Земли. По этим данным в Центре управления полетами КА осуществляется определение параметров движения КА.

С конца XX в. наиболее универсальными средствами навигации как орбитальных КА, так и наземных объектов стали Глобальные спутниковые навигационные системы (ГСНС): GPS (*Global Positioning System*) и ГЛОНАСС. В настоящее время идет разработка европейской ГСНС Galileo и китайской BeiDou. Космическая навигация по измерениям ГСНС относится к орбитальной радионавигации. Определение параметров движения КА здесь основано на измерениях дальности и скорости изменения дальности между КА и навигационными спутниками ГСНС, параметры движения которых известны с высокой точностью. По сигналам ГСНС могут определяться не только параметры движения центра масс КА, но и его ориентация. Астронавигация выполняется по измерениям углов между осями КА и звездами, планетами или ориентирами на поверхности планет с известными координатами. Инерциальная навигация основана на свойствах различных устройств выпол-

нять измерения ускорений и угловой скорости КА и на базе этих измерений определять параметры движения КА. Межпланетная космическая навигация может выполняться как по радиоизмерениям с Земли, так и по измерениям автономных систем навигации, устанавливаемых непосредственно на КА. Автономная космическая навигация, как правило, реализует методы астронавигации и инерциальной навигации. Расчет параметров движения КА в автономных системах навигации выполняется непосредственно в бортовой вычислительной машине. На пилотируемых КА могут быть установлены приборы, по которым некоторые навигационные параметры движения КА определяет космонавт. В этом случае говорят о ручных или полуавтоматических системах космической навигации».

Такое определение дает краткое, но достаточно понятное описание предмета, хотя, как показывает практика, термин «космическая навигация» допускает еще некоторое расширение, выделяющее в самостоятельный раздел задачу относительной навигации двух сближающихся КА и задачи навигации КА при выведении на орбиту и спуске в атмосфере. Разделение космической навигации имеет право на существование, так как движение КА в каждом случае описывается своими уравнениями и, соответственно, по-разному решается каждая из задач. При этом традиционное решение каждой задачи осуществляется с использованием принципиально разной аппаратуры, построенной на разных физических принципах. Решение этих задач по сигналам ГСНС хотя и имеют общую основу, также осуществляются разными методами с использованием принципиально отличных алгоритмов. Тем не менее во всех случаях космическая навигация — это наука о движении космических аппаратов, а движение — это изменение положения объекта во времени, поэтому в первую очередь определим основные понятия навигации — время и положение.

1.2. Время в космической навигации

Для измерения времени используют естественные или искусственные создаваемые периодические процессы с достаточно постоянным периодом повторения. Вращение небесного свода и периодическое движение по нему Солнца, являющееся отражением вращения Земли вокруг своей оси и обращения ее вокруг Солнца, позволяют установить соответственно две основные единицы измерения времени — сутки и год.

Часть суток, равная 1/86400, называется секундой. Такое определение секунды было действительно до 1965 г., когда на XII Генеральной конференции по мерам и весам, а также Международным комитетом по мерам и весам в системе СИ было принято определение секунды, основанное на атомном стандарте частоты: секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями $F = 4$, $M = 0$ и $F = 3$, $M = 0$ основного состояния $2S_{1/2}$ атома цезия-133, не возмущенного внешними полями, и частоте этого перехода приписывается

значение 9 192 631 770 Гц. Эта единица стала единицей Всемирного координированного времени UTC, рассчитанного на основе более чем 200 атомных часов, принадлежащих различным метрологическим и научным учреждениям нескольких десятков стран мира. Регулярные сличения между лабораториями времени проводятся под эгидой Международного бюро мер и весов (МБМВ, Франция) и Международной службы вращения Земли (МСВЗ, Франция).

Национальные шкалы времени (ШВ) формируются в соответствии с государственными эталонами времени и частоты (ГЭВЧ). Россия, как и другие страны, имеет свою национальную шкалу времени UTC (SU), являющуюся приближением к UTC. Шкала времени UTC (SU) формируется Государственной службой времени и частоты, поддерживаемой ВНИИФТРИ (г. Менделеев, Ленинградская область) с использованием национального эталона, в состав которого входят активные водородные стандарты частоты и времени. Алгоритм формирования UTC (SU) во многом схож с алгоритмом формирования UTC.

Шкала времени строится в два этапа — на первом формируется так называемая математическая ШВ, которая опирается на стандарты частоты, входящие в состав ГЭВЧ. Математическая ШВ — это не что иное, как «среднее» время группы атомных часов. На втором этапе с учетом оценок поведения математической ШВ относительно UTC на основании официальных данных МБМВ в ежемесячном циркуляре (*circular*_T) формируется система корректирующих поправок, обеспечивающая слежение UTC (SU) за UTC. Поскольку официальные данные МБМВ появляются с временной задержкой около 45 сут, шкала времени UTC (SU) автономна в этих временных пределах, т. е. формируется на основе прогноза полуторамесячной давности.

В США существует по меньшей мере три лаборатории, участвующие в формировании UTC: Военно-морская обсерватория (ШВ USNO), Национальный институт стандартов и технологий (ШВ NIST) и Военно-морская исследовательская лаборатория (ШВ NRL). Однако наибольшую значимость при построении UTC имеет ШВ USNO, которая в настоящее время наилучшим образом соответствует UTC по сравнению со шкалами всех мировых лабораторий. Эта шкала имеет физическую реализацию, а измерения геодезических навигационных приемников, сопряженных со шкалой UTC, доступны через Интернет с задержкой в 1 ч.

На рис. 1.1 приведены графики рассогласований шкал времени UTC (USNO) и UTC (SU) относительно UTC на интервале от 01.07.2011 по 01.05.2012. Приведенные графики позволяют понять точность формирования рассмотренных ШВ.

Переход к атомному стандарту частоты был обусловлен, прежде всего, высокой равномерностью шкалы, в то время как вращение Земли не является строго равномерным — под действием различных внешних и внутренних возмущений угловая скорость вращения Земли непрерывно меняется. Уже

в 1965 г. период обращения на 2 мс превышал принятые по новому стандарту сутки. Для более полного представления о скорости вращения Земли на рис. 1.2 приведен график отклонений периода вращения Земли от номинального в 1965–2010 гг., из которого видно, что на указанном интервале времени реальный период вращения Земли отличается от номинального от +4 до −1 мс. При этом график отклонения периода от номинального может быть представлен некоторой осредненной плохо прогнозируемой кривой, на которую наложен случайный шум амплитудой до 1 мс.

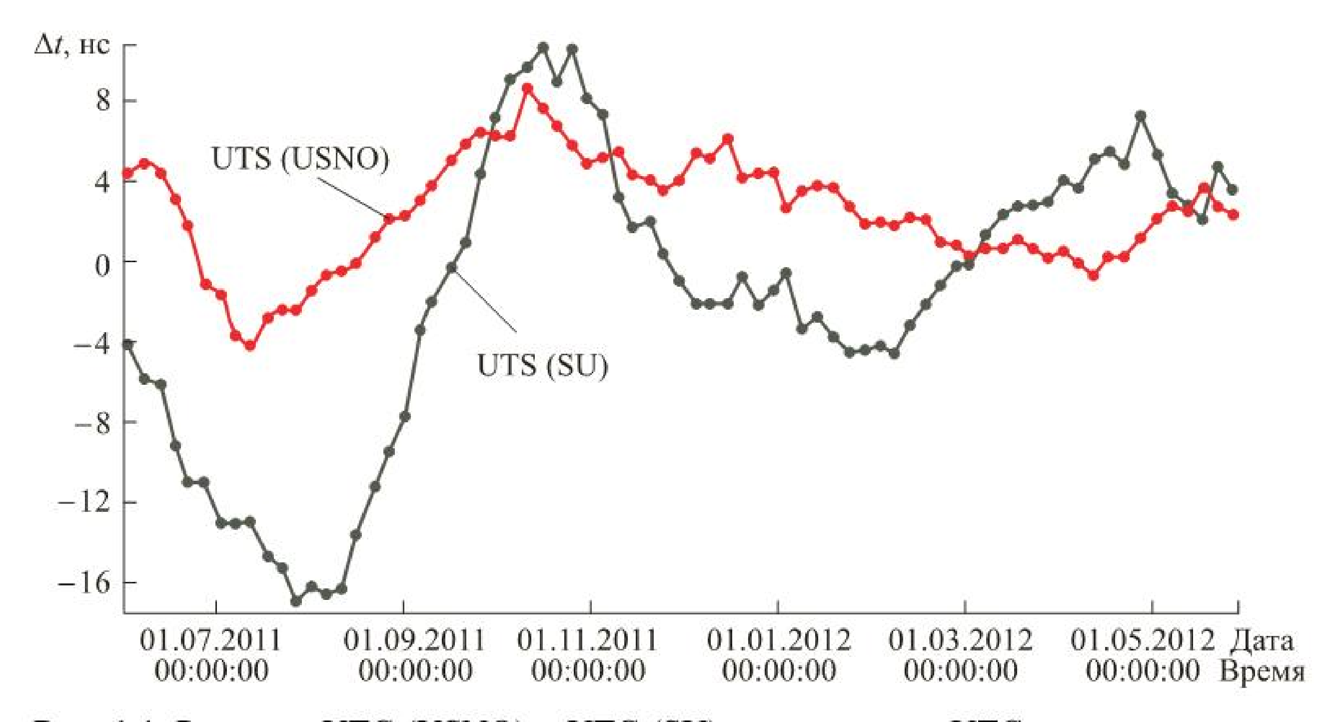


Рис. 1.1. Разность UTC (USNO) и UTC (SU) относительно UTC согласно оценкам МБМВ

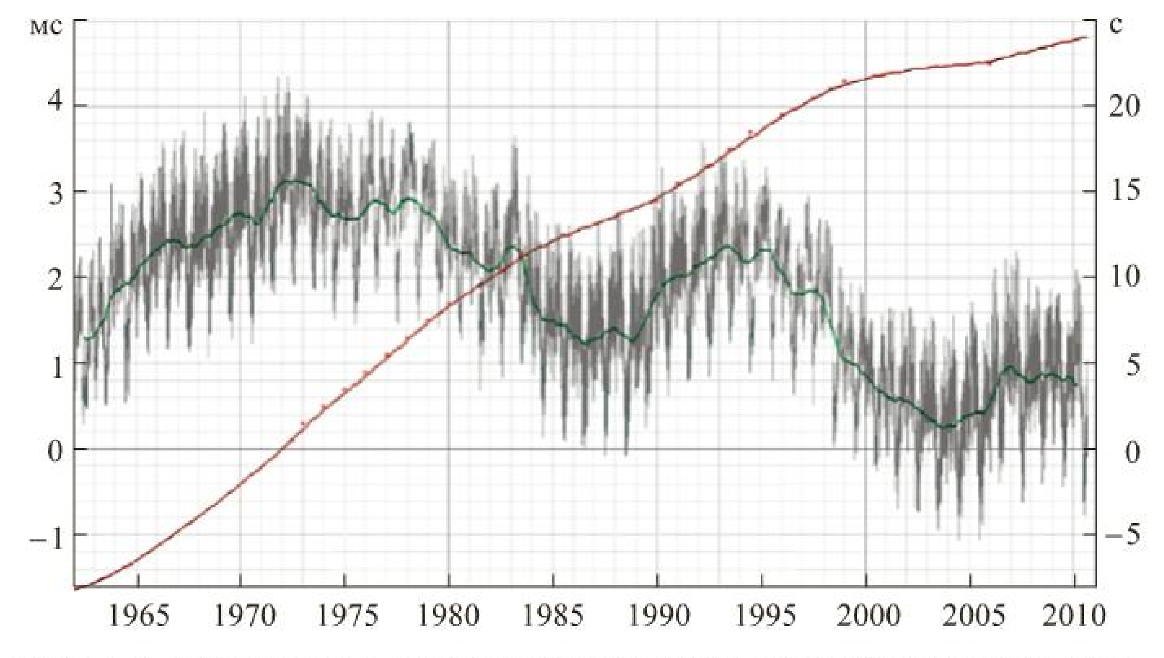


Рис. 1.2. Отклонение периода вращения Земли от номинального значения и рост *leap_sec*

В результате шкала времени UTC непрерывно расходится с так называемым Всемирным временем UT (*Universal Time*), к которому привязано движение небесных тел и основополагающие понятия времени — полночь, полдень и т. п. Так как космическая техника связана с положением небесных тел, то шкала UT, определяющая положение небесных тел на небесной сфере, так же как и UTC, будет играть важную роль в дальнейшем изучении темы.

Существует много разновидностей шкалы UT — UT0, UT1, UT2, ..., учитывающих изменение положения меридианов Земли с различной степенью точности. Все эти разновидности шкал отличаются на время, не превышающее 1–2 мс. Максимальный угол поворота Земли за это время составляет 0,03″. В большинстве случаев практической деятельности в области космической навигации такое различие в угловом положении Земли относительно инерциального пространства является несущественным, и для определенности будем использовать шкалу времени UT1 — Всемирное время среднего Гринвичского меридиана, рассчитанное с учетом движения полюсов Земли.

Приведенная на рис. 1.2 монотонно возрастающая кривая является интегралом от кривой отклонения реального периода вращения Земли и представляет собой график расхождения UT1 с равномерной атомной шкалой времени, начиная с 1960 г. Такое же расхождение было бы и со шкалой UTC, если бы периодически (раз в полгода — пять лет) не проводилась ее коррекция

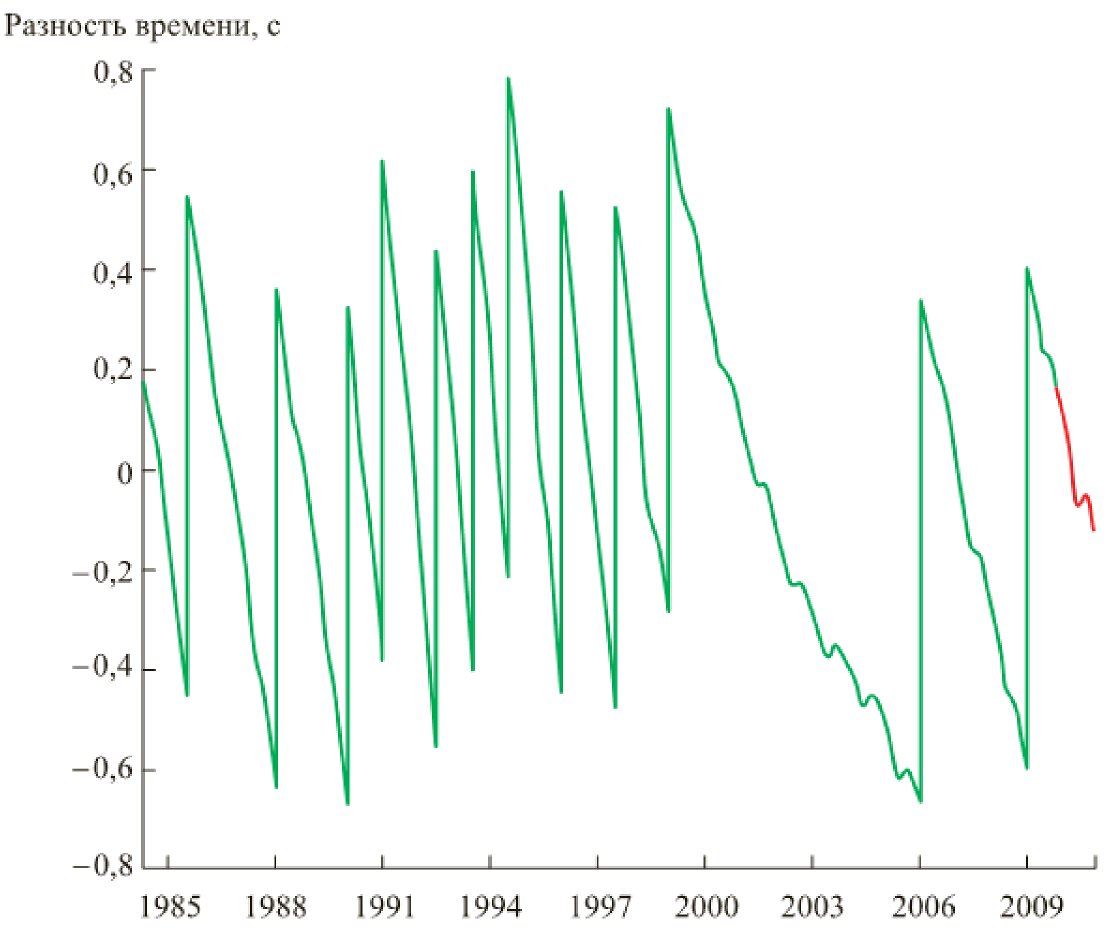


Рис. 1.3. Расхождение шкал времени UTC и UT1

на 1 с так, чтобы разность (UT – UTC) не превышала 0,9 с. Коррекции часов выполняются 1 января или 1 июня в 00 ч 00 мин 00 с. О проведении коррекции часов UTC заблаговременно сообщают средства массовой информации. Таким образом, достоинством шкалы UTC является высокая равномерность, присущая атомному времени, и достаточно точная привязка (точнее 0,9 с) к шкале UT1, описывающей естественные природные процессы (восход, заход), что характерно для среднего солнечного времени.

Однако в некоторых случаях точности привязки UT1 к UTC, равной 0,9 с оказывается недостаточно для решения той или иной навигационной задачи. Разность времени между двумя шкалами UT1 определяется астрономическими службами и публикуется на различных сайтах с высокой точностью. Достаточно приближенный график расхождения времени UTC и UT1 для интервала 25 лет (с 1985 г.) показан на рис. 1.3.

Из графика можно видеть, что текущее значение UT1 является плохо прогнозируемым и для точных расчетов следует использовать информацию, получаемую из астрономических наблюдений. Значение UT1 мы в дальнейшем будем использовать для привязки гринвичской системы координат к инерциальной системе. Текущее значение dUT1 можно найти на сайте МСВЗ.

1.3. Основные системы координат

Говоря о положении КА в пространстве, необходимо определить некоторую систему отсчета, относительно которой определяется это положение, т. е. определить систему координат, относительно которой рассматривается движение КА. С древних времен на Земле используются географические системы координат. В настоящее время одной из основных таких систем является Гринвичская географическая система координат (ГГСК), в которой Земля представлена эллипсоидом вращения со следующими размерами: $R_э$ — радиус экватора и $R_п$ — радиус полюса, ось симметрии эллипсоида совпадает с осью вращения Земли, а поверхность эллипсоида разделена на параллели и меридианы. *Параллели* — линии пересечения плоскостей, нормальных оси вращения, с поверхностью эллипсоида. *Меридианы* — линии пересечения плоскостей, проходящих через ось вращения, с поверхностью эллипсоида.

Параллели и меридианы имеют нумерацию, выраженную в единицах измерения углов (градусы, минуты, секунды). Нулевой параллелью является экватор, нулевым меридианом — меридиан, проходящий через условную точку на поверхности Земли в г. Гринвич (Великобритания). Географической широтой данной точки называется угол между нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора. Положительный отсчет широты от 0 до 90° от экватора к северному полюсу (северная широта), отрицательный от 0 до −90° от экватора к южному полюсу (южная широта). Географической долготой данной точки называется угол между нулевым меридианом и меридианом, проходящим через данную точку. Положитель-

ный отсчет долготы (восточная долгота) от 0 до 180° в восточном направлении, отрицательный (западная долгота) — от 0 до −180° в западном направлении. Географической высотой данной точки является кратчайшее расстояние от нее до поверхности эллипсоида. Если точка находится выше поверхности эллипсоида, то высота положительная, если ниже — отрицательная.

Существует множество (международных, национальных, локальных) ГГСК, отличающихся размерами и ориентацией эллипсоида относительно Земли. Здесь будем рассматривать две основные системы — это система WGS-84 (США) и ПЗ-90.02 (Россия). Для WGS-84 радиус эллипсоида на экваторе

$$R_э = 6378137 \text{ м},$$

коэффициент сжатия

$$\alpha = \frac{R_э - R_п}{R_э} = 1/298257223563,$$

где $R_п$ — радиус эллипсоида на полюсе.

Для ПЗ-90.02

$$R_э = 6378136 \text{ м},$$

$$\alpha = 1/298,25784.$$

Направления осей эллипсоида совпадают. Имеется незначительное смещение центров эллипсоида (в пределах 30 см), которое будет приведено ниже.

Для определения координат объектов, расположенных или движущихся на Земле, чаще используется ГГСК, в космической навигации чаще используется прямоугольная гринвичская система координат (ГСК), или на английском языке — ECEF (*Earth–Centred*, *Earth–Fixed*).

В качестве основных таких систем также будем рассматривать WGS-84 и ПЗ-90.02. Начала координат этих систем расположены в центрах соответствующих эллипсоидов, а прямоугольные оси *X*, *Y*, *Z* направлены по главным осям эллипсоидов (ось *Z* — в направлении северного полюса, ось *X* лежит на пересечении экватора с Гринвичским меридианом). Однако эти системы незначительно отличаются, так как определены независимо и физически закреплены наземными реперными точками.

Переход между двумя системами определен формулой

$$\bar{X}_{\text{ПЗ-90.02}} = \bar{X}_{\text{WGS-84}} - \begin{bmatrix} -0,36 \\ 0,08 \\ 0,18 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Так как смещение между двумя системами координат незначительно и составляет ~0,4 м, в дальнейшем (если нет особой необходимости) этим смещением будем пренебрегать и любую из систем ПЗ-90.02 или WGS-84 называть ГСК.

Переход между ГГСК и ГСК выполняется по следующему алгоритму:

$$X = (N + H)\cos B \cos L;$$
$$Y = (N + H)\cos B \sin L; \quad (1.2)$$
$$Z = \left[\left(1 - e^2\right)N + H\right]\sin B,$$

где X, Y, Z — прямоугольные пространственные координаты точки; B, L — геодезические широта и долгота точки соответственно, рад; H — геодезическая высота точки, м; N — радиус кривизны первого вертикала, м; e — эксцентриситет эллипсоида.

Значения радиуса кривизны первого вертикала и квадрата эксцентриситета эллипсоида вычисляют, соответственно, по формулам

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad (1.3)$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2, \quad (1.4)$$

где a — большая полуось эллипсоида, м; α — коэффициент сжатия эллипсоида.

Для преобразования пространственных прямоугольных координат в геодезические необходимо проведение итераций при вычислении геодезической широты. Для этого используют следующий алгоритм:

1) по формуле

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (1.5)$$

вычисляют вспомогательную величину D;

2) анализируют значение D:

а) если $D = 0$, то

$$B = \frac{\pi}{2}\frac{Z}{|Z|}; \quad (1.6)$$

$$L = 0;$$

$$H = Z \sin B - a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad (1.7)$$

б) если $D \neq 0$, то

$$L = \begin{cases} 2\pi - L_a \text{ при } Y < 0, X > 0; \\ \pi + L_a \text{ при } Y < 0, X < 0; \\ \pi - L_a \text{ при } Y > 0, X < 0; \\ L_a \text{ при } Y > 0, X > 0; \\ 0 \text{ при } Y = 0, X > 0; \\ \pi \text{ при } Y = 0, X < 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

где

$$L_a = \left|\arcsin(Y/D)\right|; \quad (1.9)$$

3) анализируют значение Z:

а) если $Z = 0$, то

$$b = 0;\ H = D - a; \tag{1.10}$$

б) во всех остальных случаях вычисления выполняют следующим образом:

• находят вспомогательные величины r, c, p по формулам

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \tag{1.11}$$

$$c = \arcsin\frac{Z}{r}; \tag{1.12}$$

$$p = \frac{e^2 a}{2r}; \tag{1.13}$$

• реализуют итеративный процесс, используя вспомогательные величины s_1 и s_2:

$$s_1 = 0; \tag{1.14}$$

$$b = c + s_1; \tag{1.15}$$

$$s_2 = \arcsin\frac{\rho \sin 2b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 b}}; \tag{1.16}$$

$$d = |s_2 - s_1|. \tag{1.17}$$

Если значение d, определяемое по формуле (1.17), меньше установленного значения допуска, то

$$B = b; \tag{1.18}$$

$$H = D\cos B + Z\sin B - a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \tag{1.19}$$

Если значение d равно или больше установленного значения допуска, то

$$s_1 = s_2, \tag{1.20}$$

и вычисления повторяют, начиная с формулы (1.15).

При преобразованиях координат в качестве допуска прекращения итеративного процесса принимают значение $10^{-4}''$. В этом случае погрешность вычисления геодезической высоты не превышает 0,003 м.

Неформальное описание программных функций взаимного преобразования ГСК с ГГСК и описание их интерфейсов будет приведено в гл. 8 ч. 2 настоящего курса лекций.

Одной из часто используемых в космической навигации систем координат является инерциальная система координат (ИСК), начало которой находится в центре Земли, ось Z совпадает с осью Z ГСК, оси X, Y лежат в плоскости экватора, ось X направлена в точку весеннего равноденствия (*Celestial Reference Frame* (*CRF*). Однако точка весеннего равноденствия, а также ось Z ГСК хотя и

медленно, но изменяют свое направление в инерциальном пространстве, поэтому при определении ИСК следует выбрать эпоху, к которой относятся нужные направления. В качестве такой эпохи была взята эпоха *J*2000,0, которой соответствует Юлианская дата 1 января 2000 года 12 ч 00 мин (или 11:58:55,816 1 января 2000 года по UTC). Поэтому в дальнейшем в качестве ИСК (если не будет оговорено другое) будем понимать ИСК на указанную дату. Для данной ИСК разработаны различные астрономические каталоги, позволяющие определить координаты Солнца, Луны, звезд, планет и других светил именно в данной системе координат. Разработаны также высокоточные алгоритмы и программы, позволяющие осуществлять переход из ГСК в ИСК и обратно. Однако прежде чем приступить к алгоритмам преобразования ГСК в ИСК, рассмотрим особенности движения Земли.

В идеальном случае, если бы Земля вращалась вокруг оси Z ГСК с постоянной скоростью, а ее ось вращения сохраняла свое положение в пространстве, то матрица перевода ИСК в ГСК имела бы вид

$$H_{\text{ИСК—ГСК}} = H^0_{\text{ИСК—ГСК}} \begin{pmatrix} \cos\omega_3 t & +\sin\omega_3 t & 0 \\ -\sin\omega_3 t & \cos\omega_3 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

где ω_3 — угловая скорость вращения Земли; t — время от начала эпохи; $H^0_{\text{ИСК—ГСК}}$ — матрица перехода от ИСК в ГСК в начальную эпоху.

Однако, как известно, истинная скорость вращения Земли не постоянна и не соответствует номинальной угловой скорости. Если время вычисляется по шкале UTC, то к нему необходимо добавить поправку на ошибку скорости вращения Земли dUT1. Максимальная угловая ошибка в искомой матрице преобразования координат, которая может возникнуть из-за неучета поправки dUT1, составляет

$$\Delta\varphi_{\text{UT1}} = d\text{UT1}_{\max}\,\omega_3 \cong 15''. \tag{1.22}$$

Еще одним фактором, влияющим на матрицу преобразования ИСК в ГСК, является прецессия и нутация оси вращения Земли. Из-за несферичности Земля имеет неравные главные моменты инерции. В этом случае на любое тело, находящееся в гравитационном поле других тел, действует гравитационный момент, влияющий на параметры его углового движения. В данном случае Земля находится в гравитационном поле Солнца, Луны и других планет. Действующий в этом случае на Землю гравитационный момент заставляет прецессировать в инерциальном пространстве кинетический момент Земли, близкий по направлению к угловой скорости вращения Земли. Под действием основного момента от Солнца кинетический момент Земли и, соответственно, ось Z ГСК совершает медленное прецессионное движение по конусу с углом при вершине ~23° и осью конуса, перпендикулярной плоскости эклиптики. Период такого движения составляет ~26 000 лет. За год угол прецессии составляет ~20″. Под действием гравитационного момента от

Луны и переменной составляющей гравитационного момента от Солнца (а также вледствие гравитационного влияния планет) Земля совершает целый ряд мелких колебаний с различными периодами около положения, определяемого прецессией, это движение называется *нутацией*. Угловая скорость нутации достигает ~0,1 ″/сут. Для наглядности на рис. 1.4 приведены графики отклонений оси Z Земли вокруг осей X и Y ИСК от своего первоначального положения (на 1 января 2000 года) в течение двухнедельного интервала с 26.08.2007 по 11.09.2007 г.

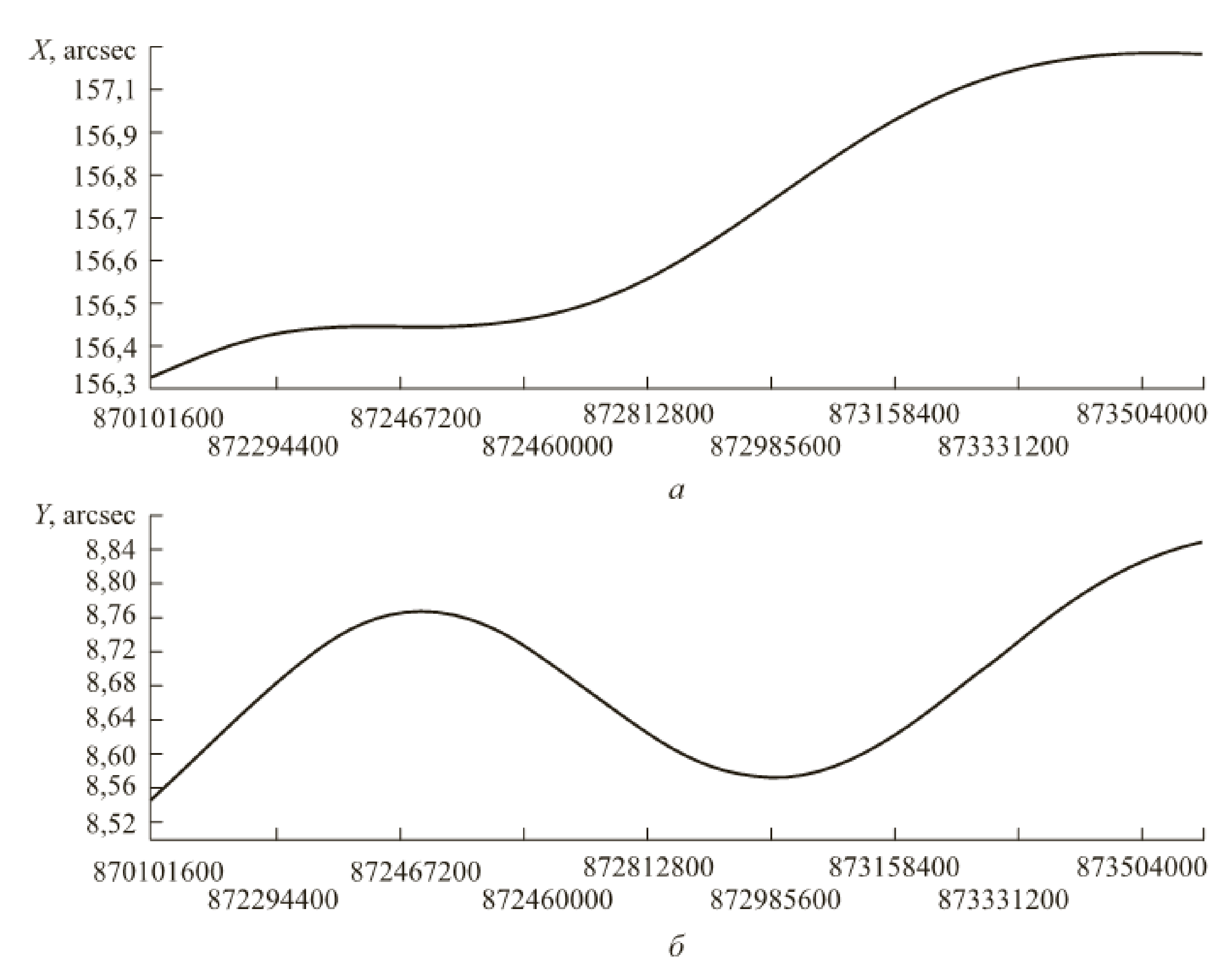


Рис. 1.4. Отклонения оси Z Земли вокруг осей X и Y ИСК от своего первоначального положения в результате прецессии (*а*) и нутации (*б*)

В настоящее время разработаны сложные алгоритмы, позволяющие рассчитывать углы прецессии и нутации с высокой точностью (~10^{-3}″) на любом интервале времени. На практике это выражается в формировании матрицы $R_{\text{п—н}}$ прецессии — нутации как функции времени. Существуют различные алгоритмы и программные функции, формирующие матрицу прецессии — нутации $R_{\text{п—н}}$, преобразующую положение полюса мира от нулевой эпохи (01.01.2000) на текущий момент. В первом приближении можно считать, что эта матрица является матрицей двух малых поворотов оси Z на углы φ_x и φ_y.

После преобразования положения оси вращения Земли, обусловленной ее нутацией и прецессией, необходимо выполнить разворот вокруг оси Z на угол разворота Земли от момента нулевой эпохи до заданного момента времени T_{UTC} с учетом поправки dUT1 и начального угла рассогласования φ_0 между осью $X_{\text{ГСК}}$ и осью $X_{\text{ИСК}}$ на нулевую эпоху. Матрица такого разворота имеет вид

$$R_s = \begin{pmatrix} \cos[\varphi_0 + \omega_3(t + d\text{UT1})] & +\sin[\varphi_0 + \omega_3(t + d\text{UT1})] & 0 \\ -\sin[\varphi_0 + \omega_3(t + d\text{UT1})] & \cos[\varphi_0 + \omega_3(t + d\text{UT1})] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.23)$$

где φ_0 — начальный угол рассогласования между осью $X_{\text{ГСК}}$ и осью $X_{\text{ИСК}}$ на нулевую эпоху (T_{UTC^0} = 11:58:55.816 01.01.2000); t — интервал времени от нулевой эпохи до текущего момента, $t = T_{\text{UTC}} - T_{\text{UTC}^0}$; dUT1 — поправка к времени UTC (разность между UT1 и UTC).

В 1.2 было отмечено, что поправка dUT1 является плохо прогнозируемой на период времени более двух недель. Ее значение с точностью до 1 мс публикуется на сайте МСВЗ и для точного преобразования ГСК в ИСК и обратно необходимо учитывать эту поправку.

Следующим фактором, влияющим на матрицу преобразования ИСК в ГСК, является смещение истинной оси вращения Земли от оси Z ГСК. Такое смещение также обусловлено воздействием на Землю внешних возмущающих моментов. При этом возникает рассогласование между векторами кинетического момента Земли и угловой скорости вращения Земли, и оно относительно оси Z ГСК достигает 1″ и является плохо прогнозируемым. На рис. 1.5

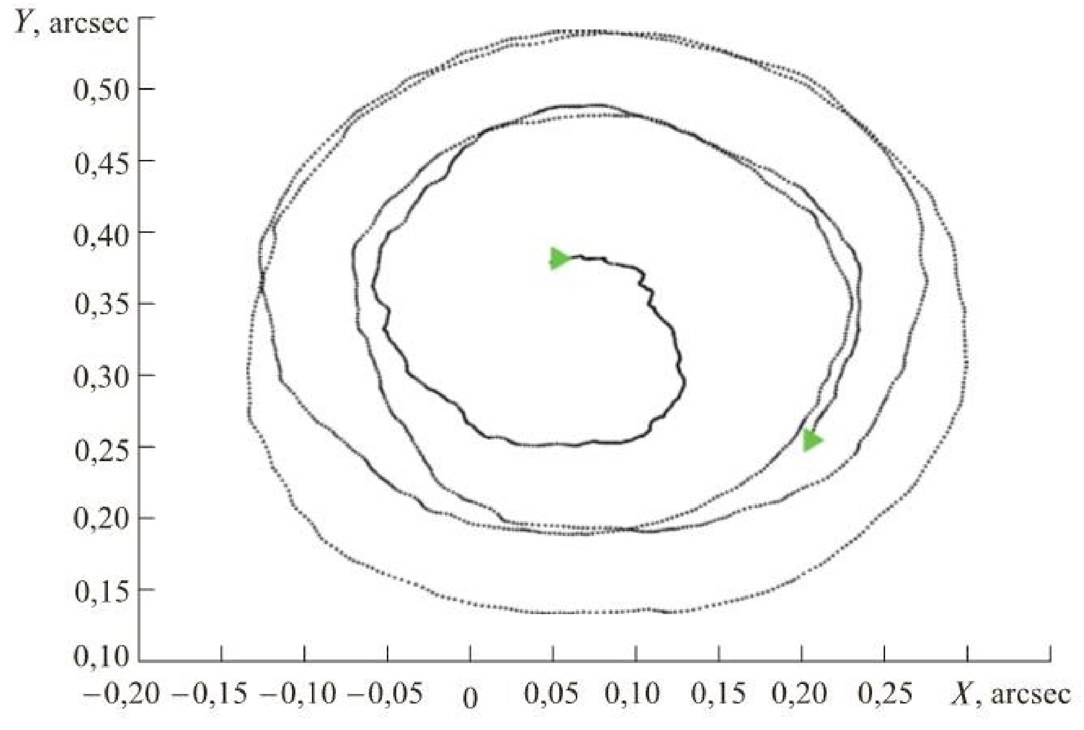


Рис. 1.5. Смещение реального полюса Земли от оси Z ГСК

приведен график перемещений полюса Земли (определяемого положением вектора угловой скорости Земли) вдоль осей X и Y ГСК за последние 5 лет (с 2005 по 2010 г.), из которого следует, что полюс колеблется около некоторого среднего положения с амплитудой ~10 м, а средняя скорость перемещения полюса составляет ~30 м/год (1 ″/год).

Значение смещения полюса относительно ГСК с высокой точностью публикуется на сайте МСВЗ. Оно также должно учитываться при преобразовании ИСК в ГСК. Если же требуется точность такого преобразования ниже 1″, то смещение полюсов можно не учитывать. Как правило, это касается низкоорбитальных КА, точность знания орбиты которых обычно не превышает 10…30 м. Для геостационарной орбиты, например, 1″ соответствует 200 м по положению.

С учетом движения полюсов матрица преобразования ИСК в ГСК может быть представлена в виде

$$R_{\text{ИСК—ГСК}} = R_m R_s R_{\text{н}} R_{\text{п}}, \qquad (1.24)$$

где R_m — матрица движения полюсов; R_s — матрица вращения; $R_{\text{н}}$ — матрица нутации; $R_{\text{п}}$ — матрица прецессии.

Сегодня в Интернете можно найти алгоритмы или программные функции, формирующие матрицу $R_{\text{ИСК—ГСК}}$ с разной степенью точности. В общем случае, интерфейс этих функций включает заданное время UTC, поправку к времени dUT1, смещение полюса Земли (Δx, Δy). Основным отличием между этими алгоритмами являются алгоритмы вычисления матриц прецессии и нутации, учитывающие влияние Луны, Солнца и планет с разной степенью точности, а общим свойством — большой объем занимаемой памяти (30…50 Кб), а также время счета.

Объем вычислений для реализации той или иной программной функции является важной ее характеристикой, особенно при реализации этой функции на бортовых вычислительных средствах, имеющих существенно меньшее быстродействие по сравнению с наземными. В качестве относительной количественной характеристики объема вычислений той или иной программной функции будем считать время ее реализации на современном персональном компьютере и в бортовом навигационном процессоре АСН-М МКС, который обладает достаточно высоким быстродействием по сравнению с другими бортовыми вычислительными средствами, но примерно в 140 раз меньшим по сравнению с быстродействием персонального компьютера.

С помощью упомянутых вычислительных средств экспериментально было оценено время реализации различных программных функций, обеспечивающих вычисление матрицы $R_{\text{ИСК—ГСК}}$. Для персонального компьютера это время составляет 500…800 мкс, а для АСН-М — 70…110 мс. Отметим, что длительность решения какой-либо отдельной задачи, превышающая 10 мс, является чрезвычайно большой для бортовых вычислительных средств, одновременно решающих большое количество других задач. Поэтому для борто-

вой реализации был предложен метод, позволяющий в сотни раз снизить объем необходимых вычислений для формирования матрицы $R_{ИСК—ГСК}$. Суть его заключается в том, что вычислительный процесс формирования матрицы $R_{ИСК—ГСК}$ выполняется в два этапа:

– разовый этап инициализации;

– непрерывный этап формирования $R_{ИСК—ГСК}$ в реальном времени.

Разовый этап инициализации выполняется однократно, например при включении системы. На этом этапе вычисляется матрица R_m и $R_{ИСК—ГСК}$:

$$R_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & -\Delta y \\ -\Delta x & \Delta y & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

где Δx, Δy — смещения реального полюса Земли в угловых секундах, значения которых регулярно обновляются, например, на сайте МСВЗ.

Матрица $R_{ИСК—ГСК}$ вычисляется на текущий момент T_{UTC^0} с учетом поправки dUT1, также регулярно обновляемой на сайте МСВЗ.

Из равенств (1.24) и (1.25) определим матрицу

$$R_0 = R_s R_н R_п = R_m^{\mathrm{T}} R_{ИСК—ГСК_0}, \tag{1.26}$$

где $R_{ИСК–ГСК_0}$ — матрица $R_{ИСК—ГСК}$, вычисленная на этапе инициализации на момент T_{UTC^0}.

Матрицы R_0 и R_m запоминаются и на всем последующем этапе считаются константами. Текущая матрица $R_{ИСК—ГСК}$ определяется по формуле

$$R_{ИСК—ГСК} = R_m R_{s0} R_0, \tag{1.27}$$

где $R_{s0} = \begin{pmatrix} \cos\omega_З t & \sin\omega_З t & 0 \\ -\sin\omega_З t & \cos\omega_З t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица вращения от момента T_{UTC^0};

$\omega_З$ — угловая скорость вращения Земли; t — текущее время от момента T_{UTC^0}.

Так как на рассматриваемом интервале времени t матрицу R_0, смещение полюса Δx, Δy и поправку времени dUT1 считаем константами, а в реальности эти параметры изменяются, со временем ошибка отклонения формируемой по алгоритму (1.27) матрицы $R_{ИСК—ГСК}$ будет увеличиваться. На рис. 1.6 приведен график ошибок матрицы $R_{ИСК—ГСК}$ относительно точной матрицы по малым углам φ_x, φ_y, φ_z, выраженным в угловых секундах.

Из рисунка следует, что рост ошибки матрицы $R_{ИСК—ГСК}$, формируемой по предложенному алгоритму, составляет ~0,1″ в сутки. Поэтому, если переинициализацию проводить один раз в сутки, точность формируемой мат-

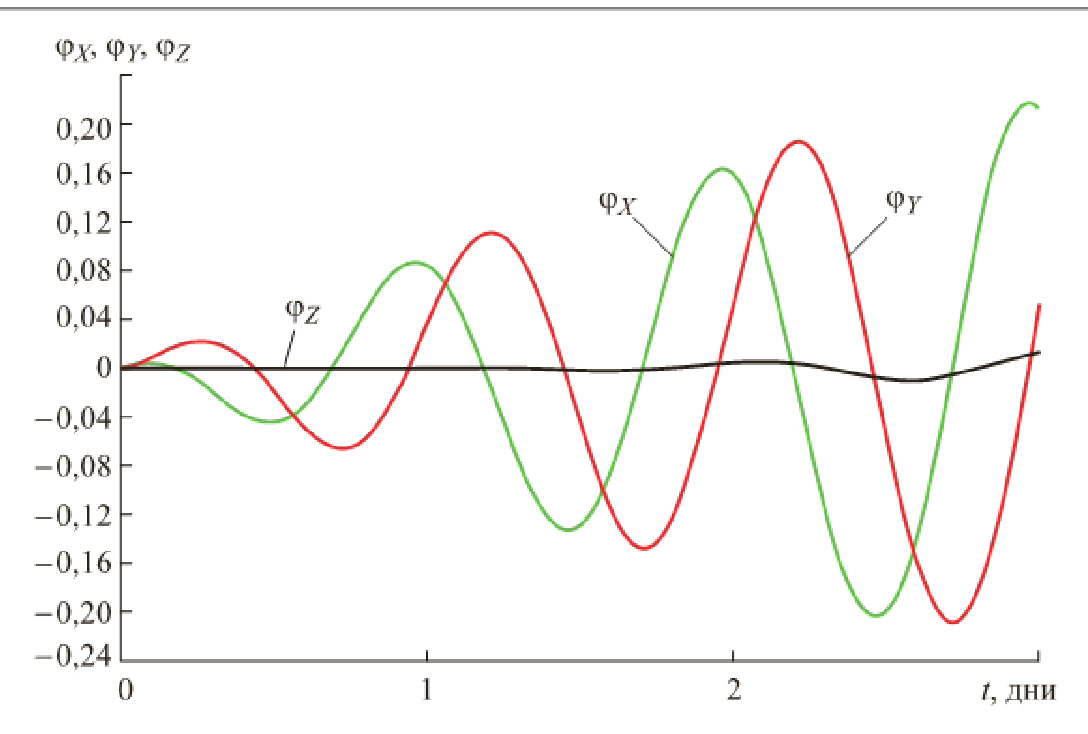


Рис. 1.6. Нарастание ошибок приближенного алгоритма формирования матрицы перехода из ГСК в систему координат *J*2000

рицы $R_{\text{ИСК—ГСК}}$ будет 0,1″. При проведении переинициализации один раз в 10 сут ошибка будет достигать 1″. При незначительной потере в точности предложенный метод обеспечивает снижение объема вычислений в 500–800 раз. Время реализации дежурной части программы составляет на персональном компьютере 1 мкс, в АСН-М — 140 мкс. При таком быстродействии данная задача может регулярно решаться на любых бортовых вычислительных средствах. Точность реализации матрицы $R_{\text{ИСК—ГСК}}$ при использовании этой функции будет определяться частотой проведения ее переинициализации.

Также одной из основных систем координат в космической навигации является орбитальная система координат (ОСК), которую определим следующим образом:

• начало ОСК — в центре масс КА;

• ось Y направлена по местной вертикали параллельно вектору координат КА $\bar{X}$, устремленному из центра Земли в центр масс КА;

• ось X лежит в плоскости, образованной осью Y и вектором $\bar{V}_{\text{ИСК}}$ абсолютной скорости КА (вектор скорости КА в ИСК), и составляет с ним острый угол. Для круговой орбиты ось X совпадает по направлению с вектором $\bar{V}_{\text{ИСК}}$.

Пусть $\bar{X}_{\text{ИСК}}$, $\bar{V}_{\text{ИСК}}$ — векторы координат и скорости КА в ИСК, тогда матрица перехода $A_{\text{ИСК–ОСК}}$ от ИСК в ОСК определяется алгоритмом:

1) единичный вектор

$$\bar{y}_{\text{ОСК}} = \frac{\bar{X}_{\text{ИСК}}}{\left|\bar{X}_{\text{ИСК}}\right|};$$

2) единичный вектор

$$\bar{z}_{\text{ОСК}} = \frac{\left[\bar{V}_{\text{ИСК}} \times \bar{y}_{\text{ОСК}}\right]}{\left\|\left[\bar{V}_{\text{ИСК}} \times \bar{y}_{\text{ОСК}}\right]\right\|}; \qquad (1.28)$$

3) единичный вектор

$$\bar{x}_{\text{ОСК}} = \left[\bar{z}_{\text{ОСК}} \times \bar{y}_{\text{ОСК}}\right].$$

Матрица перехода от ИСК в ОСК будет иметь вид

$$A_{\text{ИСК—ОСК}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{\text{ОСК}}^{\text{Т}} \\ \bar{y}_{\text{ОСК}}^{\text{Т}} \\ \bar{z}_{\text{ОСК}}^{\text{Т}} \end{pmatrix}. \qquad (1.29)$$

Значение любого вектора $\bar{X}_{\text{ИСК}}$ в ИСК можно получить в ОСК по формуле

$$\bar{X}_{\text{ОСК}} = A_{\text{ИСК—ОСК}} \bar{X}_{\text{ИСК}}. \qquad (1.30)$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (1.30), будем иметь уравнение для определения скорости КА в ОСК:

$$\bar{V}_{\text{ОСК}} = \dot{A}_{\text{ИСК—ОСК}} \bar{X}_{\text{ИСК}} + A_{\text{ИСК—ОСК}} \bar{V}_{\text{ИСК}}. \qquad (1.31)$$

Производная матрицы перехода из ИСК в любую вращающуюся систему координат

$$\dot{A}_{\text{ИСК—ОСК}} = \Omega\, A_{\text{ИСК—ОСК}}, \qquad (1.32)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ — матрица вращения, а ω_x, ω_y, ω_z — проекции абсолютной угловой скорости вращающейся системы координат на оси этой вращающейся системы координат.

Орбитальная система координат вращается вокруг оси Z_0 с угловой скоростью

$$\omega_z = -\frac{\left|\bar{V}_{\text{ИСК}} - \dfrac{\bar{X}}{|\bar{X}|} \dfrac{\bar{V}_{\text{ИСК}} \times \bar{X}}{|\bar{X}|}\right|}{|\bar{X}|}, \qquad \omega_x = \omega_y = 0. \qquad (1.33)$$

Тогда вектор скорости КА в ОСК будет

$$\bar{V}_{\text{ОСК}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_{\text{ИСК—ОСК}}\,\bar{X}_{\text{ИСК}} + A_{\text{ИСК—ОСК}}\bar{V}_{\text{ИСК}}, \qquad (1.34)$$

а обратное преобразование будет иметь вид

$$\bar{X}_{\text{ИСК}} = A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ОСК}}\,\bar{X}_{\text{ОСК}};$$

$$\bar{V}_{\text{ИСК}} = A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ОСК}}\,\bar{V}_{\text{ОСК}} - A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ОСК}} \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_{\text{ОСК}}. \qquad (1.35)$$

Определим матрицу перехода из ГСК в ОСК. Пусть заданы векторы координат $\bar{X}_{\text{ГСК}}$ и скорости $\bar{V}_{\text{ГСК}}$ в ГСК. Тогда матрица перехода $A_{\text{ГСК—ОСК}}$ из ГСК в ОСК определяется по следующему алгоритму:

1) единичный вектор

$$\bar{y}_{\text{ОСК}} = \frac{\bar{X}_{\text{ГСК}}}{\left|\bar{X}_{\text{ГСК}}\right|};$$

2) вектор абсолютной скорости КА относительно ГСК

$$\bar{V}_a = \bar{V}_{\text{ГСК}} + \left[\bar{\omega}_{\text{З}} \times \bar{X}_{\text{ГСК}}\right], \qquad (1.36)$$

где $\bar{\omega}_{\text{З}}$ — вектор угловой скорости Земли;

3) единичный вектор

$$\bar{z}_{\text{ОСК}} = \frac{\left[\bar{V}_a \times \bar{y}_{\text{ОСК}}\right]}{\left\|\left[\bar{V}_a \times \bar{y}_{\text{ОСК}}\right]\right\|};$$

4) единичный вектор $\bar{x}_{\text{ОСК}} = \left[\bar{z}_{\text{ОСК}} \times \bar{y}_{\text{ОСК}}\right]$.

Матрица перехода от ГСК в ОСК имеет следующий вид:

$$A_{\text{ГСК—ОСК}} = \begin{pmatrix} \bar{x}^{\text{T}}_{\text{ОСК}} \\ \bar{y}^{\text{T}}_{\text{ОСК}} \\ \bar{z}^{\text{T}}_{\text{ОСК}} \end{pmatrix}. \qquad (1.37)$$

Значение любого вектора $\bar{X}_{\text{ГСК}}$ в ГСК можно преобразовать в ОСК по формуле

$$\bar{X}_{\text{ОСК}} = A_{\text{ГСК—ОСК}}\,\bar{X}_{\text{ГСК}}. \qquad (1.38)$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (1.38), получим уравнение для определения скорости КА в ОСК:

$$\bar{V}_{\text{ОСК}} = \dot{A}_{\text{ГСК—ОСК}}\,\bar{X}_{\text{ГСК}} + A_{\text{ГСК—ОСК}}\,\bar{V}_{\text{ГСК}}. \qquad (1.39)$$

Матрицу $A_{\text{ГСК—ОСК}}$ можно представить в виде

$$A_{\text{ГСК—ОСК}} = A_{\text{ИСК—ОСК}} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}. \quad (1.40)$$

Продифференцировав равенство (1.40), получим

$$\dot{A}_{\text{ГСК—ОСК}} = \dot{A}_{\text{ИСК—ОСК}} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}} + A_{\text{ИСК—ОСК}} \dot{A}^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}. \quad (1.41)$$

Для матрицы $A_{\text{ИСК—ГСК}}$ аналогично равенству (1.32) можно записать

$$\dot{A}_{\text{ИСК—ГСК}} = \Omega_{\text{З}} A_{\text{ИСК—ГСК}}, \quad (1.42)$$

где $\Omega_{\text{З}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{\text{З}} & 0 \\ -\omega_{\text{З}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица вращения Земли.

Подставив в уравнение (1.39) значение матрицы $A_{\text{ГСК—ОСК}}$ с учетом равенств (1.41), (1.42), имеем

$$\bar{V}_{\text{ОСК}} = \Omega\, A_{\text{ИСК—ОСК}} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}} \bar{X}_{\text{ГСК}} + A_{\text{ИСК—ОСК}} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}} \Omega^{\text{T}}_{\text{З}} \bar{X}_{\text{ГСК}} +$$
$$+ A_{\text{ГСК—ОСК}} \bar{V}_{\text{ГСК}}. \quad (1.43)$$

Принимая во внимание, что $A_{\text{ИСК—ОСК}} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}} = A_{\text{ГСК—ОСК}}$, из уравнения (1.43) получим

$$\bar{V}_{\text{ОСК}} = \Omega\, A_{\text{ГСК—ОСК}} \bar{X}_{\text{ГСК}} - A_{\text{ГСК—ОСК}}\, \Omega_{\text{З}} \bar{X}_{\text{ГСК}} + A_{\text{ГСК—ОСК}} \bar{V}_{\text{ГСК}}, \quad (1.44)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица орбитального вращения, в которой ω_z определяется равенством (1.33).

Обратное преобразование векторов $\bar{X}_0$, $\bar{V}_0$ в ГСК имеет вид

$$\begin{aligned} &\bar{X}_{\text{ГСК}} = A^{\text{T}}_{\text{ГСК—ОСК}} \bar{X}_{\text{ОСК}}; \\ &\bar{V}_{\text{ГСК}} = A^{\text{T}}_{\text{ГСК—ОСК}} \bar{V}_{\text{ОСК}} - A^{\text{T}}_{\text{ГСК—ОСК}}\, \Omega\, \bar{X}_{\text{ОСК}} + \Omega_{\text{З}} \bar{X}_{\text{ГСК}}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

рассмотренные преобразования вектора часто приходится реализовывать как в бортовом, так и в наземном программном обеспечении различных стендов отработки АСН. Поэтому инженер, занимающийся космической навигацией, должен иметь в своей библиотеке функции преобразования векторов координат и скорости каждой из рассмотренных выше систем координат в иную.

Определение орбиты КА, как правило, выполняется для центра масс КА. При этом измерительная аппаратура может быть установлена в любой точке КА. В этом случае навигационные измерения, например, измерения расстояния от наземной точки с известными координатами до КА, будут проводиться с некоторой ошибкой, обусловленной смещением измерительной аппаратуры от центра масс. Однако место установки аппаратуры на КА всегда известно,

и эта ошибка может быть учтена при проведении навигационных расчетов. Для этого на КА должна быть введена собственная, так называемая связанная система координат (ССК):

• начало — в центре масс КА;

• оси X, Y, Z определенным образом расположены относительно КА и жестко связаны с его корпусом.

В процессе полета, как правило, ССК должна быть определенным образом расположена относительно рассмотренных систем координат ИСК, ГСК или ОСК. Обеспечение заданного положения осуществляет система ориентации КА. Количественной характеристикой текущей ориентации КА может быть, например, матрица $A_{\text{ИСК—ССК}}$ перехода от ИСК к ССК. Если точка расположения какого-либо прибора в ССК имеет координату $\bar{X}_{\text{ССК}}$, то его координаты в ИСК будут

$$\bar{X}_{\text{ИСК}} = \bar{X}_{\text{ИСК}^{\text{КА}}} + A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}}\bar{X}_{\text{ССК}}, \tag{1.46}$$

где $\bar{X}_{\text{ИСК}^{\text{КА}}}$ — вектор координат центра масс КА в ИСК.

Определение матрицы ориентации представляет собой одну из важных задач навигации. При вращении КА в пространстве эта матрица меняется в соответствии с уравнением

$$\dot{A}_{\text{ИСК—ССК}} = \Omega A_{\text{ИСК—ССК}}, \tag{1.47}$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ — матрица вращения КА; ω_x, ω_y, ω_z — проекции абсолютной угловой скорости КА на оси ССК.

Как правило, на КА устанавливают датчики угловой скорости (ДУС), непосредственно измеряющие проекции ω_x, ω_y, ω_z с достаточно высокой точностью. Поэтому, если в начальный момент времени t_0 матрица $A_{\text{ИСК—ССК}}$ известна и проводят измерения угловой скорости КА ω_x, ω_y, ω_z, то в любой последующий момент времени t матрица $A_{\text{ИСК—ССК}}$ может быть получена путем интегрирования уравнения (1.47). При этом необходимо учитывать, что матрица ориентации $A_{\text{ИСК—ССК}}$ является ортонормированной — модули ее строк и столбцов равны единице, и справедливо следующее равенство:

$$A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}} = A^{-1}_{\text{ИСК—ССК}}. \tag{1.48}$$

В процессе интегрирования ортонормированность матрицы $A_{\text{ИСК—ССК}}$ может нарушаться, поэтому при ее вычислении периодически необходимо проводить операцию ортонормирования по алгоритму

$$A = A + 0{,}5((A^{-1})^{\text{T}} - A), \tag{1.49}$$

где с правой стороны — неортонормированная матрица A, полученная в процессе интегрирования уравнения (1.47), а с левой — ортонормированная матрица.

Описанный выше процесс интегрирования уравнения (1.47) называется *кинематическим преобразованием матрицы ориентации*. Такое преобразование часто применяется как в бортовом программном обеспечении, так и в наземных исследовательских стендах.

1.4. Невозмущенное движение КА. Кеплеровы элементы орбиты

Приближенные уравнения движения КА относительно ИСК в векторной форме имеют вид

$$\ddot{\bar{X}} + \frac{\mu}{r^3}\bar{X} = 0, \qquad (1.50)$$

где $\bar{X}$ — радиус-вектор КА; μ — гравитационная постоянная Земли.

Уравнение (1.50) называется уравнением невозмущенного движения и в скалярной форме имеет вид

$$\begin{aligned} &\ddot{X} + \frac{\mu X}{r^3} = 0; \\ &\ddot{Y} + \frac{\mu Y}{r^3} = 0; \\ &\ddot{Z} + \frac{\mu Z}{r^3} = 0, \end{aligned} \qquad (1.51)$$

где $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$; X, Y, Z — координаты КА в ИСК.

Уравнения (1.50), (1.51) имеют следующие первые интегралы.

1. *Интеграл энергии* (скалярный интеграл) — полная энергия движущегося тела относительно притягивающего центра:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h = \text{const}, \qquad (1.52)$$

где V — скорость тела; h — постоянная энергии, зависящая от вида движения.

2. *Интеграл площадей* — площадь, ометаемая радиусом-вектором в единицу времени, — величина постоянная:

$$\bar{X} \times \bar{V} = \bar{c} = \text{const}.$$

Плоскость, в которой совершается движение, определяется уравнением

$$Xc_1 + Yc_2 + Zc_3 = 0, \qquad (1.53)$$

где X, Y, Z — компоненты радиуса-вектора $\bar{X}$; c_1, c_2, c_3 — компоненты вектора $\bar{c}$.

Для двух положений тела можно записать следующие соотношения:

$$c_1 = Y_1\dot{Z}_1 - Z_1\dot{Y}_1 = Y_2\dot{Z}_2 - Z_2\dot{Y}_2;$$

$$c_2 = Z_1\dot{X}_1 - X_1\dot{Z}_1 = Z_2\dot{X}_2 - X_2\dot{Z}_2;$$

$$c_3 = X_1\dot{Y}_1 - Y_1\dot{X}_1 = X_2\dot{Y}_2 - Y_2\dot{X}_2,$$

а интеграл площадей запишем в виде

$$c = r^2\dot{\vartheta}, \tag{1.54}$$

где $\dot{\vartheta} = \dfrac{d\vartheta}{dt}$ — угловая скорость движения тела.

3. *Интеграл Лапласа*. Между векторами $\bar{r}$, $\bar{V}$ и $\bar{c}$ имеет место следующее соотношение (интеграл Лапласа):

$$-\frac{\mu\bar{X}}{r} + \left(\bar{V}\times\bar{c}\right) = \bar{f} = \text{const}, \tag{1.55}$$

где $\bar{f}$ — вектор Лапласа.

В скалярной форме интеграл Лапласа можно записать в виде

$$\begin{aligned} XV^2 - \frac{\mu X}{r} - r\dot{r}X &= f_1; \\ YV^2 - \frac{\mu Y}{r} - r\dot{r}Y &= f_2; \\ ZV^2 - \frac{\mu Z}{r} - r\dot{r}Z &= f_3, \end{aligned} \tag{1.56}$$

где f_1, f_2, f_3 — компоненты вектора $\bar{f}$.

Существует всего семь скалярных первых интегралов: интеграл энергии, три скалярных интеграла площадей и три скалярных интеграла Лапласа. Между этими интегралами имеется связь, определяемая следующими соотношениями:

1) $\bar{f}\times\bar{c} = 0$, или $f_1c_1 + f_2c_2 + f_3c_3 = 0$, т. е. вектор Лапласа $\bar{f}$ и вектор $\bar{c}$ взаимно ортогональны и определяют неизменную плоскость Лапласа;

2) $f^2 = \mu^2 + c^2h$ — соотношение, связывающее энергию движения, константу площадей, гравитационную постоянную с модулем вектора Лапласа.

Уравнение (1.55) легко интегрируется. В плоскости движения КА в результате интегрирования существует следующее соотношение, определяющее форму орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}, \tag{1.57}$$

где p — параметр орбиты; e — эксцентриситет орбиты; ϑ — истинная аномалия.

Если $0 < e < 1$, то орбита представляет собой эллипс, один из фокусов которого совпадает с началом координат. Большая полуось эллипса определяется соотношением

$$a = \frac{p}{1-e^2}. \tag{1.58}$$

Истинная аномалия — это угол между перицентром, лежащим на большой оси эллипса, и вектором $\bar{r}$.

Скорость КА определяется из соотношения

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a}. \tag{1.59}$$

Связь между истинной аномалией и скоростью выглядит следующим образом:

$$V^2 = \frac{\mu}{p}e^2 + \frac{\mu}{p} + 2\frac{\mu}{p}\cos\vartheta. \tag{1.60}$$

В результате интегрирования уравнений движения (1.50) получаем выражение для определения времени движения t от момента τ — прохождения через перицентр орбиты (уравнение Кеплера):

$$t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}[E - e\sin E], \tag{1.61}$$

где E — эксцентрическая аномалия, которую можно найти из выражения

$$\mathrm{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}. \tag{1.62}$$

Период обращения КА по эллипсу составляет

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \tag{1.63}$$

Положение эллипса орбиты задается в ИСК тремя углами (рис. 1.7).

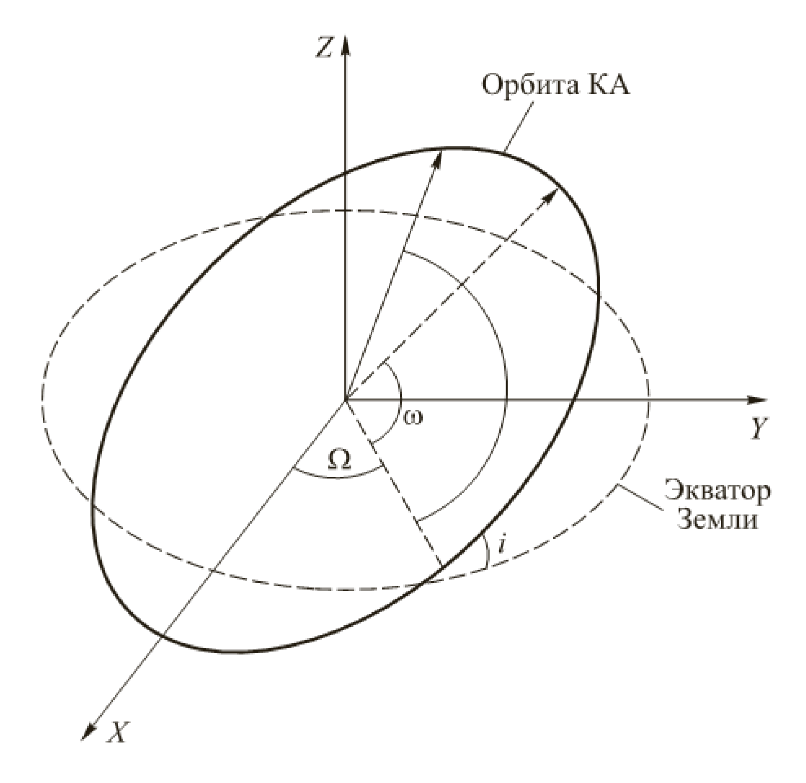


Рис. 1.7. Кеплеровы элементы орбиты:
i — наклонение орбиты, т. е. угол между плоскостью эллипса и плоскостью экватора; Ω — долгота восходящего узла, т. е. угол между осью X ИСК и радиусом-вектором, лежащим в плоскости экватора и в плоскости эллипса орбиты в точке восходящего узла, где движение КА идет из южного полушария в северное; ω — угловое расстояние от узла орбиты до перицентра

Элементы a, Ω, i, ω, e, τ называются кеплеровыми элементами орбиты.

Кроме основных элементов орбиты удобно применять вспомогательные:

$n = \dfrac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ — среднее движение;

$M = n(t - \tau)$ — средняя аномалия.

Выраженное через эти элементы уравнение Кеплера будет иметь вид

$$M = E - e\sin E. \tag{1.64}$$

Если известны кеплеровы элементы орбиты, то на любой заданный момент времени t можно определить векторы координат $\bar{X}$ и скорости $\dot{\bar{X}}$ относительно ИСК. Для этого из решения уравнения Кеплера (1.64) находится эксцентрическая аномалия E, а затем из соотношения (1.62) — ϑ, из (1.58) — p, из (1.57) — r. Радиальная составляющая скорости имеет вид

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\sin\vartheta,$$

а нормальная составляющая скорости

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1 + e\cos\vartheta\right).$$

Далее получим проекции вектора координат и вектора абсолютной линейной скорости КА на оси ГСК:

$$\begin{aligned}
&X = r\left(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i\right);\\
&Y = r\left(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i\right);\\
&Z = r\sin u + \sin i;\\
&\dot{X} = V_r\left(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i\right) - V_n\left(\sin u\cos\Omega + \cos u\sin\Omega\cos i\right);\\
&\dot{Y} = V_r\left(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i\right) - V_n\left(\sin u\sin\Omega - \cos u\cos\Omega\cos i\right);\\
&\dot{Z} = V_r\sin u\sin i + V_n\cos u\sin i,
\end{aligned} \tag{1.65}$$

где $u = \omega + \vartheta$.

Аналогично, зная $\bar{X}$ и $\dot{\bar{X}}$, можно однозначно получить кеплеровы элементы орбиты:

большую полуось орбиты

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - rV^2}, \tag{1.66}$$

где $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$; $V = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}$;

эксцентриситет орбиты

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}, \tag{1.67}$$

где

$$p = \frac{\left(X\dot{Y} - Y\dot{X}\right)^2 + \left(Y\dot{Z} - Z\dot{Y}\right)^2 + \left(X\dot{Z} - Z\dot{X}\right)^2}{\mu}; \tag{1.68}$$

наклонение плоскости орбиты

$$i = \arccos \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{\sqrt{\mu p}}; \tag{1.69}$$

долготу восходящего узла до перицентра орбиты

$$\sin\,\Omega = \frac{\dot{Y}Z - \dot{Z}Y}{\sin i \sqrt{\mu p}};$$

$$\cos\,\Omega = \frac{X\dot{Z} - Z\dot{X}}{\sin i \sqrt{\mu p}}; \tag{1.70}$$

угловое расстояние от узла до перицентра орбиты

$$\omega = u - \vartheta,$$

где

$$\sin u = \frac{Y \cos\Omega - X \sin\Omega}{r \cos i}; \tag{1.71}$$

$$\cos u = \frac{X \cos\Omega + Y \sin\Omega}{r \cos i}; \tag{1.72}$$

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{r}{\mu}} \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}}{er}; \tag{1.73}$$

$$\cos\vartheta = \frac{p - r}{er}. \tag{1.74}$$

Эксцентрическая аномалия определяется как

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}. \tag{1.75}$$

Время прохождения через перицентр

$$\tau = t - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}[E - e \sin E]. \tag{1.76}$$

Формулы (1.65)–(1.75) показывают, что шесть компонент векторов $\bar{X}$ и $\dot{\bar{X}}$ взаимно однозначно определяют шесть кеплеровых элементов орбиты, и сами могут рассматриваться в качестве элементов орбиты, т. е. если на какой-то момент t_0 известны векторы $\bar{X}_0$ и $\dot{\bar{X}}_0$, то координаты и скорость КА $\bar{X}$ и $\dot{\bar{X}}$ могут быть определены для любого другого момента времени.

Шестимерный вектор, иногда называемый вектором состояния КА

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \dot{\bar{X}} \end{pmatrix}, \tag{1.77}$$

может быть задан в ИСК или в ГСК. Здесь будем называть вектором состояния нормированный шестимерный вектор, имеющий следующий вид:

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{X}}{R_0} \\ \dfrac{\dot{\bar{X}}}{V_0} \end{pmatrix}, \tag{1.78}$$

где R_0 — средний радиус орбиты; V_0 — круговая скорость орбиты радиусом R_0.

Контрольные вопросы

1. Что такое космическая навигация, чем отличаются задачи ближнего и дальнего космоса? Каковы основные задачи космической навигации в ближнем и дальнем космосе?
2. Как формируется время UTC?
3. Чем отличается шкала времени UTC от шкалы UT1? Что такое *leap_sec* и поправка *d*UT1?
4. Какая связь между системой координат WGS-84, ПЗ-90.02?
5. Как связаны географическая система координат и прямоугольная ГСК?
6. Как связны система координат *J*2000 и ГСК?
7. Что такое уравнение невозмущенного движения КА?
8. Что такое кеплеровы элементы орбиты?
9. Постоянство каких параметров определяют первые интегралы энергии?
10. Что такое уравнение Кеплера?

Глава 2
Возмущенное движение космического аппарата, возмущающие ускорения, действующие на него. Моделирование движения космического аппарата

2.1. Возмущения, влияющие на орбиты КА

Уравнение движения КА (1.50) предполагает, что на него действует единственная центральная сила гравитационного поля, равная $\frac{\mu}{r^3}\bar{X}$. Для этих условий в 1.4 были получены формулы невозмущенного движения КА. В действительности же на КА кроме центральной силы действует целый ряд других, достаточно сильно влияющих на движение, сил. При этом центральная сила для орбитального КА, существенно превосходящая все остальные, и определяет основную его траекторию, а все другие силы — отклонения или возмущения реальной траектории от основной.

Под действием возмущающих ускорений меняются параметры орбиты КА. Например, шесть кеплеровых элементов орбиты изменяются во времени. Их текущие значения называются *оскулирующими кеплеровыми элементами*. По значению оскулирующих элементов орбиты по формулам (1.65) можно определить текущие значения координат и скорости КА. Аналогично, по текущим значениям координат и скорости КА по формулам (1.66)–(1.76) можно получить оскулирующие кеплеровы элементы орбиты.

Основными источниками возмущающих ускорений, действующих на КА, находящиеся на орбите Земли, являются:

• гравитационные возмущения, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли;

• атмосфера Земли;

• гравитационные возмущения от Луны и Солнца;

• возмущения от сил солнечного давления и сил светового давления от альбедо Земли;

• световые и тепловые излучения от самого КА;

• гравитационные возмущения, вызванные изменением формы Земли из-за приливных воздействий на Землю от Луны и Солнца;

• гравитационные возмущения от Венеры и других планет.

Кроме перечисленных, на движение КА влияет множество более мелких возмущений, которыми можно пренебречь.

Значение каждого из приведенных выше возмущений зависит и от орбиты КА. В табл. 2.1 приведены примерные значения возмущающих ускорений,

обусловленных данными факторами, для орбит высотой 19 000… 20 000 км, на которых, например, находятся спутники ГЛОНАСС и GPS, и низких орбит высотой 350…400 км (высота орбиты МКС).

Таблица 2.1

Составляющие ускорений, воздействующих на КА

№ п/п	Составляющая ускорений	Орбиты высотой 19 000…20 000 км, м/с^2	Орбиты высотой 350…400 км, м/с^2
1	Центральное поле Земли	0,61	8,8
2	Влияние сжатия Земли (гармоника 2×0)	10^{-4}	$2{,}5\cdot10^{-2}$
3	Влияние гармоник от 2×0 до 8×8	$2\cdot10^{-7}$	10^{-5}
4	Влияние гармоник порядка от 8×8 до 72×72	10^{-10}	$4\cdot10^{-7}$
5	Влияние гармоник порядка от 72×72 и выше	0	10^{-8}
6	Атмосфера Земли	0	$0{,}5\cdot0{,}9\cdot10^{-6}$
7	Лунная гравитация	$4\cdot10^{-6}$	10^{-6}
8	Солнечная гравитация	10^{-6}	$2{,}5\cdot10^{-7}$
9	Силы светового давления от Солнца	10^{-7} (GPS)	$6\cdot10^{-8}$ (МКС)
10	Силы светового давления от Земли	10^{-9} (GPS)	$3\cdot10^{-9}$ (МКС)
11	Силы, обусловленные световым и тепловым излучением КА	10^{-9}	10^{-9}
12	Гравитационные возмущения, вызванные изменением формы Земли из-за приливных воздействий Луны	10^{-9}	$1{,}5\cdot10^{-7}$
13	Гравитационные возмущения, вызванные изменением формы Земли из-за приливных воздействий Солнца	$2{,}5\cdot10^{-10}$	$0{,}4\cdot10^{-7}$
14	Гравитационные возмущения от Венеры	$1{,}1\cdot10^{-10}$	$3\cdot10^{-11}$

Приведенные в табл. 2.1 ускорения от центрального поля Земли обеспечивают движение КА по кеплеровой орбите. Остальные составляющие вносят возмущения в движение КА относительно этой кеплеровой орбиты.

Значения являются примерными и по ним трудно оценить влияние соответствующих факторов на движение КА. Реальные значения возмущаемых ускорений содержат как постоянные, так и периодические составляющие, которые по-разному возмущают орбиту. Например, постоянное аэродинамическое торможение (относительно ОСК), равное $1\cdot10^{-6}$ м/с^2, приводит за сутки к возмущению орбиты МКС по продольной дальности ~10 км. Такое же воз-

мущение, обусловленное влиянием солнечной гравитации на движение КА GPS, за сутки приводит к возмущению орбиты по положению 400 м, т. е. в 25 раз меньше, чем такое же аэродинамическое возмущение. Поэтому существенно большую информацию о влиянии перечисленных возмущений на движение КА разных классов представляют графики рассогласований возмущенной и невозмущенной орбит при воздействии какого-либо из рассматриваемых факторов.

Моделирование движения КА, в частности возмущений, действующих на КА, является важной частью космической навигации. Сегодня существует множество моделей каждого из перечисленных в табл. 2.1 факторов, имеющих ту или иную точность. В основном это сложные программы, требующие больших вычислительных затрат как по памяти, так и по объему вычислений, и их нельзя использовать в бортовых вычислительных средствах. Однако в настоящем курсе лекций при рассмотрении алгоритмов решения той или иной задачи акцент делается именно на реализацию этих алгоритмов в бортовых вычислительных средствах. Поэтому, как правило, рассматриваются нестандартные методы решения различных задач, в том числе и задач моделирования возмущений, позволяющие существенно повысить быстродействие решения при сохранении необходимой точности.

Важным моментом при разработке моделей движения КА является их верификация, к счастью, сейчас появилась возможность ее проведения с высокой точностью. На сайте International GNSS Service с задержкой ~2 недели относительно реального времени публикуются прецизионные эфемериды спутников GPS и ГЛОНАСС, полученные путем дополнительных измерений и алгоритмической постобработки первичных эфемерид, точность которых по координатам составляет 3…5 см. Это реальные координаты реальных спутников, движущихся при воздействии реальных возмущений. Эти орбиты взяты за базу для сравнения при проведении верификации модели.

Приняв за начальные условия движения КА высокоточные эфемериды одного из таких спутников, был проведен прогноз орбиты на трое суток с учетом всех имеющихся верифицируемых моделей. После чего определена разность между прогнозируемой с использованием модели движения КА орбитой и реальной орбитой спутника. На рис. 2.1 приведены графики «разлета» таких орбит в ОСК по координатам X, Y, Z (X — продольная дальность, Y — местная вертикаль).

Из рисунка видно, что «разлет» по продольной дальности за трое суток составил ~3 м, по вертикали и боковой дальности ~1,5 м. Полученный «разлет» обусловлен одновременным воздействием трех факторов:

- различием исходных условий в момент начала моделирования между параметрами моделируемой и реальной орбит;
- суммарным влиянием ошибок верифицируемых моделей;
- влиянием немоделируемых возмущений (пп. 9–14 табл. 2.1).

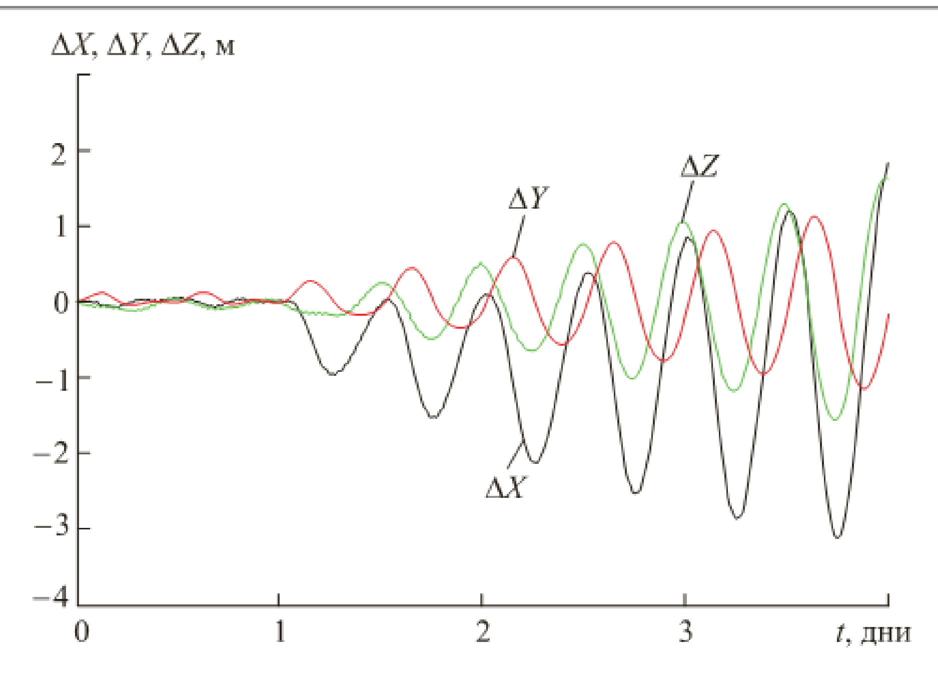


Рис. 2.1. «Разлет» реальной и моделируемой орбит спутника GPS

Раздельное влияние перечисленных факторов на «разлет» двух орбит оценить трудно — каждый из этих факторов мог дать основную составляющую «разлета». Например, легко посчитать, что «разлет» по продольной дальности 3 м за трое суток может быть вызван начальным рассогласованием параметров орбиты по продольной скорости $4\cdot10^{-3}$ мм/с. Однако предположив, что весь «разлет» обусловлен ошибками верифицируемых моделей, по характеру изменения разности координат моделируемого и реального КА в ОСК можно оценить, что суммарная ошибка моделируемых ускорений не превышает $2\cdot10^{-9}$ м/с^2. Эта ошибка вполне могла быть обусловлена неучтенными составляющими возмущений, например, силами светового давления от альбедо Земли или гравитационными возмущениями, вызванными изменением формы Земли из-за приливных воздействий Луны. Тем не менее для строгости будем считать, что ошибки всех верифицированных моделей для орбит радиусом ~26 000 км меньше $2\cdot10^{-9}$ м/с^2.

Для низких орбит резко возрастают возмущения, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли, а значит, могут увеличиться и ошибки соответствующих моделей. Существенное влияние на движение КА также начинает оказывать аэродинамика. Влияние лунной и солнечной гравитации уменьшается, соответственно уменьшаются возможные ошибки моделей и их значения. Влияние сил светового давления от Солнца примерно одинаково на низких и высоких орбитах, а точность модели возмущающего ускорения определяется точностью моделирования формы КА, его ориентации и коэффициента отражения солнечного света.

Влияние каждого из рассмотренных факторов на движение высокоорбитальных и низкоорбитальных КА будет рассмотрено ниже.

Наиболее сильные возмущения орбиты, особенно низкоорбитальных КА, обусловлены нецентральностью гравитационного поля Земли, которое может

быть представлено в виде бесконечного ряда разложения по сферическим функциям. Первый член этого разложения представляет собой ускорение центрального поля Земли, а второй член определяет возмущение поля из-за сжатия Земли, которое на порядки превосходит влияние всех остальных возмущений и определяет основную составляющую возмущений реальной орбиты относительно кеплеровой. Если кеплерова орбита КА, находящегося на орбите Земли, является идеальной и сильно отличается от реальной орбиты, то при учете влияния сжатия Земли моделируемая орбита становится значительно ближе к реальной, однако для более точного моделирования движения КА часто приходится учитывать члены разложения геопотенциала Земли более высокого порядка.

2.2. Возмущения, обусловленные нецентральностью гравитационного поля Земли

Потенциал гравитационного поля Земли может быть представлен в виде разложения по сферическим функциям:

$$U = \frac{a_{00}}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} \left(a_{nm} \cos mL + b_{nm} \sin mL \right) P_{nm}(\sin \varphi), \tag{2.1}$$

где a_{nm}, b_{nm} — коэффициенты, определяемые из гравиметрических данных, а также по наблюдениям за движением ИСЗ; L — долгота; $P_{nm}(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра степени n и порядка m.

Первый член этого разложения представляет собой составляющие центрального поля Земли:

$$a_{00} = \mu. \tag{2.2}$$

Центральное ускорение, обусловленное этой составляющей,

$$\bar{g}_r = -\frac{\mu}{r^3} \bar{X}. \tag{2.3}$$

Второй член разложения (2.1) обусловлен сжатием Земли. Первые два члена разложения (2.1) называют *нормальным потенциалом Земли*. Ускорение КА относительно ГСК, обусловленное влиянием этих членов, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} a_x &= -\frac{\mu}{r^3} x - \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_e^2}{r^5} x \left(1 - \frac{5Z^2}{r^2} \right); \\ a_y &= -\frac{\mu}{r^3} y - \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_e^2}{r^5} y \left(1 - \frac{5Z^2}{r^2} \right); \\ a_z &= -\frac{\mu}{r^3} z - \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_e^2}{r^5} z \left(3 - \frac{5Z^2}{r^2} \right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где x, y, z — координаты КА относительно ГСК; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; μ — константа гравитационного поля Земли, $\mu = 398600{,}4417 \cdot 10^9$ м^3/с^2; a_e — экваториальный радиус Земли, $a_e = 6378136$ м; C_{20} — коэффициент при второй зональной гармонике, $C_{20} = 1082{,}62575 \cdot 10^{-6}$.

Остальные члены разложения геопотенциала Земли называются *аномальной частью* гравитационного поля, имеющей вид

$$\Delta U = g_0 \sum_{n=e_2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n} (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin\varphi), \qquad (2.5)$$

где α_{nm}, β_{nm} — коэффициенты разложения; g_0 — среднее значение ускорения силы тяжести; R — средний радиус Земли.

Проекции ускорений на радиус-вектор r, нормаль к нему в плоскости меридиана по широте φ и нормаль к плоскости меридиана по долготе L определяются по формулам

$$\Delta g_r = \frac{g_0}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^{n} (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin\varphi); \qquad (2.6)$$

$$\Delta g_m = \frac{g_0}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^{n} (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) \times$$

$$\times \left[P_{n\,m+1}(\sin\varphi) - \frac{m \sin\varphi}{\cos\varphi} P_{nm}(\sin\varphi) \right];$$

$$\Delta g_L = \frac{g_0}{R \cos\varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^{n} (-\alpha_{nm} \sin mL + \beta_{nm} \cos mL) m P_{nm}(\sin\varphi).$$

Проекции $\Delta g_r(m, L)$ могут быть приведены к ГСК.

2.2.1. Влияние сжатия Земли на орбитальное движение КА

Под влиянием возмущений гравитационного поля, обусловленных сжатием Земли, происходит отклонение траектории КА от первоначальной кеплеровой орбиты. Однако каждому текущему вектору состояния $\bar{\xi}$ по формулам (1.65)–(1.75) можно поставить в соответствие новые значения кеплеровых элементов. Изменения оскулирующих кеплеровых элементов носят как периодический, так и вековой характер. Периодические составляющие изменений на интервале одного витка не приводят к изменению соответствующего параметра на значение, пропорциональное времени. Вековым изменениям подвержены три параметра: восходящий угол Ω_0, угол

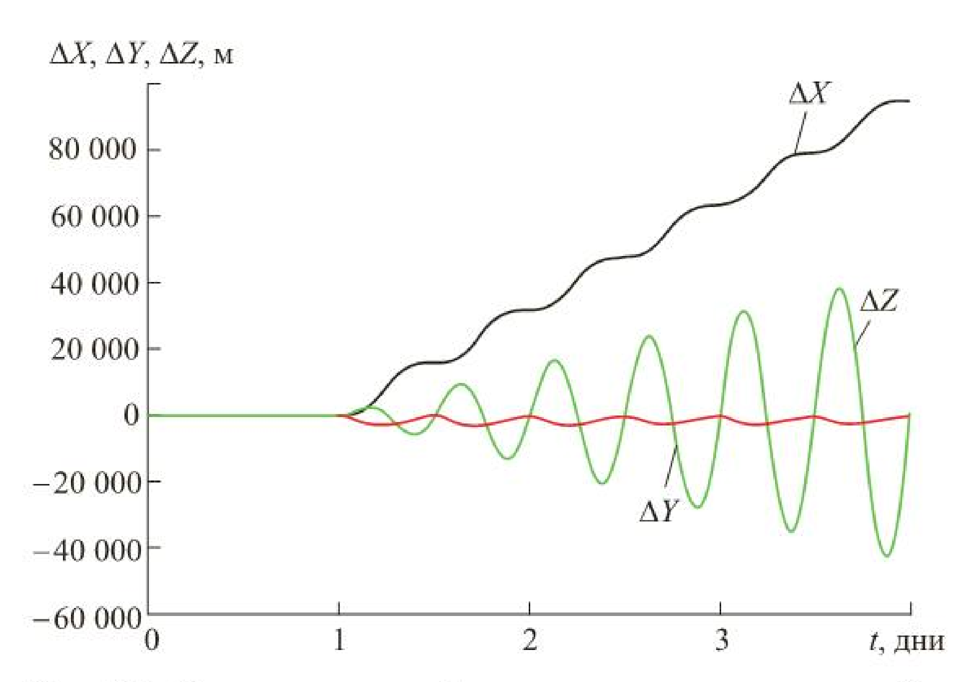


Рис. 2.2. Влияние сжатия Земли на движение высокоорбитального КА (GPS, ГЛОНАСС)

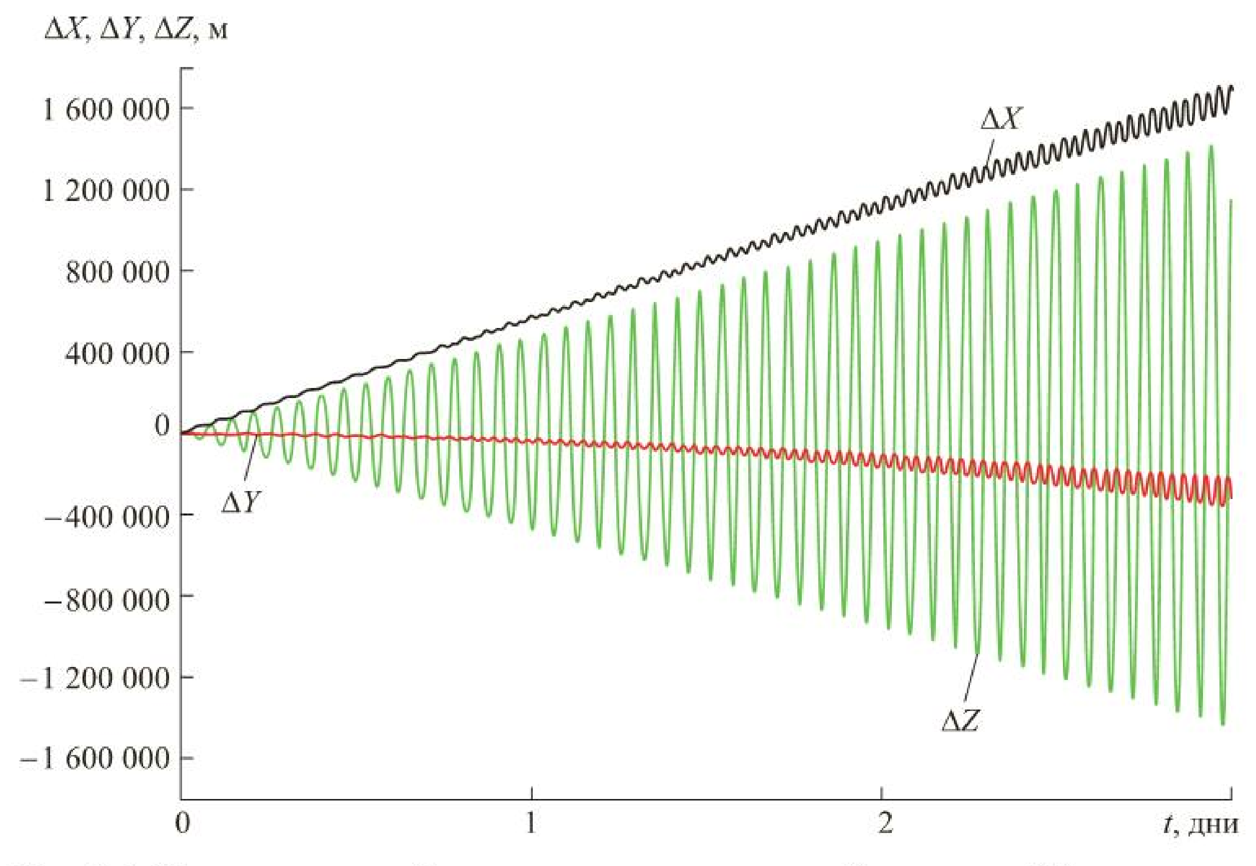


Рис. 2.3. Влияние сжатия Земли на движение низкоорбитального КА

перицентра ω и средняя аномалия M. Изменение этих параметров за один виток определяется по формулам

$$\Delta\Omega = -3\pi c_{20}\left(\frac{R_э}{p}\right)^2 \cos i;$$

$$\Delta\omega = \frac{3}{2}\pi c_{20}\left(\frac{R_э}{p}\right)^2 \left(5\cos^2 i - 1\right); \qquad (2.7)$$

$$\Delta M = \frac{3}{2}\pi c_{20}\left(\frac{R_э}{p}\right)^2 \left(3\cos^2 i - 1\right)\left(1 - e^2\right)^{1/2}.$$

В соответствии с первой из этих формул орбиты низкоорбитальных КА с наклонением ~51° прецессируют с угловой скоростью ~5 °/сут в западном направлении. Скорость прецессии орбит спутников ГЛОНАСС и GPS составляет ~0,04 °/сут в том же направлении. Другими словами, влияние сжатия Земли на орбиту КА резко уменьшается (в данном случае более чем в 100 раз) с увеличением высоты орбиты КА.

На рис. 2.2 и 2.3 показаны графики «разлета» орбит вследствие влияния сжатия Земли для высокоорбитальных и низкоорбитальных КА, из которых видно, что для высокоорбитальных КА «разлет» по продольной дальности проходит со скоростью ~30 км/сут, а по боковой дальности со скоростью ~13 км/сут. Для низкоорбитальных КА «разлет» по продольной дальности составляет 600 км/сут, а по боковой — 500 км/сут.

2.2.2. Влияние аномальной части гравитационного поля на орбитальное движение КА

Наиболее сильное влияние аномальная часть гравитационного поля Земли оказывает на движение низкоорбитальных КА. Действительно, из формулы (2.6) следует, что влияние каждой из гармоник аномальной части гравитационного поля уменьшается с расстоянием на $(R/r)^{n+2}$, и кроме того, с увеличением порядкового номера гармоники, как правило, уменьшаются и коэффициенты разложения α_{nm}, β_{nm}. Поэтому для рассматриваемых высоких орбит, радиус которых в ~4 раза больше радиуса орбит низкоорбитальных КА, влияние гравитационных аномалий часто существенно меньше, чем для низких орбит, а в ряде случаев аномальной частью просто пренебрегают.

Для низкоорбитальных КА влияние аномальной части гравитационного поля в десятки и сотни раз выше, чем для высокоорбитальных КА, и для точного решения многих навигационных задач необходимо учитывать высокие гармоники гравитационного поля вплоть до гармоник порядка 72×72 и выше (рис. 2.4–2.7).

На рис 2.4 и 2.5 показано влияние аномальной части гравитационного поля Земли на орбиты высокоорбитальных и низкоорбитальных КА.

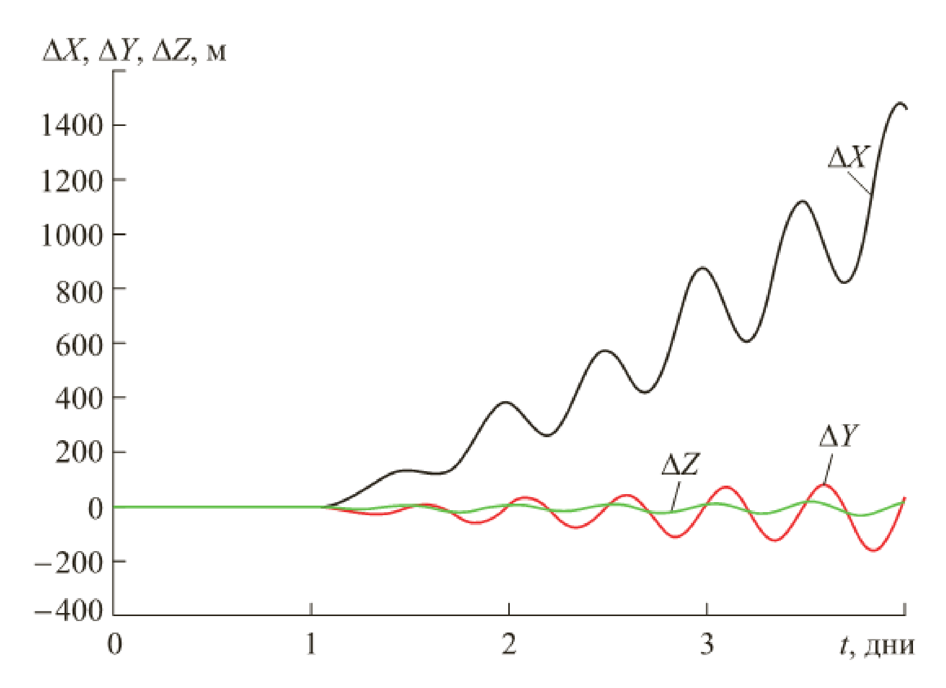


Рис. 2.4. Влияние аномальной части гравитационного поля Земли на движение высокоорбитального КА

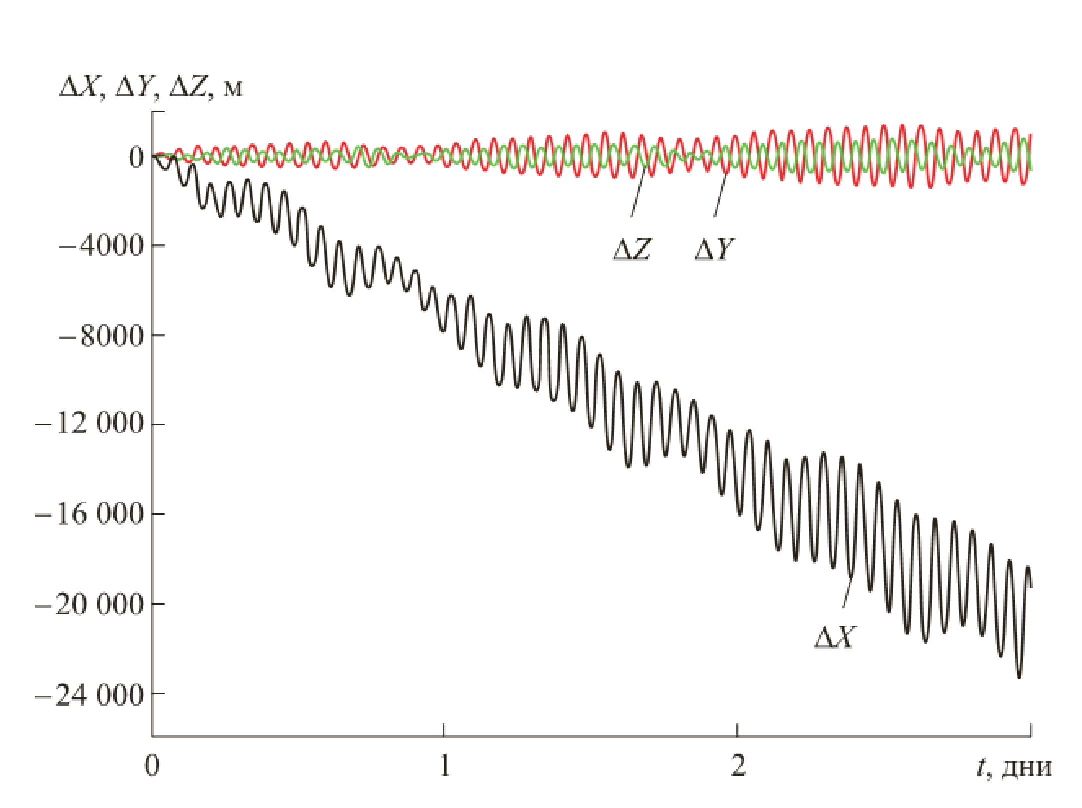


Рис. 2.5. Влияние аномальной части гравитационного поля Земли на движение низкоорбитального КА

На рис. 2.6 приведены графики возмущений орбит низкоорбитального и высокоорбитального КА от гармоник выше восьмого порядка, а на рис. 2.7 — для низкоорбитального КА от гармоник выше 36 и 72 порядка.

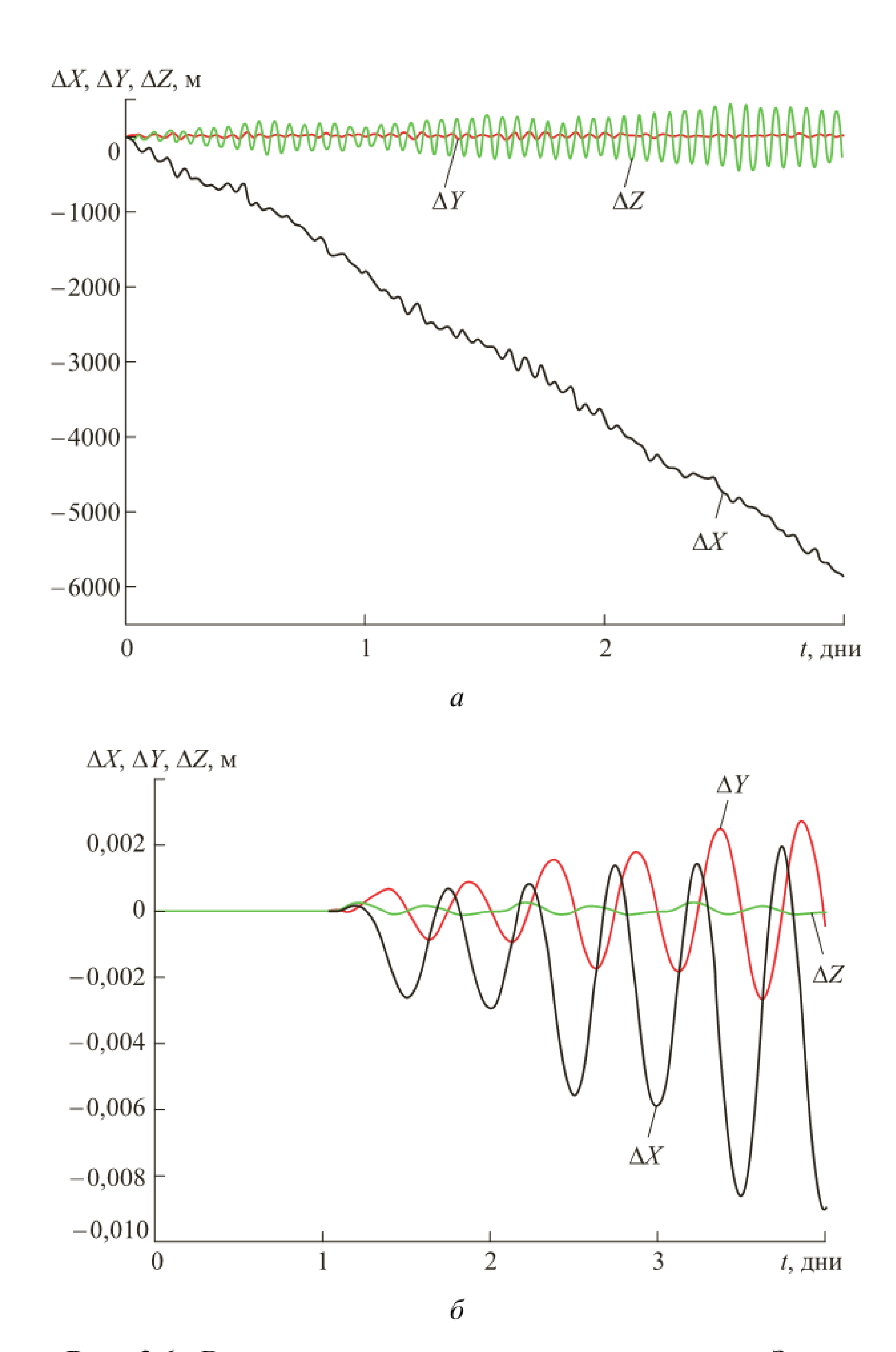


Рис. 2.6. Влияние гармоник гравитационного поля Земли выше восьмого порядка на движение низкоорбитального (*а*) и высокоорбитального КА (*б*)

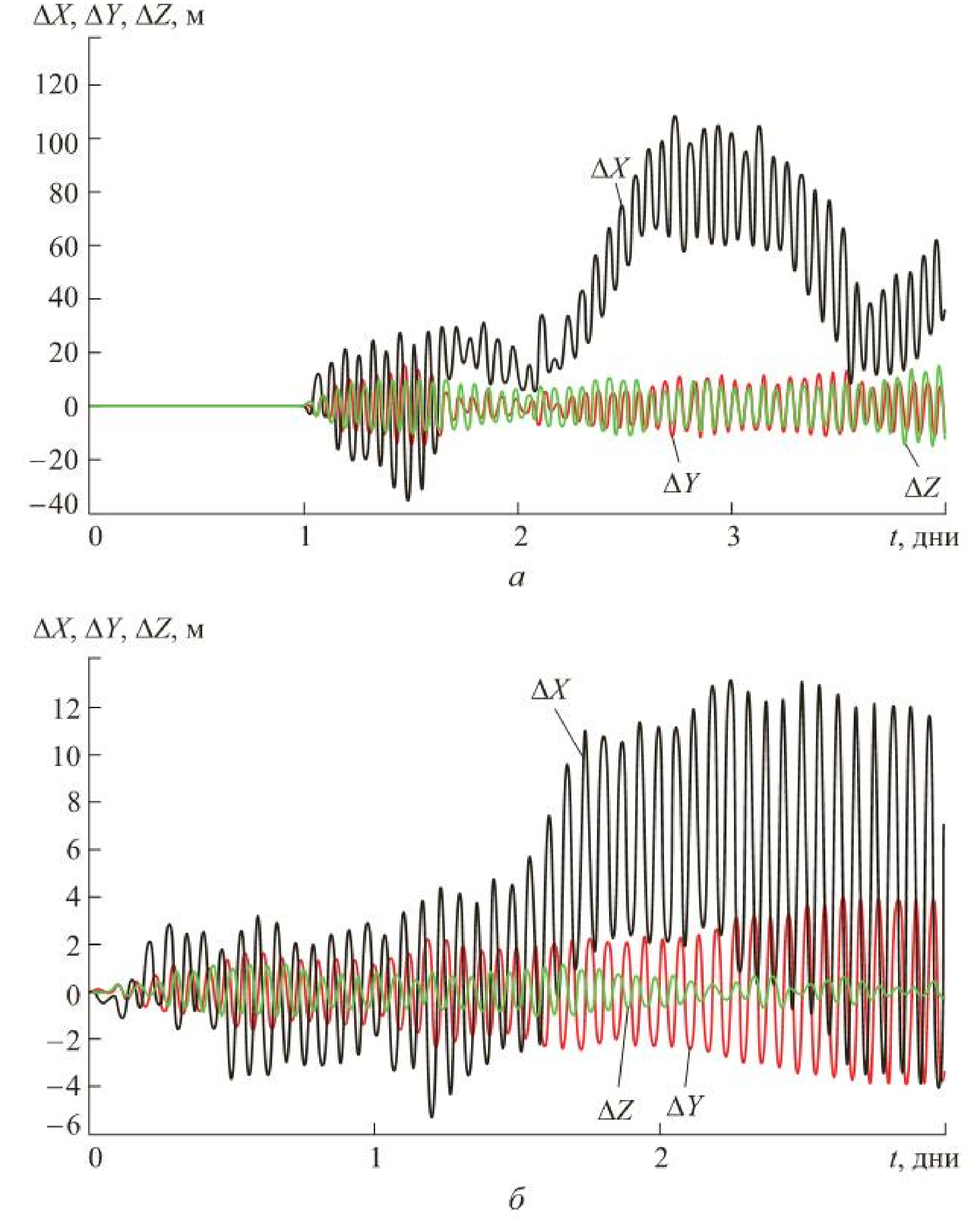


Рис. 2.7. Влияние гармоник гравитационного поля Земли выше 36 порядка (*а*) и 72 порядка (*б*) на движение низкоорбитального КА

2.2.3. Моделирование возмущений гравитационного поля Земли

Коэффициенты разложения геопотенциала Земли по сферическим функциям известны достаточно точно (до порядка ~200×200). Как отмечено ранее, знание аномальной части гравитационного поля высокого порядка необходимо для низкоорбитальных КА. Например, для моделирования движения МКС в АСН-М используется модель порядка 72×72. Особенностью реализации алгоритмов вычисления аномальной части гравитационного поля высокого порядка классическим методом разложения геопотенциала Земли в ряд по сфе-

рическим функциям является большой объем необходимых вычислений. Такие алгоритмы не могут быть реализованы на существующих бортовых вычислительных средствах с ограниченными возможностями по быстродействию. Поэтому для моделирования гравитационного поля высокого порядка на бортовых вычислительных средствах был разработан упрощенный метод, требующий, например для реализации модели порядка 72×72 в несколько сотен раз меньше вычислительных операций по сравнению с методом точного расчета. Суть данного метода заключается в следующем. Вектор гравитационного ускорения Земли может быть представлен в виде суммы векторов:

$$\bar{g}(\bar{X}) = \bar{g}_0(\bar{X}) + \Delta\bar{g}(\bar{X}),$$

где $\bar{g}_0(\bar{X})$ — составляющая вектора гравитационного поля Земли порядка 2×0; $\Delta\bar{g}(\bar{X})$ — аномальная часть гравитационного поля.

Вектор $\bar{g}_0(\bar{X})$ — основная составляющая, алгоритм расчета которой достаточно прост. Вектор $\Delta\bar{g}(\bar{X})$ для низких орбит не превышает $10^{-5}g$ и плавно меняется в некоторой окрестности вектора $\bar{X}$. Заранее рассчитав на Земле и запомнив векторы $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$ для сети точек $\bar{X}_i$, легко найти вектор $\Delta\bar{g}(\bar{X})$ для любой точки $\bar{X}$ в окрестности точек $\bar{X}_i$ путем линейной интерполяции через значения $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$. В результате для произвольной точки $\bar{X}$ компонента $\bar{g}_0(\bar{X})$ для модели порядка 2×0 вычисляется по алгоритму (2.4) и суммируется с составляющей $\Delta\bar{g}(\bar{X})$, рассчитанной линейной интерполяцией через запомненные значения $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$. Реализацию данного метода в этом случае иллюстрирует рис. 2.8. В окрестности любой точки $\bar{X}$ находится ряд точек $\bar{X}_i$, для которых в памяти вычислительного устройства хранятся значения суммарных векторов аномальной части гравитационного поля $\Delta\bar{g}_i(\bar{X}_i)$.

Пусть для текущего вектора положения $\bar{X}$ требуется определить аномальную часть гравитационного поля $\Delta\bar{g}(\bar{X})$. Для каждого запомненного вектора $\Delta\bar{g}_i(\bar{X}_i)$ в окрестности точки $\bar{X}$ можно записать уравнение

$$\Delta\bar{g}\left(\bar{X}\right) + \frac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{X}}\left(\bar{X}_i - \bar{X}\right) = \Delta\bar{g}_i\left(\bar{X}_i\right), \qquad (2.8)$$

где $\dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{X}}$ — неизвестная матрица производных вектора $\Delta\bar{g}$ в точке $\bar{X}$ по компонентам вектора $\bar{X}$.

В уравнении (2.8) неизвестными параметрами являются $\Delta\bar{g}(\bar{X})$ и $\partial\bar{g}/\partial\bar{X}$, а известными — векторы $\bar{X}$, $\bar{X}_i$, $\Delta\bar{g}_i(\bar{X}_i)$.

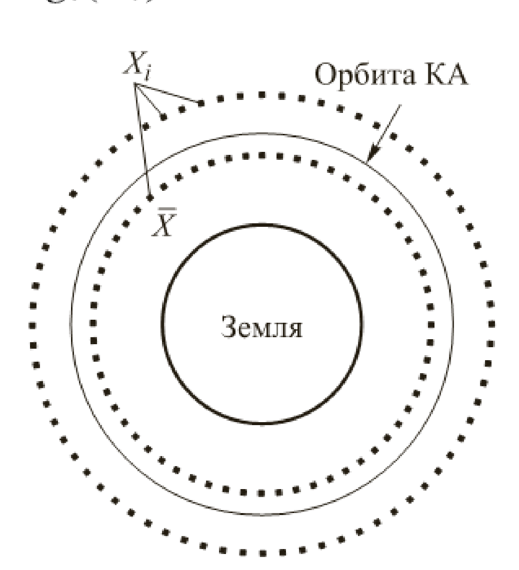


Рис. 2.8. Схема выбора точек $\bar{X}_i$, для которых запоминается аномальная составляющая вектора гравитационного ускорения Земли

Для n окрестных точек $\bar{X}_i$ вектора $\bar{X}$ можно записать n векторных уравнений для нахождения вектора $\Delta\bar{g}(\bar{X})$ и матрицы $\dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{X}}$:

$$\Delta\bar{g}_i^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_i\right)=\left[1\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\right]\begin{pmatrix}\Delta\bar{g}^{\mathrm{T}}(\bar{X})\\ \left(\dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{X}}\right)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.9)$$

$$\Delta\bar{g}_n^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_n\right)=\left[1\left(\bar{X}_n-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\right]\begin{pmatrix}\Delta g^{\mathrm{T}}(\bar{X})\\ \left(\dfrac{\partial\bar{g}}{\partial\bar{X}}\right)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

Введем следующие матрицы:

$G_0=\begin{pmatrix}\Delta\bar{g}_1^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_1\right)\\ \Delta\bar{g}_2^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_2\right)\\ \Delta\bar{g}_n^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_n\right)\end{pmatrix}$ — известная матрица размером $n\times3$;

$P=\begin{pmatrix}1\left(\bar{X}_1-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\\ 1\left(\bar{X}_2-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\\ ------\\ 1\left(\bar{X}_n-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ — известная матрица размером $n\times4$;

$G=\begin{pmatrix}\Delta\bar{g}^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}\right)\\ \dfrac{\partial\bar{g}^{\mathrm{T}}}{\partial\bar{X}}\end{pmatrix}$ — искомая неизвестная матрица размером 4×3.

С учетом введенных обозначений система уравнений (2.9) примет вид

$$G_0 = PG, \qquad (2.10)$$

тогда искомая матрица

$$G = (P^{\mathrm{T}}P)^{-1}P^{\mathrm{T}}\,G_0. \qquad (2.11)$$

Первая строка полученной матрицы G представляет собой искомый вектор аномалии гравитационного поля $\Delta\bar{g}(\bar{X})$. Просуммировав найденный вектор с основной частью гравитационного поля, формируемого по алгоритму (2.4), получим полный вектор гравитационного поля Земли в точке $\bar{X}$.

Отметим, что быстродействие рассмотренного алгоритма не зависит от порядка моделируемого гравитационного поля, поэтому его эффективнее ис-

пользовать для моделирования гравитационного поля высокого порядка, где выигрыш по быстродействию оказывается существенным. Для количественной оценки эффективности рассмотренного алгоритма было экспериментально определено время решения задачи на персональном компьютере (3 ГГц) и в бортовом навигационном процессоре АСН-М МКС. Оценивалось время вычисления вектора гравитационного ускорения для моделей различного порядка классическим методом разложения геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям и время вычисления вектора гравитационного ускорения для модели порядка 72×72 предложенным методом (*GRAV*_72×72_*turbo*). Результаты приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Время решения задачи на персональном компьютере и в бортовом процессоре АСН-М МКС, мкс

Объект решения задачи	Порядок модели							
	2×0	4×4	8×8	16×16	24×24	36×36	72×72	*GRAV*_72×72_*turbo*
Персональный компьютер МКС	0,25	1,3	3,6	11,4	24,3	55,7	223	0,8
Бортовой навигационный процессор МКС	35	182	504	1600	3400	7800	31 200	112

Из таблицы видно, что предложенный метод моделирования гравитационного поля Земли требует в ~300 раз меньше быстродействия при моделировании поля порядка 72×72 и в 1,5 раза меньше по сравнению с полем порядка 4×4. Тем не менее, этот метод является приближенным.

На рис. 2.9 приведены графики «разлета» орбит КА, моделируемых с использованием точного и предложенного методов, из которого следует, что порядок «разлета» аналогичен «разлету», обусловленному всеми неучтенными гармониками выше порядка 72×72 и не превышает 13 м за трое суток.

Значение возмущающего ускорения, обусловливающее такой «разлет», не превышает 10^{-8} м/с^2. Для МКС это возмущение имеет такой же порядок, как и все гармоники выше порядка 72×72. Обеими составляющими этих возмущений в большинстве случаев можно пренебречь.

Несмотря на то что предложенный метод моделирования гравитационного поля Земли существенно (в сотни раз) снижает объем необходимых для его реализации вычислений, необходимо запоминать значения векторов гравитационных аномалий в массиве точек $\bar{X}_i$, находящихся в окрестности всех возможных координат КА. Например, для МКС массив координат $\bar{X}_i$ задается с шагом 1° по долготе в диапазоне 0…360° и 1° по широте в диапазоне

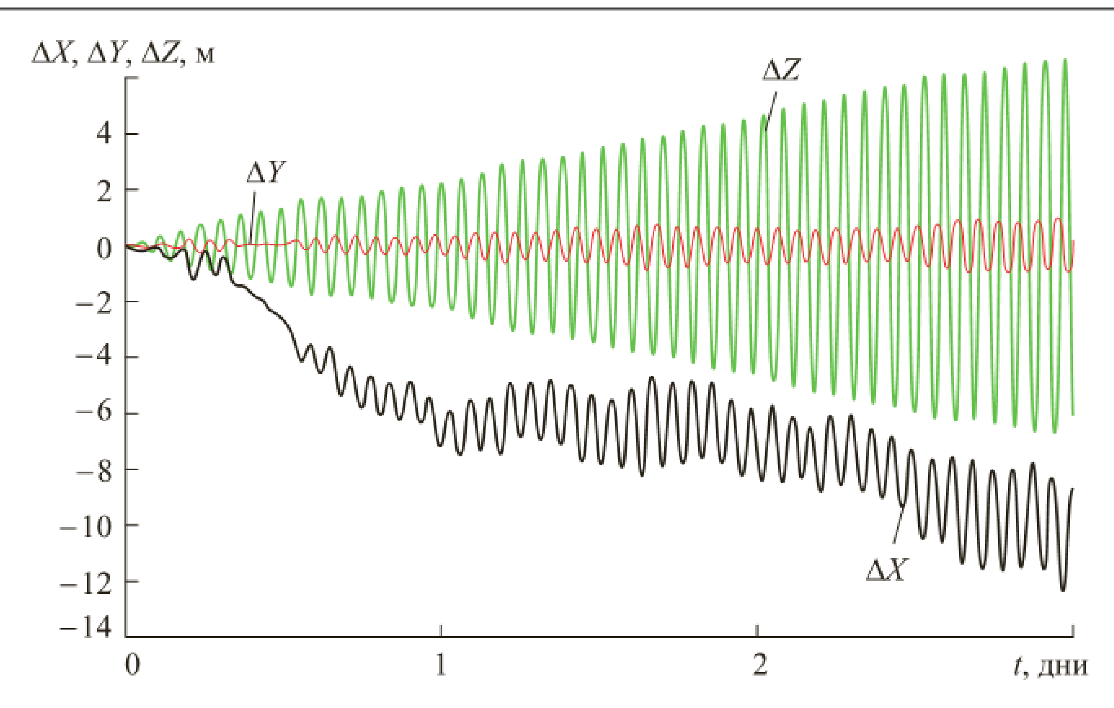


Рис. 2.9. Влияние ошибок приближенного метода на точность моделирования движения низкоорбитального КА

±52°. По высоте точки $\bar{X}_i$ задаются в двух слоях — высотой 350 и 380 км. В каждой точке три координаты вектора $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$ задаются двумя байтами на каждую координату. В результате объем запоминаемого массива $\Delta g(\bar{X}_i)$ равен $M = 360\times104\times2\times3\times2 \approx 450$ Кбайт.

Описанная выше модель гравитационного поля Земли порядка 72×72 реализована в навигационном процессоре АСН-М МКС и обеспечивает высокоточное моделирование движения МКС.

Запоминаемые координаты $\bar{X}_i$ и объем запоминаемого массива $\Delta\bar{g}(\bar{X}_i)$ зависит от типа КА и его орбиты. Например, для низкоорбитального гелиосинхронного КА объем запоминаемого массива для моделирования гравитационного поля порядка 72×72 составляет ~780 Кбайт, для геостационарного КА — 1,3 Кбайт.

2.3. Аэродинамическое возмущение орбиты КА

Аэродинамические возмущения орбит КА являются наиболее непредсказуемыми и трудно моделируемыми факторами, влияющими на движение КА. Атмосфера Земли простирается до высот ~20 000 км, однако заметное влияние оказывает только на низкоорбитальные КА с высотами орбит до ~1000 км. Аэродинамическое возмущающее ускорение зависит от плотности окружающей КА атмосферы, геометрии и ориентации КА.

Плотность атмосферы выше 100 км крайне нестабильна и зависит от многих факторов, основными из которых являются высота над поверхностью Земли, освещенность Солнцем и солнечная активность. Последний фактор, существенно влияя на плотность атмосферы, обычно плохо прогнозируем,

что сильно затрудняет создание универсальной модели плотности атмосферы. Зависимость плотности атмосферы от вышеперечисленных факторов частично отражают данные, приведенные в табл 2.3.

Таблица 2.3

Ночные и дневные плотности для минимума и максимума солнечной активности, кг/м^3

Высота h, км	Минимум солнечной активности		Максимум солнечной активности	
	4 ч (ночь)	14 ч (день)	4 ч (ночь)	14 ч (день)
120	$2{,}49\cdot10^{-8}$	$2{,}49\cdot10^{-8}$	$2{,}49\cdot10^{-8}$	$2{,}49\cdot10^{-8}$
140	$4{,}2\cdot10^{-9}$	$4{,}08\cdot10^{-9}$	$3{,}84\cdot10^{-9}$	$3{,}71\cdot10^{-9}$
160	1,19	1,19	1,41	1,37
180	$4{,}19\cdot10^{-10}$	$4{,}69\cdot10^{-10}$	$6{,}81\cdot10^{-10}$	$6{,}82\cdot10^{-10}$
200	1,69	2,20	3,76	3,98
220	$7{,}57\cdot10^{-11}$	1,15	2,25	2,55
240	3,66	$6{,}46\cdot10^{-11}$	1,42	1,73
260	1,88	3,83	1,09	1,22
280	1,02	2,37	$6{,}28\cdot10^{-11}$	$8{,}89\cdot10^{-11}$
300	$5{,}72\cdot10^{-12}$	1,51	4,35	6,63
320	3,30	$9{,}89\cdot10^{-12}$	3,03	5,03
340	1,95	6,61	2,20	3,87
360	1,17	4,49	1,60	3,02
380	$7{,}17\cdot10^{-13}$	3,10	1,18	2,38
400	4,43	2,16	$8{,}80\cdot10^{-12}$	1,89
420	2,78	1,53	6,62	1,51
440	1,76	1,09	5,03	1,22
460	1,13	$7{,}77\cdot10^{-13}$	3,84	$9{,}91\cdot10^{-12}$
480	$7{,}35\cdot10^{-14}$	5,60	2,91	8,10
500	4,87	4,06	2,30	6,65
520	3,29	2,96	1,79	5,50
540	2,28	2,17	1,40	4,56
560	1,62	1,61	1,10	3,80

Окончание табл. 2.3

Высота h, км	Минимум солнечной активности		Максимум солнечной активности	
	4 ч (ночь)	14 ч (день)	4 ч (ночь)	14 ч (день)
580	1,19	1,19	$8{,}70 \cdot 10^{-13}$	3,18
600	$8{,}98 \cdot 10^{-15}$	$8{,}91 \cdot 10^{-14}$	6,90	2,67
620	6,98	6,71	5,49	2,25
640	5,60	5,09	4,38	1,90
660	4,60	3,90	3,51	1,61
680	3,85	3,01	2,82	1,37
700	3,28	2,35	2,28	1,17
720	2,84	1,86	1,84	$9{,}98 \cdot 10^{-13}$
740	2,48	1,48	1,49	8,35
760	2,19	1,20	1,21	7,34
780	1,94	$9{,}86 \cdot 10^{-15}$	$9{,}91 \cdot 10^{-14}$	6,31
800	$1{,}74 \cdot 10^{-15}$	8,19	8,12	5,44

На высотах более 200 км КА испытывает сопротивление атмосферы, которое можно найти по формуле

$$R_x = C_x \frac{\rho \vartheta^2}{2} S_{\text{м}}, \tag{2.12}$$

где C_x — безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления; ρ — плотность атмосферы в рассматриваемой точке орбиты; ϑ — скорость полета относительно атмосферы; $S_{\text{м}}$ — площадь миделевого сечения, определяемая как площадь проекции КА на плоскость, перпендикулярную направлению скорости полета.

Для расчета аэродинамического ускорения необходимо вычислить плотность атмосферы ρ в данной точке, используя какую-либо модель атмосферы Земли. В настоящее время разработано множество моделей атмосферы различной сложности и точности. Одной из наиболее полных моделей является модель, приведенная на сайте Community Coordinated Modeling Center. Если определена плотность атмосферы, плоскость миделевого сечения и коэффициент аэродинамического сопротивления, то аэродинамическое ускорение КА можно найти по формуле

$$a_{aero} = \frac{R_x}{m}, \tag{2.13}$$

где m — масса КА.

Равенство (2.13) может быть представлено также в виде

$$a_{aero} = b\frac{\rho\vartheta^2}{2}, \tag{2.14}$$

где $b = \dfrac{C_x S_\mu}{m}$ — баллистический коэффициент.

Во многих случаях баллистический коэффициент определяют опытным путем в процессе проведения навигационных измерений. Часто он является медленно меняющимся, например при постоянной орбитальной ориентации КА. Даже если в процессе полета солнечные батареи КА отслеживают Солнце, то в среднем за виток баллистический коэффициент останется постоянным. Поэтому определив его, можно достаточно точно прогнозировать движение КА с учетом аэродинамического торможения. В качестве примера приведем значения аэродинамического ускорения МКС, находящейся на орбите высотой 350…380 км. В зависимости от текущей высоты орбиты, а также от активности Солнца в дежурной ориентации среднее аэродинамическое ускорение МКС составляет $(0{,}5\ldots0{,}9)\cdot10^{-6}$ м/с^2. Такое ускорение сильно влияет на орбиту МКС, обусловливая уменьшение высоты орбиты.

На рис. 2.10 приведен график влияния аэродинамического торможения МКС на параметры ее орбиты, из которого видно, что при достаточно малом аэродинамическом торможении ($\sim5\cdot10^{-7}$ м/с^2) уход КА по продольной дальности за трое суток составляет ~50 км, что соизмеримо с влиянием на продольную дальность второй зональной гармоники (C_{20}), обусловленной сжатием Земли (см. рис. 2.2).

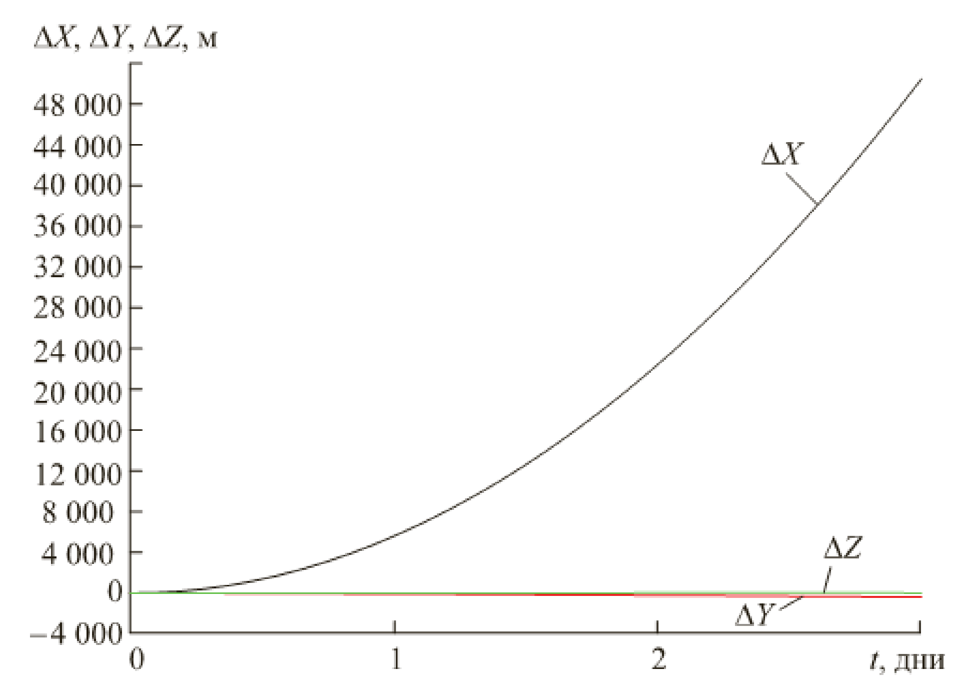


Рис. 2.10. Влияние аэродинамического торможения на прогноз орбиты МКС

Учитывая широкий диапазон изменения плотности атмосферы из-за влияния активности Солнца, аэродинамическое возмущение орбиты КА должно учитываться для орбит высотой до 1000 км. Действительно, как следует из табл. 2.3, плотность дневной атмосферы при максимуме солнечной активности на высоте 800 км превышает плотность ночной атмосферы при минимуме солнечной активности на высоте 400 км.

Существует много различных моделей атмосферы, формирующих на выходе ее параметры, например модель плотности атмосферы в текущей точке траектории NRLMSISE-00, являющейся Международным стандартом атмосферы для космических исследований.

2.4. Возмущения, обусловленные гравитационным воздействием на КА Луны, Солнца и других планет

На движение орбитальных КА существенное влияние оказывают другие небесные тела, наиболее сильное — Луна и Солнце. Влиянием планет, как правило, можно пренебречь. Определим зависимость возмущающих ускорений от положения и массы возмущающего тела на примере гравитационного влияния Луны.

Пусть $\bar{X}_{КА}$ и $\bar{X}_{Л}$ — векторы координат КА и Луны в геоцентрической системе координат (рис. 2.11).

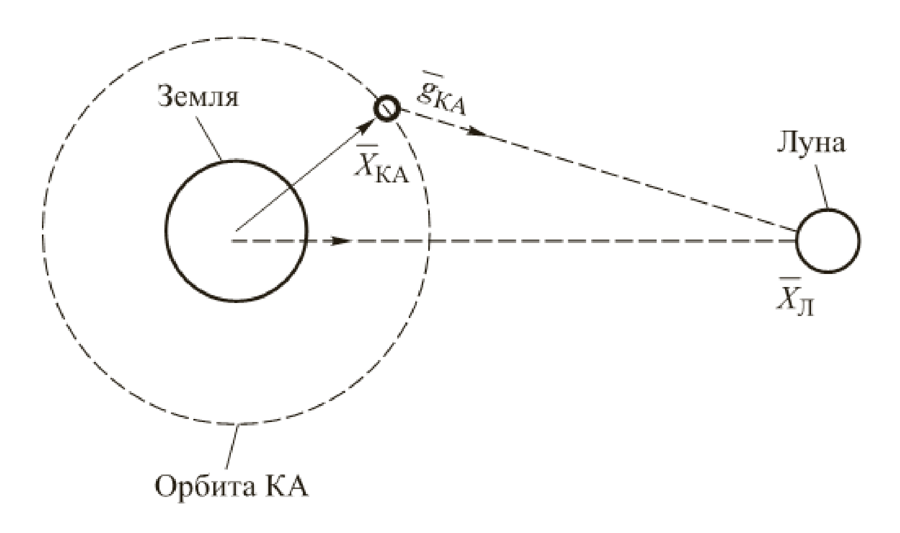


Рис. 2.11. Гравитационное влияние Луны на движение КА

Тогда ускорение Земли, обусловленное гравитационным влиянием Луны, будет

$$\bar{g}_{З} = \frac{\mu_{Л}}{\left|\bar{X}_{Л}\right|^3}\bar{X}_{Л}, \tag{2.15}$$

где $\mu_{Л}$ — гравитационная постоянная Луны.

Ускорение КА, обусловленное гравитационным влиянием Луны

$$\bar{g}_{КА} = \frac{\mu_{Л}}{\left|\bar{X}_{Л} - \bar{X}_{КА}\right|^3}\left(\bar{X}_{Л} - \bar{X}_{КА}\right). \tag{2.16}$$

Гравитационное ускорение КА относительно системы координат, связанной с Землей (см. рис. 2.11) будет

$$\bar{g}_{GR\,Л} = \bar{g}_{КА} - \bar{g}_{З} = \mu_{Л}\left(\frac{\left(\bar{X}_{Л} - \bar{X}_{КА}\right)}{\left|\bar{X}_{Л} - \bar{X}_{КА}\right|^3} - \frac{\bar{X}_{Л}}{\left|\bar{X}_{Л}\right|^3}\right). \tag{2.17}$$

Аналогично можно определить гравитационное возмущение от Солнца.

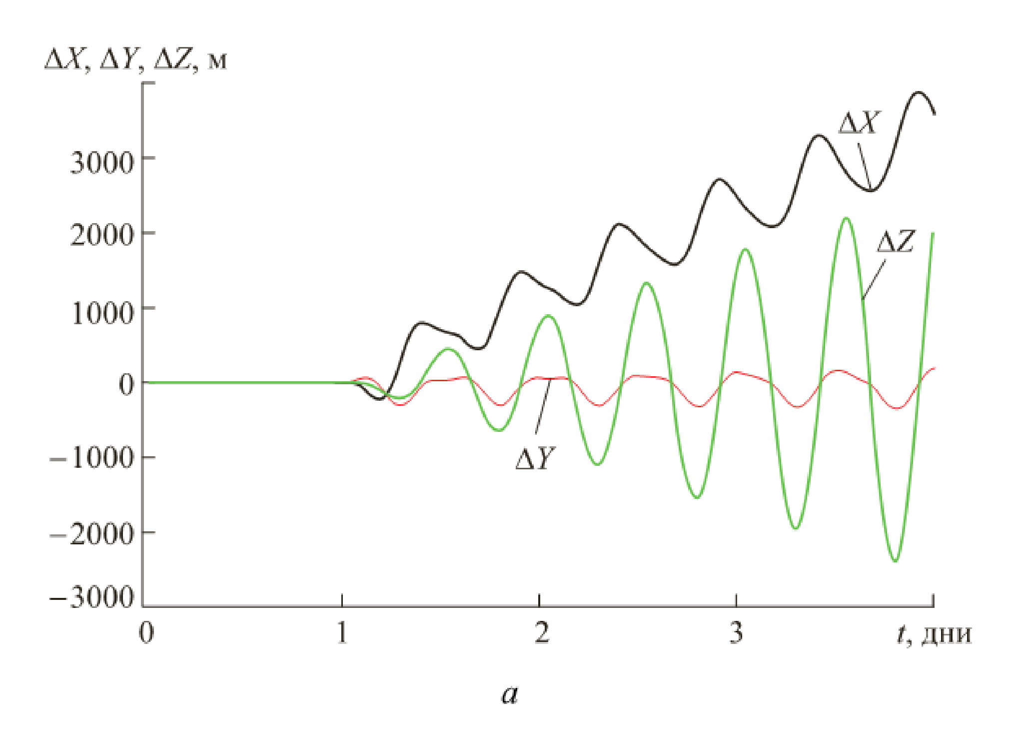
Для нахождения гравитационного возмущения от Луны и Солнца требуется знать их координаты относительно выбранной гелиоцентрической системы координат, например, относительно ИСК или ГСК. В настоящее время в Интернете можно найти алгоритмы и программы расчета координат Луны и Солнца относительно ИСК с разной степенью точности.

На рис. 2.12 приведены графики «разлета» орбит КА GPS вследствие гравитационного воздействия Луны и Солнца, из которых видно, что за трое суток вследствие влияния Луны орбита уходит на 4 км по продольной дальности и на 2 км по боковой (из-за поворота плоскости орбиты). А из-за влияния Солнца орбита уходит на 1 км по продольной дальности и на 1,2 км по боковой.

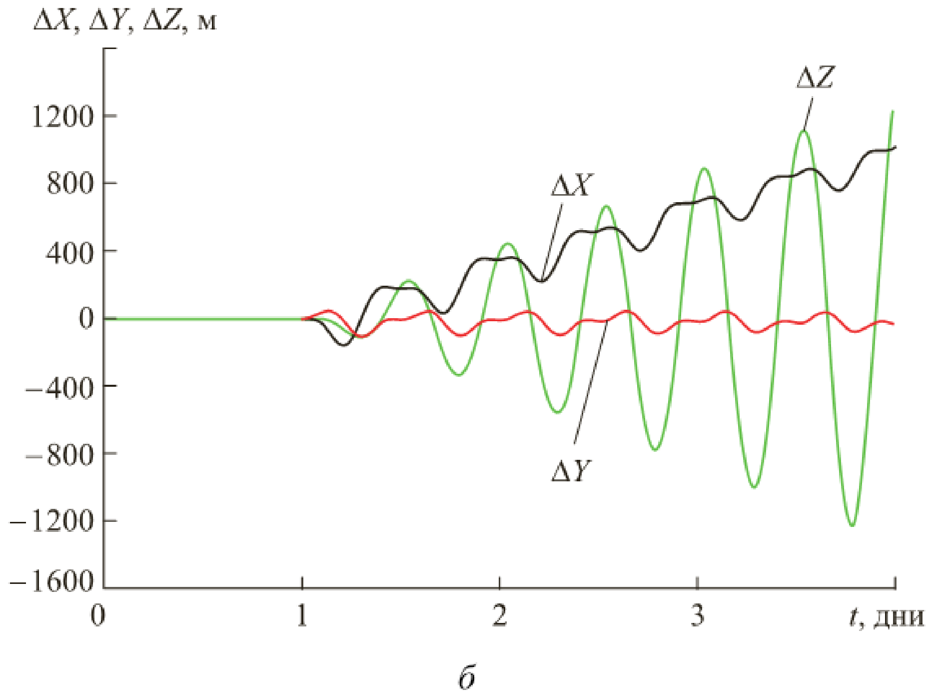
На рис. 2.13 и 2.14 приведены графики «разлета» орбиты МКС вследствие гравитационного воздействия Луны и Солнца, из которых следует, что за трое суток из-за влияния Луны орбита МКС уходит на 400 м по продольной дальности и на 75 м по боковой дальности, а из-за влияния Солнца — на 100 м по продольной дальности и на 40 м по боковой.

Приведенные примеры показывают, что Луна и Солнце значительно влияют на орбиту КА. Во многих случаях в модели движения КА необходимо учитывать эти возмущающие ускорения, определяемые по формуле (2.17), для чего необходимо знать векторы координат Луны $\bar{X}_{Л}$ и Солнца $\bar{X}_{С}$ в геоцентрической системе координат. Сегодня существует много алгоритмов разной степени сложности и точности вычисления этих векторов на заданный момент времени. Например, достаточно приближенные алгоритмы приведены в Интерфейсном контрольном документе (ИКД) ГЛОНАСС. В Интернете также можно найти программные функции, формирующие $\bar{X}_{Л}$ и $\bar{X}_{С}$ с высокой точностью. Однако все эти функции требуют значительных вычислительных ресурсов и не могут быть реализованы в реальном времени на бортовых вычислительных средствах.

Рассмотрим метод формирования векторов $\bar{X}_{Л}$ и $\bar{X}_{С}$ в геоцентрической системе координат, требующий для своей реализации в десятки раз меньше вычислительных ресурсов по сравнению с существующими алгоритмами высокоточного прогноза координат Луны и Солнца, но не уступающий им по точности.



а



б

Рис. 2.12. Влияние гравитационных возмущений от Луны (*а*) и Солнца (*б*) на движение высокоорбитального КА

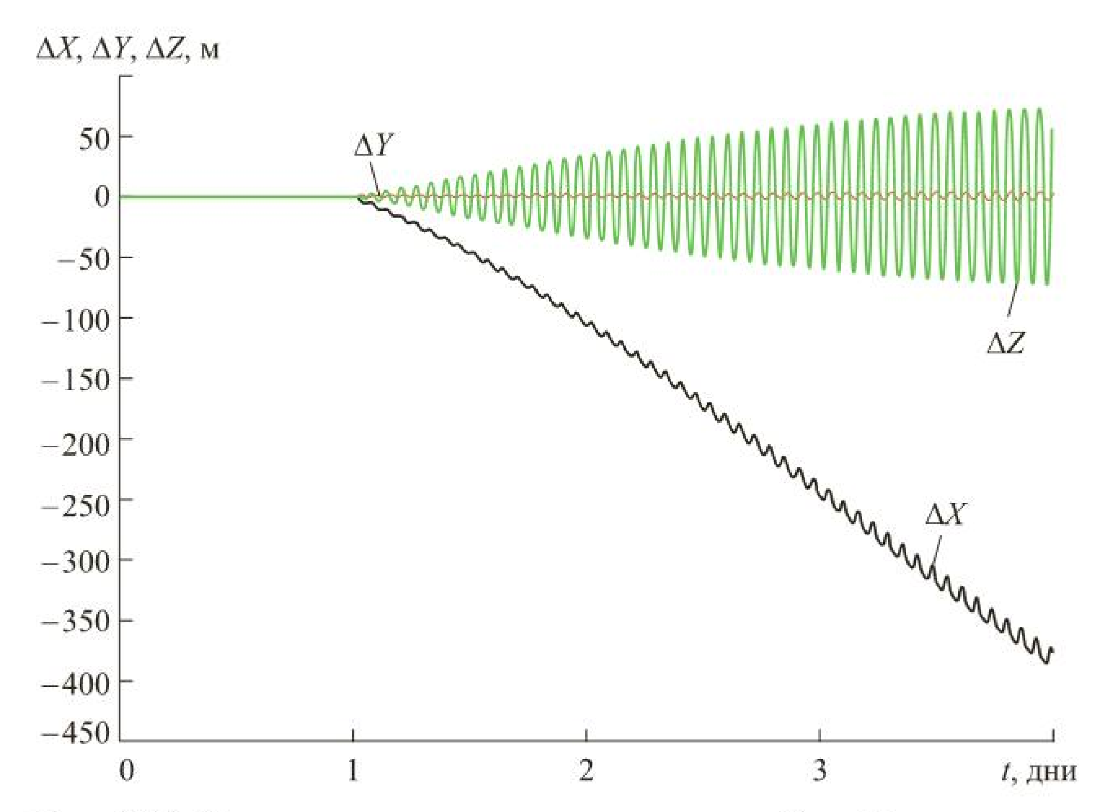


Рис. 2.13. Влияние гравитационных возмущений от Луны на движение низкоорбитального КА

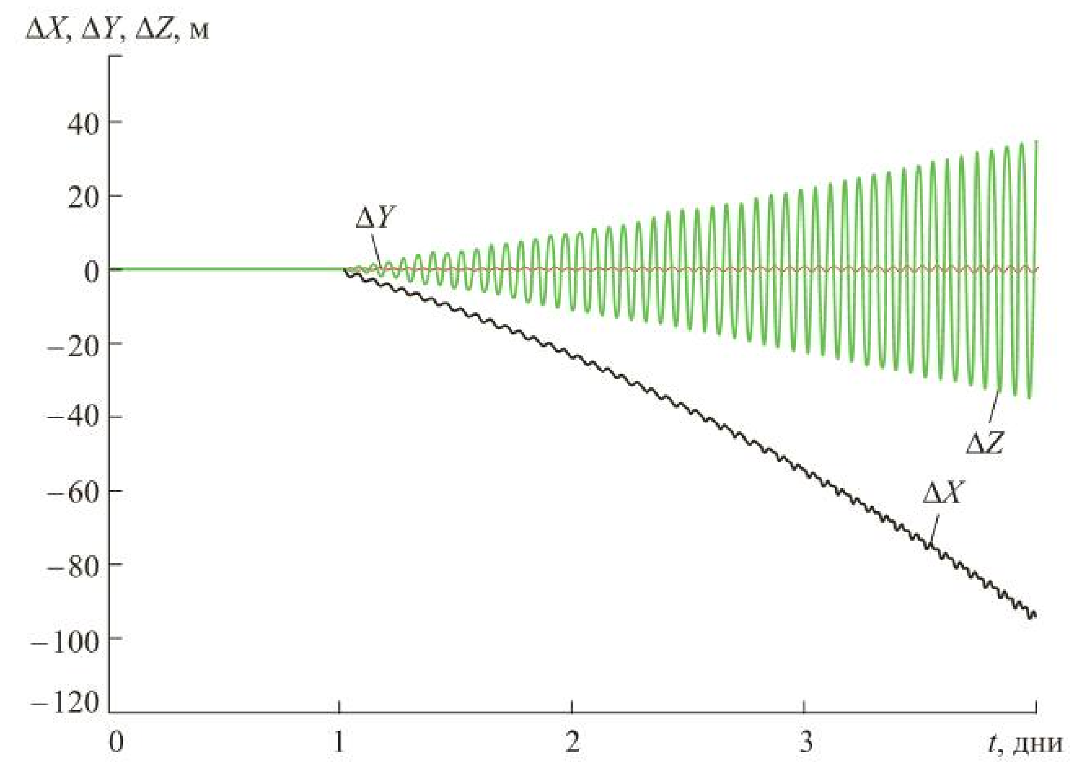


Рис. 2.14. Влияние гравитационных возмущений от Солнца на движение низкоорбитального КА

Земля и Луна вращаются относительно их общего центра масс. Пусть начало ИСК X_0, Y_0, Z_0 расположено в общем центре масс Земли и Луны (рис. 2.15). Пусть также векторы $\bar{X}_З$, $\bar{X}_Л$, $\bar{X}_С$ — векторы центров соответственно Земли, Луны и Солнца в этой системе координат. Запишем уравнения движения Луны и Земли в предположении центральности гравитационного поля Земли и Луны без учета возмущающих ускорений:

$$\ddot{X}_Л = -\frac{\mu_З}{\left|\left(\bar{X}_Л - \bar{X}_З\right)\right|^3}\left(\bar{X}_Л - \bar{X}_З\right); \quad \ddot{X}_З = -\frac{\mu_Л}{\left|\left(\bar{X}_З - \bar{X}_Л\right)\right|^3}\left(\bar{X}_З - \bar{X}_Л\right), \qquad (2.18)$$

где $\mu_З, \mu_Л$ — гравитационные постоянные Земли и Луны.

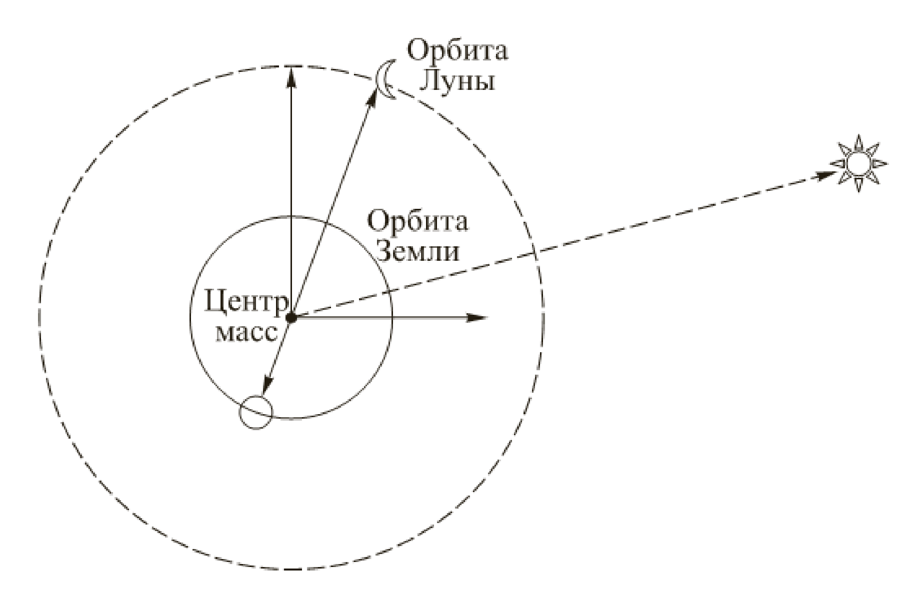


Рис. 2.15. Схема движения общего центра масс Земля — Луна вокруг Солнца

Уравнения (2.18) представляют собой уравнения невозмущенного движения Луны и Земли.

Оценим порядок основных возмущающих ускорений, обусловленных разными возмущающими факторами. Основным из таких возмущений является гравитационное возмущение от Солнца. В соответствии с формулой (2.17) возмущающие ускорения от Солнца, действующие на движение Луны и Земли, будут иметь вид

$$g_{С-Л} = \mu_С\left(\frac{\left(\bar{X}_С - \bar{X}_Л\right)}{\left|\bar{X}_С - \bar{X}_Л\right|^3} - \frac{\bar{X}_С}{\left|\bar{X}_С\right|^3}\right);$$

$$g_{С-З} = \mu_С\left(\frac{\left(\bar{X}_C - \bar{X}_З\right)}{\left|\bar{X}_C - \bar{X}_З\right|^3} - \frac{\bar{X}_С}{\left|\bar{X}_С\right|^3}\right), \qquad (2.19)$$

где $\mu_С$ — гравитационная постоянная Солнца.

Легко найти порядок возмущений, определяемых соотношением (2.19): для Луны он определяется из выражения

$$g_{\text{С–Л}} \approx \frac{2\mu_{\text{С}}}{\bar{X}_{\text{С}}^2} \frac{\left|\bar{X}_{\text{Л}}\right|}{\left|\bar{X}_{\text{С}}\right|} \approx 3 \cdot 10^{-5}\,\text{м/с}^2. \tag{2.20}$$

Второй по значимости составляющей, возмущающей орбиту Луны, является гравитационное возмущение, обусловленное сжатием Земли. Порядок этой составляющей определяется формулами (2.4) и имеет вид

$$a \approx \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_e^2}{\left|\bar{X}_{\text{Л}}\right|^4} \approx 10^{-9}\,\text{м/с}^2. \tag{2.21}$$

Другими словами, возмущение, обусловленное сжатием Земли, на четыре порядка меньше гравитационного возмущения от Солнца. Поэтому будем пренебрегать всеми возмущениями, влияющими на движение Луны кроме гравитационного возмущения от Солнца, с учетом которого уравнения движения Луны и Земли (2.18) будут следующие:

$$\begin{aligned}
\ddot{\bar{X}}_{\text{Л}} &= -\frac{\mu_{\text{З}}}{\left|\bar{X}_{\text{Л}} - \bar{X}_{\text{З}}\right|^3}\left(\bar{X}_{\text{Л}} - \bar{X}_{\text{З}}\right) + \mu_{\text{С}}\left(\frac{\bar{X}_{\text{С}} - \bar{X}_{\text{Л}}}{\left|\bar{X}_{\text{С}} - \bar{X}_{\text{Л}}\right|^3} - \frac{\bar{X}_{\text{С}}}{\left|\bar{X}_{\text{С}}\right|^3}\right); \\
\ddot{\bar{X}}_{\text{З}} &= -\frac{\mu_{\text{Л}}}{\left|\bar{X}_{\text{Л}} - \bar{X}_{\text{З}}\right|^3}\left(\bar{X}_{\text{З}} - \bar{X}_{\text{Л}}\right) + \mu_{\text{С}}\left(\frac{\bar{X}_{\text{С}} - \bar{X}_{\text{З}}}{\left|\bar{X}_{\text{С}} - \bar{X}_{\text{З}}\right|^3} - \frac{\bar{X}_{\text{С}}}{\left|\bar{X}_{\text{С}}\right|^3}\right).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Рассмотрим движение Луны относительно Земли, т. е. относительно ИСК, начало которой установлено в центре масс Земли.

В новой системе координат векторы $\bar{X}_{\text{Л}}$ и $\bar{X}_{\text{С}}$ будут

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{0\,\text{Л}} &= \bar{X}_{\text{Л}} - \bar{X}_{\text{З}}; \\
\bar{X}_{0\,\text{С}} &= \bar{X}_{\text{С}} - \bar{X}_{\text{З}}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Вычитая из первого уравнения системы (2.22) второе с учетом равенств (2.23), получим уравнение движения Луны в ИСК с началом в центре масс Земли:

$$\ddot{\bar{X}}_{0\,\text{Л}} = -\frac{\mu_{\text{З}} + \mu_{\text{Л}}}{\left|\bar{X}_{0\,\text{Л}}\right|^3}\bar{X}_{0\,\text{Л}} + \mu_{\text{С}}\left(\frac{\bar{X}_{0\,\text{С}} - \bar{X}_{0\,\text{Л}}}{\left|\bar{X}_{0\,\text{С}} - \bar{X}_{0\,\text{Л}}\right|^3} - \frac{\bar{X}_{0\,\text{С}}}{\left|\bar{X}_{0\,\text{С}}\right|^3}\right). \tag{2.24}$$

Для описания движения общего центра масс Земли и Луны вокруг Солнца можно записать следующее уравнение:

$$\ddot{\bar{X}}_{\text{С}} = -\frac{\mu_{\text{С}} + \mu_{\text{З}} + \mu_{\text{Л}}}{\left|\bar{X}_{\text{С}}\right|^3}\bar{X}_{\text{С}}. \tag{2.25}$$

Уравнения (2.24) и (2.25) с достаточно высокой точностью описывают изменение во времени векторов $\bar{X}_{0\,\text{С}}$ и $\bar{X}_{0\,\text{Л}}$ в ИСК. Если в некоторый начальный момент времени t_0 известны векторы $\bar{X}_{0\,\text{С}}$ и $\dot{\bar{X}}_{0\,\text{Л}}$, то из соотношений (2.23) легко получить значение векторов $\bar{X}_{\text{С}}$ и $\dot{\bar{X}}_{\text{С}}$ на этот момент времени:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\text{С}} &= \bar{X}_{0\,\text{С}} + \bar{X}_{\text{З}} = \bar{X}_{0\,\text{С}} - \frac{\mu_{\text{Л}}}{\mu_{\text{Л}} + \mu_{\text{З}}} \bar{X}_{0\,\text{Л}}; \\ \dot{\bar{X}}_{\text{С}} &= \dot{\bar{X}}_{0\,\text{С}} - \frac{\mu_{\text{Л}}}{\mu_{\text{З}} + \mu_{\text{Л}}} \dot{\bar{X}}_{0\,\text{Л}}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Интегрируя уравнение (2.25), с достаточно высокой точностью можно сформировать вектор $\bar{X}_{\text{С}}$, из которого легко получить вектор $\bar{X}_{0\,\text{С}}$ по формуле

$$\bar{X}_{0\,\text{С}} = \bar{X}_{\text{С}} + \frac{\mu_{\text{Л}}}{\mu_{\text{Л}} + \mu_{\text{З}}} \bar{X}_{0\,\text{Л}}. \tag{2.27}$$

Подставляя вектор $\bar{X}_{0\,\text{С}}$ в правую часть уравнения (2.24) и интегрируя это уравнение, можно сформировать вектор $\bar{X}_{0\,\text{Л}}$.

На сайте МСВЗ можно найти программную функцию на языке С++, определяющую координаты Луны и Солнца в ИСК *J*2000 в соответствии с рассмотренным выше алгоритмом.

Формирование начальных векторов Луны и Солнца в бортовом процессоре требует около 4 мс. Для процессора, решающего на секундном цикле сотни разных задач, в том числе и более приоритетных, 4 мс представляют собой недопустимо большое значение. Применение предложенного метода позволяет сократить время решения задачи на секундном шаге более чем в 40 раз и практически решает проблему быстродействия вычислений.

После формирования векторов координат Луны $\bar{X}_{0\,\text{Л}}$ и Солнца $\bar{X}_{0\,\text{С}}$ по формуле (2.17) находят векторы гравитационного возмущения от Луны и Солнца в ИСК. При необходимости из ИСК эти векторы могут быть преобразованы в ГСК с помощью функций перехода из *J*2000 в ГСК, рассмотренных в 1.3.

Данный метод формирования векторов гравитационных возмущений от Луны и Солнца является приближенным. В первоначальный момент его точность соответствует точности метода, используемого при инициализации. Далее в процессе интегрирования уравнений (2.24) и (2.25) возникает ошибка, которая со временем возрастает из-за накапливающихся ошибок интегрирования. Представляет интерес интервал времени, на котором предложенный метод работает с достаточной точностью, которая в соответствии с определением, изложенным в гл. 2, составляет $2 \cdot 10^{-9}$ м/с^2.

На рис. 2.16, 2.17 показаны ошибки координат Луны и Солнца в ОСК, формируемых предложенным методом на интервале один месяц. Из приведенных графиков видно, что в течение месяца ошибки координат Луны в ОСК не превышают 8 км, ошибки координат Солнца — 600 км.

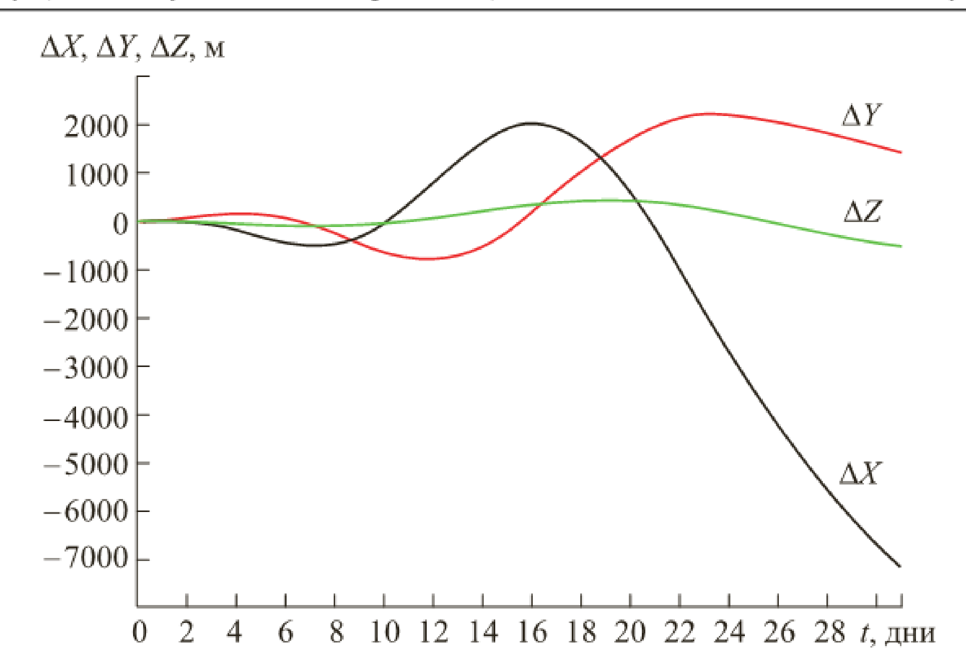


Рис. 2.16. Ошибки прогноза координат Луны

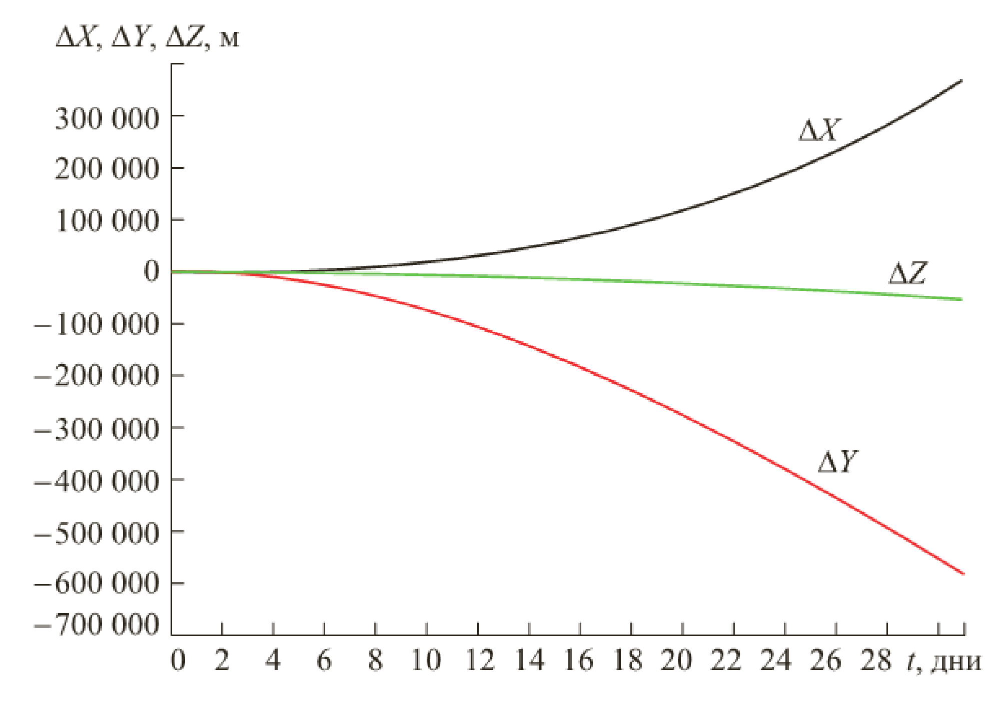


Рис. 2.17. Ошибки прогноза координат Солнца

Ошибки формирования координат Луны и Солнца приводят соответственно к ошибкам гравитационного возмущения, максимальное значение которых определяется соотношениями

$$|\Delta a_{\text{Л}}| = 6|\bar{a}_{\text{Л}}|\frac{|\Delta\bar{X}_{\text{Л}}|}{r_{\text{Л}}}; \quad |\Delta a_{\text{С}}| = 6|\bar{a}_{\text{С}}|\frac{|\Delta\bar{X}_{\text{С}}|}{r_{\text{С}}}, \tag{2.28}$$

где $\Delta\bar{X}_{\text{Л}}$, $\Delta\bar{X}_{\text{С}}$ — ошибки векторов Луны и Солнца; $r_{\text{Л}}$, $r_{\text{С}}$ — расстояния от Земли до Луны и Солнца; $\bar{a}_{\text{Л}}$, $\bar{a}_{\text{С}}$ — векторы гравитационных возмущений от Луны и Солнца.

С учетом значений модулей векторов $|\bar{a}_Л|$ и $|\bar{a}_С|$, а также средних расстояний от Земли до Луны и Солнца, определим максимальные значения ошибок гравитационных возмущений:

$$|\Delta\bar{a}_Л| < 6\cdot 4\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,\frac{8\,\text{км}}{400\ 000\ \text{км}} \approx 0{,}5\cdot 10^{-9}\,\text{м/с}^2;$$
$$|\Delta\bar{a}_С| < 6\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,\frac{600\,\text{км}}{150\ 000\ 000\,\text{км}} \approx 0{,}2\cdot 10^{-10}\,\text{м/с}^2. \qquad (2.29)$$

Таким образом, предложенный метод формирования гравитационного воздействия на КА и соответствующая ему программная функция на интервале один месяц обеспечивают формирование соответствующих возмущений с заведомо более высокой точностью, чем $2\cdot 10^{-9}$м/с^2. Это означает, что разработанная функция формирования гравитационных возмущений от Луны и Солнца может, по крайней мере, месяц работать непрерывно без промежуточной инициализации, обеспечивая высокую точность формируемых возмущающих ускорений. При этом время формирования очередного значения вектора возмущения приблизительно в 40 раз меньше времени формирования такого вектора при использовании классических методов расчета с аналогичной точностью.

Кроме Луны и Солнца на движение КА также оказывают влияние и планеты. Для КА, находящихся на орбитах Земли, из всех планет максимальное возмущение оказывает Венера в основном на тех интервалах времени, когда расстояние между Венерой и Землей не превышает 0,5 а. е. Ориентировочные значения гравитационных возмущений орбитальных КА для этих интервалов времени приведены в табл. 2.1, из которой следует, что эти возмущения на несколько порядков меньше возмущений от Луны и Солнца и в большинстве случаев ими можно пренебречь. Однако при рассмотрении межорбитальных перелетов может возникнуть необходимость учета влияния не только Венеры, но и других планет.

2.5. Возмущения орбиты КА под воздействием сил солнечного давления

Одной из основных составляющих возмущений орбиты КА являются силы солнечного давления, воздействующие на поверхность КА. Возмущающее ускорение от сил солнечного давления зависит от формы КА, его массы, а также от материала покрытия КА, определяющего коэффициент отражения солнечного света от поверхности элемента конструкции КА. Из-за большого количества различного рода неопределенностей создание точной модели светового давления представляет собой сложную задачу. Однако для многих КА основной отражающей поверхностью являются солнечные батареи, площадь которых во много раз превосходит площадь миделя самого КА, и эти батареи ориентируются на Солнце. В этом случае в качестве приближенной модели может использоваться алгоритм

$$\bar{a}_{\text{с.д}} = \frac{\bar{X}_{\text{КА}} - \bar{X}_{\text{С}}}{\left|\bar{X}_{\text{КА}} - \bar{X}_{\text{С}}\right|} \frac{(S_{\text{СБ}} + S_{\text{м}})}{m} K, \tag{2.30}$$

где $\bar{X}_{\text{КА}}, \bar{X}_{\text{С}}$ — координаты соответственно КА и Солнца; $S_{\text{СБ}}$ — площадь солнечных батарей; $S_{\text{м}}$ — площадь миделя КА; m — масса КА; K — коэффициент влияния сил солнечного давления.

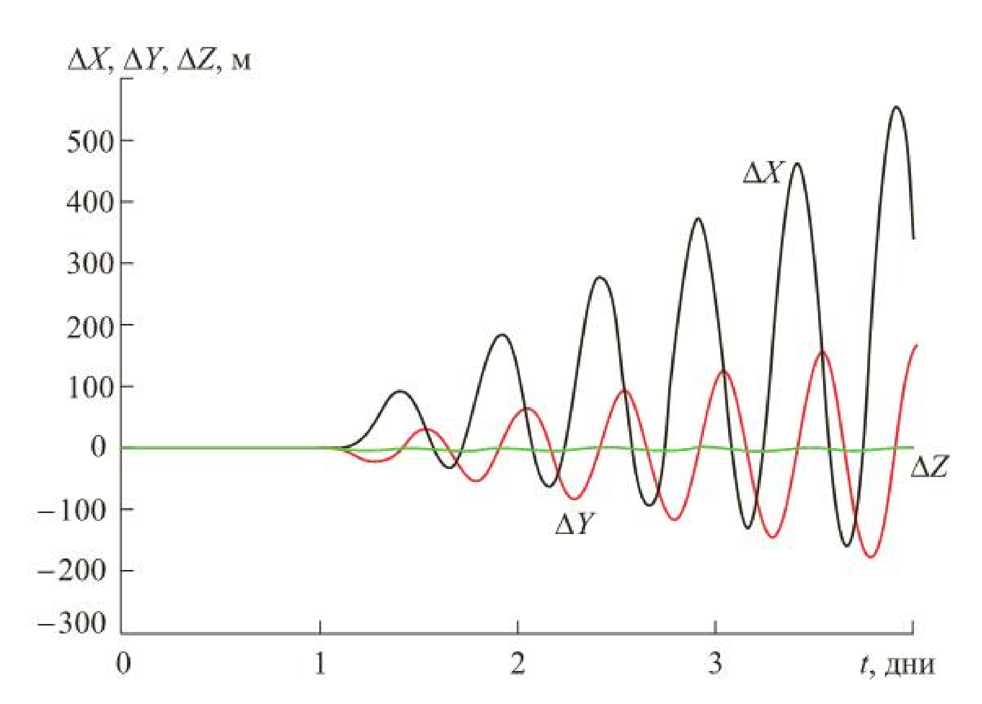


Рис. 2.18. Влияние сил солнечного давления на движение высокоорбитального КА

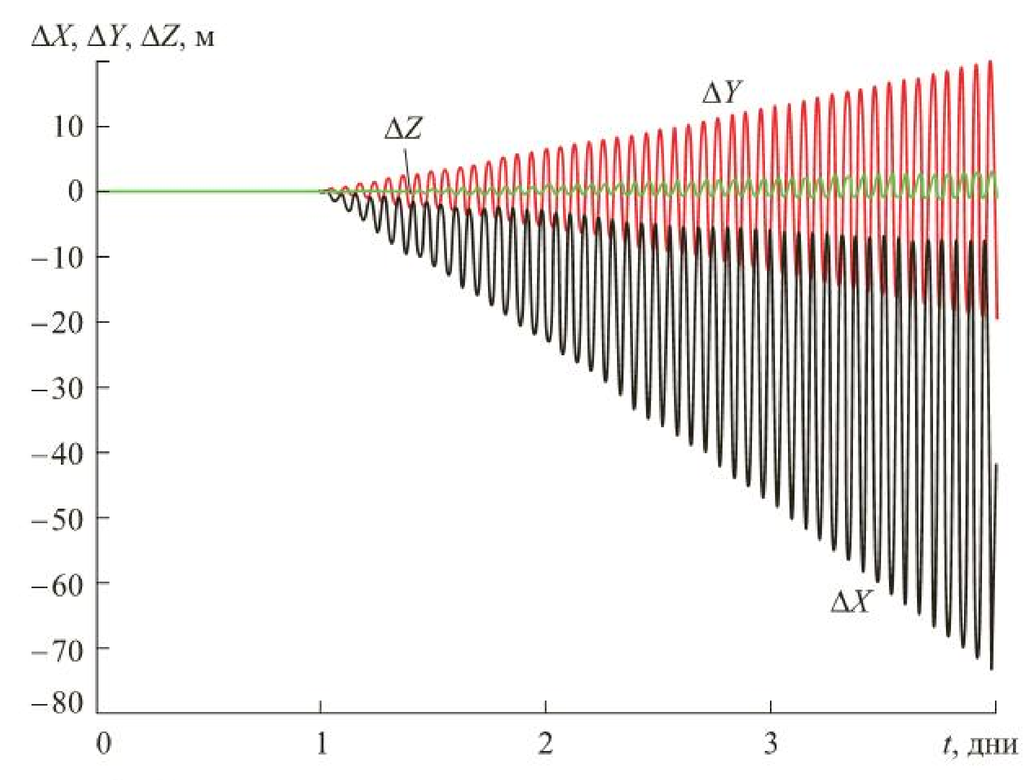


Рис. 2.19. Влияние сил солнечного давления на движение низкоорбитального КА

Коэффициент K зависит от мощности солнечного излучения, коэффициента отражения излучения от поверхности солнечных батарей и КА. Как правило, значение этого коэффициента находится в диапазоне $(5\ldots5{,}5)\cdot10^{-6}$ Н/м^2.

Алгоритм (2.30) хорошо описывает модель сил солнечного давления. Для рассматриваемых спутников GPS (блок IIR) при $K = 5{,}3\cdot10^{-6}$ Н/м^2 оцененная точность модели составила 1…2 %. В 7.5 будет рассмотрен метод определения этого коэффициента по эфемеридам навигационного спутника (НС), здесь же оценивается влияние сил солнечного давления на орбиту КА.

На рис. 2.18 приведены графики «разлета» орбиты КА GPS вследствие воздействия сил солнечного давления, из которых видно, что силы солнечного давления в основном возмущают продольную дальность и высоту орбиты. Изменение плоскости орбиты за трое суток (по боковой дальности) не превысило 5 м, в то время, как под влиянием Луны измерение боковой дальности составило 3,5 км. Уход продольной дальности и высоты составил 600 и 300 м соответственно.

На рис. 2.19 показан «разлет» орбиты МКС. Из рисунка видно, что по продольной дальности за трое суток он составил 70 м, а по боковой дальности — 20 м.

2.6. Уравнения движения в ГСК. Возмущения движения КА, обусловленные параметрами вращения Земли

2.6.1. Уравнения движения

До сих пор были рассмотрены уравнения движения КА в ИСК. Однако, определив возмущающие ускорения в ИСК, можно осуществлять интегрирование уравнений движения и получать прогнозируемый вектор состояния на любой момент времени и в ГСК. Однако для орбитальных КА часто требуется знать вектор состояния в ГСК. При этом измерения текущего вектора состояния также проводятся относительно наземных точек, т. е. в ГСК. В этом случае нет необходимости пересчитывать начальный вектор состояния из ГСК в ИСК, проводить интегрирование уравнений движения в ИСК, а затем переводить текущий вектор состояния вновь в ГСК. Можно сразу проводить интегрирование уравнений движения в ГСК.

Представим уравнение движения КА относительно ИСК (1.50) с учетом возмущения ускорений в виде

$$\ddot{\overline{X}} + \frac{\mu}{r^3}\overline{X} = \overline{a}_n, \tag{2.31}$$

где $\overline{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i$, а $\overline{a}_i$ — составляющая суммарного возмущающего ускорения $\overline{a}_n$.

Определим уравнения движения КА в ГСК. Для этого запишем уравнения движения КА (2.31) в ИСК в виде

$$\dot{\bar{X}} = \bar{V};$$
$$\dot{\bar{V}} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{X} + \bar{a}_n, \qquad (2.32)$$

где $\bar{X}, \bar{V}$ — векторы координат и скорости КА в ИСК.

Пусть известна матрица перехода $A_{\text{ИСК—ГСК}}$ из ИСК в ГСК, тогда вектор координат $\bar{X}$ может быть выражен через вектор координат $\bar{X}_{\text{ГСК}}$ в ГСК:

$$\bar{X} = A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\bar{X}_{\text{ГСК}}. \qquad (2.33)$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (2.33), получим

$$\bar{V} = \dot{A}^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\bar{X}_{\text{ГСК}} + A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\bar{V}_{\text{ГСК}}, \qquad (2.34)$$

где $\bar{V}_{\text{ГСК}}$ — вектор скорости КА в ГСК.

Для матрицы $\dot{A}_{\text{ИСК—ГСК}}$ справедливо следующее равенство:

$$\dot{A}_{\text{ИСК—ГСК}} = \Omega\, A_{\text{ИСК—ГСК}}, \qquad (2.35)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ — матрица вращения Земли; ω_x, ω_y, ω_z — проекции абсолютной условной скорости вращения Земли на оси ГСК.

Подставив значение матрицы $\dot{A}_{\text{ИСК—ГСК}}$ из (2.35) в равенство (2.34) с учетом $\Omega^{\text{T}} = -\Omega$, получим уравнение

$$\bar{V} = -A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\,\Omega\,\bar{X}_{\text{ГСК}} + A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\bar{V}_{\text{ГСК}}. \qquad (2.36)$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (2.36), получим выражение для $\dot{\bar{V}}$:

$$\dot{\bar{V}} = -\dot{A}^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\,\Omega\,\bar{X}_{\text{ГСК}} - A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\,\dot{\Omega}\,\bar{X}_{\text{ГСК}} - A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\,\Omega\,\dot{\bar{X}}_{\text{ГСК}} +$$
$$+ \dot{A}^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\bar{V}_{\text{ГСК}} + A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\dot{\bar{V}}_{\text{ГСК}}. \qquad (2.37)$$

Подставив в правую часть равенства (2.37) выражение для $\dot{A}_{\text{ИСК—ГСК}}$ из равенства (2.35), получим

$$\dot{\bar{V}} = +A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\,\Omega^2\,\bar{X}_{\text{ГСК}} - A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\,\dot{\Omega}\,\bar{X}_{\text{ГСК}} - A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\,\Omega\bar{V}_{\text{ГСК}} -$$
$$- A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\,\Omega\bar{V}_{\text{ГСК}} + A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}}\dot{\bar{V}}_{\text{ГСК}}. \qquad (2.38)$$

Подставив значение вектора $\dot{\overline{V}}$ из равенства (2.38) во второе уравнение системы (2.32), после преобразования будем иметь

$$-\frac{\mu}{r^3} A_{\text{ИСК—ГСК}} \overline{X} + A_{\text{ИСК—ГСК}}\, \overline{a}_n =$$

$$= \Omega^2\, \overline{X}_{\text{ГСК}} - \dot{\Omega}\, \overline{X}_{\text{ГСК}} - 2\,\Omega\, \overline{V}_{\text{ГСК}} + \dot{\overline{V}}_{\text{ГСК}}. \qquad (2.39)$$

Из (2.39) имеем систему уравнений, описывающую движение КА в ГСК:

$$\begin{aligned} &\dot{\overline{X}}_{\text{ГСК}} = \overline{V}_{\text{ГСК}};\\ &\dot{\overline{V}}_{\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^3}\overline{X}_{\text{ГСК}} + A_{\text{ИСК—ГСК}}\overline{a}_n - \left(\Omega^2 - \dot{\Omega}\right)\overline{X}_{\text{ГСК}} + 2\,\Omega\,\overline{V}_{\text{ГСК}}. \end{aligned} \qquad (2.40)$$

В первом приближении можно пренебречь смещением полюса Земли и прецессией вектора угловой скорости, тогда матрица вращения будет иметь вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \dot{\Omega} = 0; \quad \Omega^2 = \begin{pmatrix} -\omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.41)$$

Подставив в алгоритм (2.39) значения матриц $\Omega, \dot{\Omega}, \Omega^2$ из равенств (2.40), получим приближенную систему уравнений движения КА в ГСК:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{\text{ГСК}} = \upsilon_{x\text{ГСК}};\\ &\dot{y}_{\text{ГСК}} = \upsilon_{y\text{ГСК}};\\ &\dot{z}_{\text{ГСК}} = \upsilon_{z\text{ГСК}};\\ &\dot{\upsilon}_{x\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^3}x_{\text{ГСК}} + a_{nx} + \omega_3^2 x_{\text{ГСК}} + 2\upsilon_{y\text{ГСК}}\omega_3;\\ &\dot{\upsilon}_{y\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^3}y_{\text{ГСК}} + a_{ny} + \omega_3^2 y_{\text{ГСК}} - 2\upsilon_{x\text{ГСК}}\omega_3;\\ &\dot{\upsilon}_{z\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^3}z_{\text{ГСК}} + a_{nz}, \end{aligned} \qquad (2.42)$$

где $x_{\text{ГСК}}$, $y_{\text{ГСК}}$, $z_{\text{ГСК}}$, $\upsilon_{x\text{ГСК}}$, $\upsilon_{y\text{ГСК}}$, $\upsilon_{z\text{ГСК}}$ — проекции векторов координат и скорости КА относительно ГСК на оси ГСК; a_{nx}, a_{ny}, a_{nz} — проекции возмущающих ускорений на оси ГСК; ω_3 — скорость вращения Земли вокруг оси Z ГСК.

Если из всех возмущающих ускорений, входящих в состав вектора $\bar{a}_n$, учитывать только гравитационное возмущение, обусловленное сжатием Земли, то система уравнений (2.42) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{\text{ГСК}} = \upsilon_{x\text{ГСК}};\\
&\dot{y}_{\text{ГСК}} = \upsilon_{y\text{ГСК}};\\
&\dot{z}_{\text{ГСК}} = \upsilon_{z\text{ГСК}};\\
&\dot{\upsilon}_{x\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^3}x_{\text{ГСК}} + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}x_{\text{ГСК}}\left(1 - \frac{5z_{\text{ГСК}}^2}{r^2}\right) + \omega_З^2 x_{\text{ГСК}} + 2\omega_З\upsilon_{y\text{ГСК}};\\
&\dot{\upsilon}_{y\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^3}y_{\text{ГСК}} + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}y_{\text{ГСК}}\left(1 - \frac{5z_{\text{ГСК}}^2}{r^2}\right) + \omega_З^2 y_{\text{ГСК}} - 2\omega_З\upsilon_{x\text{ГСК}};\\
&\dot{\upsilon}_{z\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^3}z_{\text{ГСК}} + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}z_{\text{ГСК}}\left(3 - \frac{5z_{\text{ГСК}}^2}{r^2}\right),
\end{aligned} \qquad (2.43),$$

где $r = \sqrt{x_{\text{ГСК}}^2 + y_{\text{ГСК}}^2 + z_{\text{ГСК}}^2}$; μ — константа гравитационного поля Земли, $\mu = 398600{,}4418 \cdot 10^9$ м^3/с^2; α_e — экваториальный радиус Земли, $\alpha_e = 6378136$ м; C_{20} — коэффициент при второй зональной гармонике разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям, $C_{20} = -1082{,}62575 \cdot 10^{-6}$; $\omega_З$ — угловая скорость вращения Земли, $\omega_З = 7{,}292115 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$.

Уравнения (2.43) часто используются для нахождения приближенного решения уравнений движения. Для более точного решения необходимо учитывать более мелкие составляющие возмущающего ускорения $\bar{a}_n$, а также влияние смещения полюса Земли, прецессии и нутации вектора угловой скорости вращения Земли.

Оценим влияние на движение КА параметров возмущенного движения Земли.

2.6.2. Влияние смещения оси вращения Земли относительно оси Z ГСК на движение КА в ГСК

Неучет малых членов, обусловленных смещением реального полюса относительно оси Z ГСК, прецессией и нутацией оси вращения Земли, также приводит к возмущению орбиты относительно ее точного значения. Оценим влияние перекоса оси вращения Земли. Пусть текущее смещение полюса в направлении оси $+X$ и $-Y$ ГСК равно Δx, Δy, выраженное в радианах (смещение полюса дано на сайте МСВЗ). Тогда проекции вектора угловой скорости Земли на оси X и Y ГСК будут

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \omega_z \Delta x;\\
\omega_y &= -\omega_z \Delta y,
\end{aligned} \qquad (2.44)$$

а матрица вращения

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_3\Delta y \\ -\omega_3 & 0 & \omega_3\Delta x \\ -\omega_3\Delta y & -\omega_3\Delta x & 0 \end{pmatrix} = \omega_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \Delta y \\ -1 & 0 & \Delta x \\ -\Delta y & -\Delta x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.45)$$

Будем пренебрегать медленным изменением смещений Δx и Δy, тогда можно считать, что

$$\dot{\Omega} = 0. \qquad (2.46)$$

Умножив матрицу Ω саму на себя и пренебрегая членами второго порядка малости, получим следующее значение матрицы Ω^2:

$$\Omega^2 = -\omega_3^2 \begin{pmatrix} +1 & 0 & -\Delta x \\ 0 & +1 & +\Delta y \\ -\Delta x & +\Delta y & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.47)$$

Подставив значения матриц Ω и Ω^2 из выражений (2.45) и (2.47) в уравнение движения (2.39), выделим возмущающие ускорения, обусловленные смещением полюса Земли:

$$\bar{a}_{\text{п}} = \begin{pmatrix} -\Delta x \omega_3^2 z_{\text{ГСК}} + 2\Delta y \omega_3 \upsilon_z \\ \Delta y \omega_3^2 z_{\text{ГСК}} + 2\Delta x \omega_3 \upsilon_z \\ -\Delta x \omega_3^2 x_{\text{ГСК}} + \Delta y \omega_3^2 y_{\text{ГСК}} - 2\Delta y \omega_3 \upsilon_x - 2\Delta x \omega_3 \upsilon_y \end{pmatrix}. \qquad (2.48)$$

Из формулы (2.48) для компонент возмущающего ускорения, обусловленного смещением оси вращения Земли относительно оси Z ГСК легко оценить значение этого возмущения для низких и высоких орбит. Для низких орбит возмущения составляют $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ м/с, для высоких орбит $\sim 10^{-6}$. Сравнивая полученные оценки возмущений с возмущениями, приведенными в табл. 2.1, можно отметить, что возмущения как низких, так и высоких орбит, обусловленные смещением реальной оси вращения Земли от оси Z ГСК, имеют такой же порядок, как и возмущения от лунной и солнечной гравитаций.

На рис. 2.20 и 2.21 приведены графики «разлета» низких и высоких орбит, обусловленного возмущением из-за смещения полюса Земли от оси Z ГСК. Из рисунков следует, что для низкоорбитальных КА «разлет» по боковой оси Z (в ОСК) достигает ~20 м, т. е. его максимальная амплитуда равна текущему смещению полюса относительно оси Z ГСК.

Для высокоорбитальных КА амплитуда «разлета» по оси Z пропорциональна радиусу орбиты и для GPS составила ~50 м. Время достижения максимального «разлета» по боковой дальности зависит от начальной фазы возмущения и может быть достигнуто за четверть витка (3 ч).

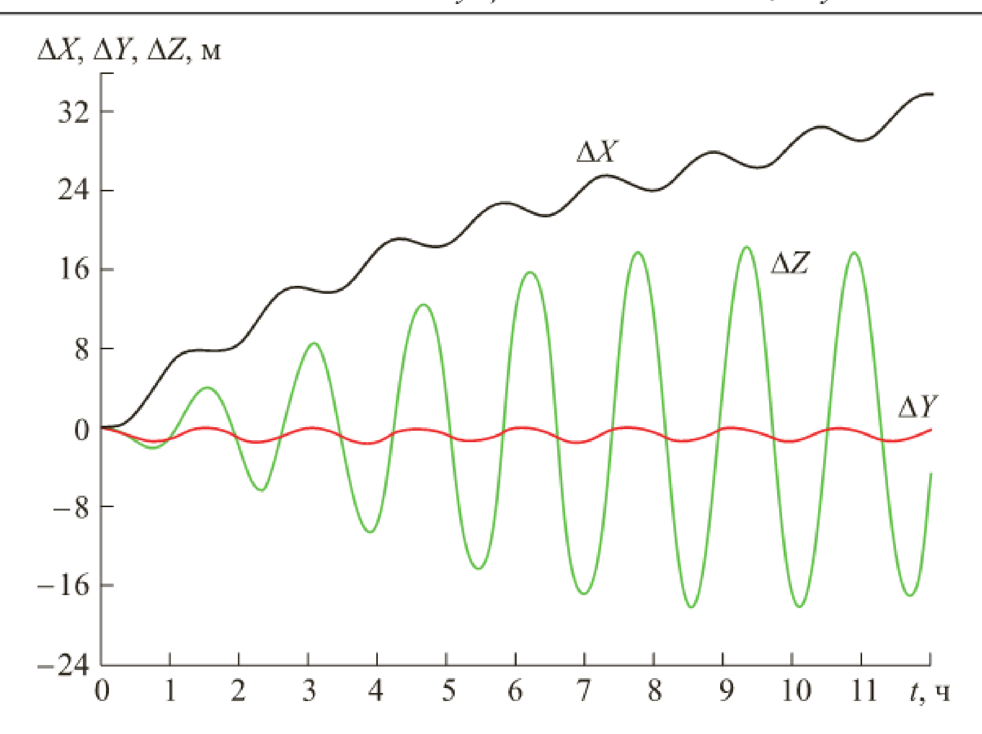


Рис. 2.20. Влияние смещения полюса Земли на точность прогноза низкоорбитального КА

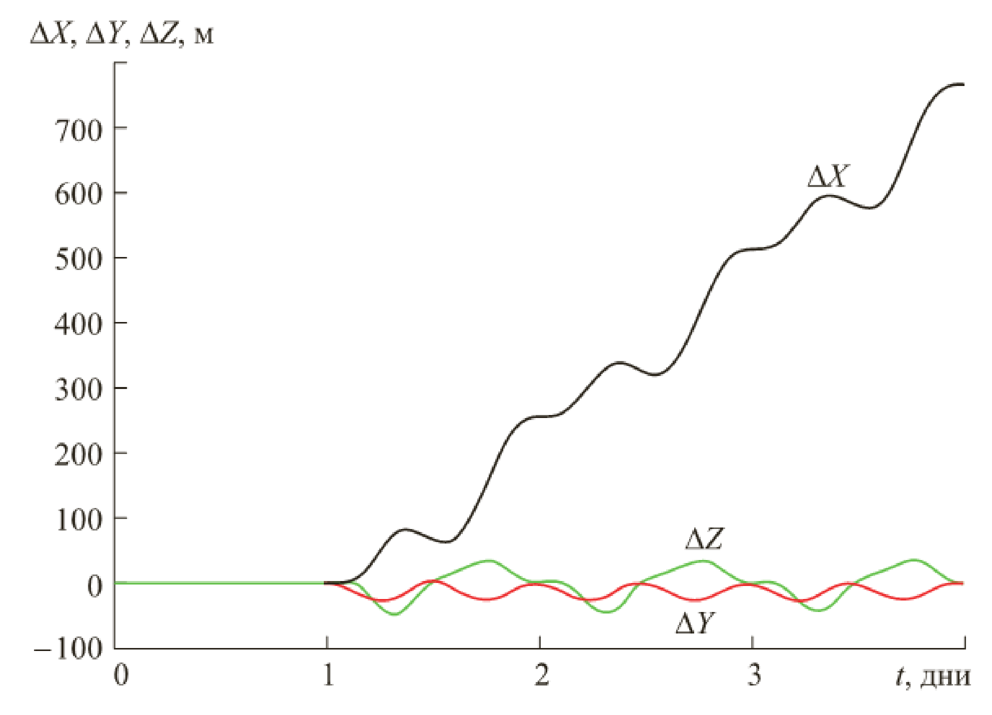


Рис. 2.21. Влияние смещения полюса Земли на точность прогноза высокоорбитального КА

По продольной дальности наблюдается вековой уход. Для низких орбит он составляет 50…100 м/сут, для высоких — 100…200 м/сут. Скорость векового ухода определяется значением и направлением текущего смещения полюса, а также наклонением и восходящим углом орбиты.

2.6.3. Влияние прецессии и нутации оси вращения Земли на движение КА

Прецессия и нутация оси вращения Земли так же, как и смещение оси вращения относительно оси Z ГСК, влияют на движение КА относительно ГСК — обусловливают дополнительное вращение этой оси в инерциальном пространстве. Пусть ω_X, ω_Y — проекции этой дополнительной угловой скорости Земли на оси ИСК. Будем считать их медленно меняющимися, а на рассматриваемом интервале времени — константами. Они значительно меньше скорости вращения Земли вокруг оси Z $\omega_З$ и равны ~0,1″/сут.

Определим поправки к правой части второго уравнения движения (2.40), обусловленные прецессией и нутацией оси вращения Земли. Будем считать, что смещение полюса Земли от оси Z ГСК равно нулю. Тогда матрица перехода от ИСК в ГСК может быть представлена в виде

$$A_{\text{ИСК—ГСК}} = A_{\text{в}} A_{\text{п}}, \tag{2.49}$$

где $A_{\text{в}} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_З f + \varphi) & \sin(\omega_З f + \varphi) & 0 \\ -\sin(\omega_З f + \varphi) & \cos(\omega_З f + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица вращения Земли;

$A_{\text{п}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_y \\ 0 & 1 & \alpha_n \\ \alpha_y & -\alpha_n & 1 \end{pmatrix}$ — матрица прецессии и нутации (α_n, α_y — малые углы поворота оси Z Земли вокруг осей X и Y ИСК ($J2000$)).

Вектор координат $\bar{X}$ КА в ИСК может быть выражен через вектор $\bar{X}_{\text{ГСК}}$:

$$\bar{X} = A_{\text{ИСК—ГСК}} \bar{X}_{\text{ГСК}} = A_{\text{п}}^{\text{Т}} A_{\text{в}}^{\text{Т}} \bar{X}_{\text{ГСК}}. \tag{2.50}$$

Продифференцировав правую и левую части равенства (2.50), получим

$$\bar{V} = \dot{A}_{\text{п}}^{\text{Т}} A_{\text{в}}^{\text{Т}} \bar{X}_{\text{ГСК}} + A_{\text{п}}^{\text{Т}} \dot{A}_{\text{в}}^{\text{Т}} X_{\text{ГСК}} + A_{\text{п}}^{\text{Т}} A_{\text{в}}^{\text{Т}} \bar{V}_{\text{ГСК}}. \tag{2.51}$$

Для производных матриц $\dot{A}_{\text{в}}$ и $\dot{A}_{\text{п}}$ можно записать:

$$\dot{A}_{\text{в}}^{\text{Т}} = -A_{\text{в}}^{\text{Т}} \Omega_З, \tag{2.52}$$

где $\Omega_З = \begin{pmatrix} 0 & \omega_З & 0 \\ -\omega_З & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица вращения Земли;

$$\dot{A}_{\text{п}}^{\text{Т}} = -\dot{A}_{\text{п}}, \tag{2.53}$$

где $\dot{A}_{\text{п}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega_y \\ 0 & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ — матрица скорости прецессии и нутации.

С учетом (2.52) и (2.53), равенство (2.51) может быть представлено в виде

$$\bar{V} = -\dot{A}_{\text{п}} A_{\text{в}}^{\text{T}} \bar{X}_{\text{ГСК}} - A_{\text{п}}^{\text{T}} A_{\text{в}}^{\text{T}} \Omega_{3} \dot{X}_{\text{ГСК}} - A_{\text{п}}^{\text{T}} A_{\text{в}}^{\text{T}} \bar{V}_{\text{ГСК}}. \quad (2.54)$$

Продифференцировав правую и левую части уравнения (2.54), с учетом равенств (2.32), (2.52) и (2.54) получим

$$-\frac{\mu}{r^{3}} \bar{X} + \bar{a}_{n} = 2\dot{A}_{\text{п}} A_{\text{в}}^{\text{T}} \left(\Omega_{3} \bar{X}_{\text{ГСК}} - \bar{V}_{\text{ГСК}} \right) -$$

$$-\begin{pmatrix} \omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_{\text{ГСК}} - 2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{V}_{\text{ГСК}} + \dot{\bar{V}}_{\text{ГСК}}^{\text{T}}. \quad (2.55)$$

Откуда для производной вектора скорости в ГСК

$$\dot{\bar{V}}_{\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^{3}} \bar{X} + \bar{a}_{\text{ГСК}} + \begin{pmatrix} \omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_{\text{ГСК}} + 2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{V}_{\text{ГСК}} +$$

$$+ 2 A_{\text{в}} A_{\text{п}} \dot{A}_{\text{п}} A_{\text{в}}^{\text{T}} \left(\bar{V}_{\text{ГСК}} - \Omega_{3} \bar{X}_{\text{ГСК}} \right). \quad (2.56)$$

Принимая во внимание, что матрица $A_{\text{п}}$ близка к единичной, последнее слагаемое равенства (2.56) можно представить в виде

$$2 A_{\text{в}} A_{\text{п}} \dot{A}_{\text{п}} A_{\text{п}}^{\text{T}} \left(\bar{V}_{\text{ГСК}} - \Omega_{3} \dot{X}_{\text{ГСК}} \right) = 2 A_{\text{ИСК—ГСК}} \dot{A}_{\text{ГСК}} A_{\text{ИСК—ГСК}}^{\text{T}} \left(\bar{V}_{\text{ГСК}} - \Omega_{3} \dot{X}_{\text{ГСК}} \right). \quad (2.57)$$

С учетом равенства (2.57), прецессии и нутации оси вращения Земли уравнение движения КА в ГСК (2.56) будет иметь следующий вид:

$$\dot{\bar{V}}_{\text{ГСК}} = -\frac{\mu}{r^{3}} \bar{X} + \bar{a}_{\text{ГСК}} + \begin{pmatrix} \omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_{\text{ГСК}} + 2 \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\bar{V}}_{\text{ГСК}} +$$

$$+ 2 A_{\text{ИСК—ГСК}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega_y \\ 0 & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \left(\bar{V}_{\text{ГСК}} - \Omega_{3} \bar{X}_{\text{ГСК}} \right). \quad (2.58)$$

Последнее слагаемое в уравнении (2.58) определяет возмущение движения КА, обусловленное скоростью прецессии и нутации ω_x, ω_y оси вращения Земли. Исходя из того, что скорость прецессии оси вращения Земли ω_x, ω_y ~0,1 ″/сут, можно оценить возмущающее ускорение: для низкоорбитальных КА оно составляет $\sim 6 \cdot 10^{-8}$ м/с^2, для высокоорбитальных КА $\sim 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ м/с^2, т. е. возмущение, обусловленное влиянием прецессии и нутации оси вращения Земли, имеет такой же порядок, как и возмущения от сил солнечного давления (см. табл. 2.1).

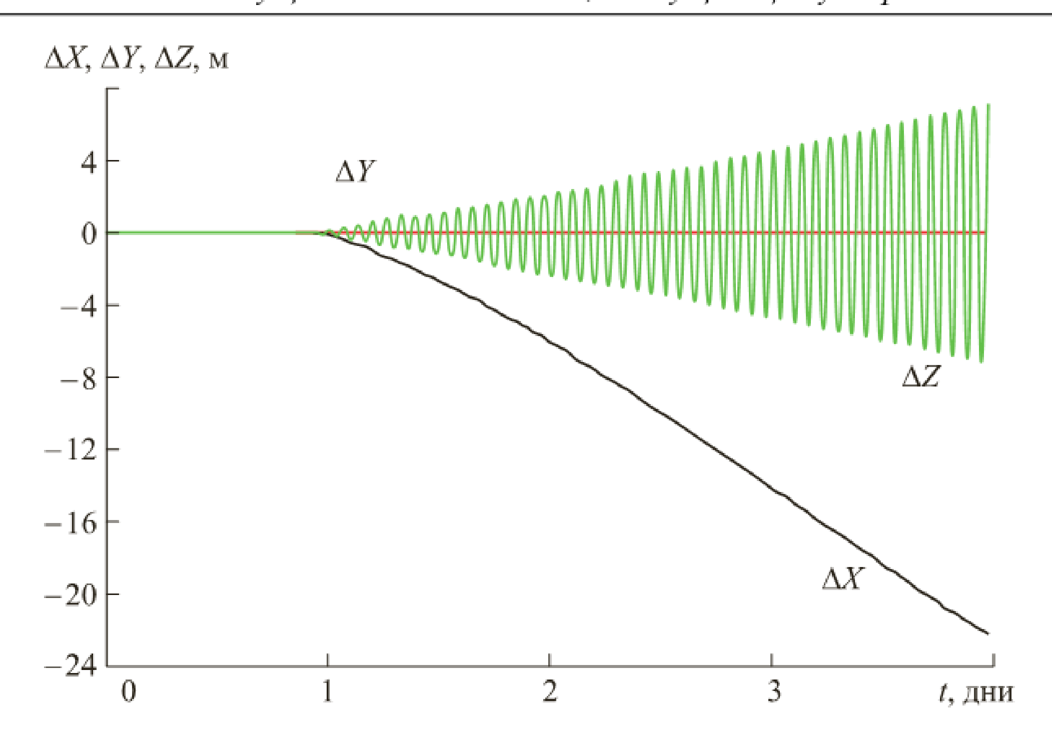


Рис. 2.22. Влияние прецессии и нутации оси вращения Земли на точность прогноза низкоорбитального КА

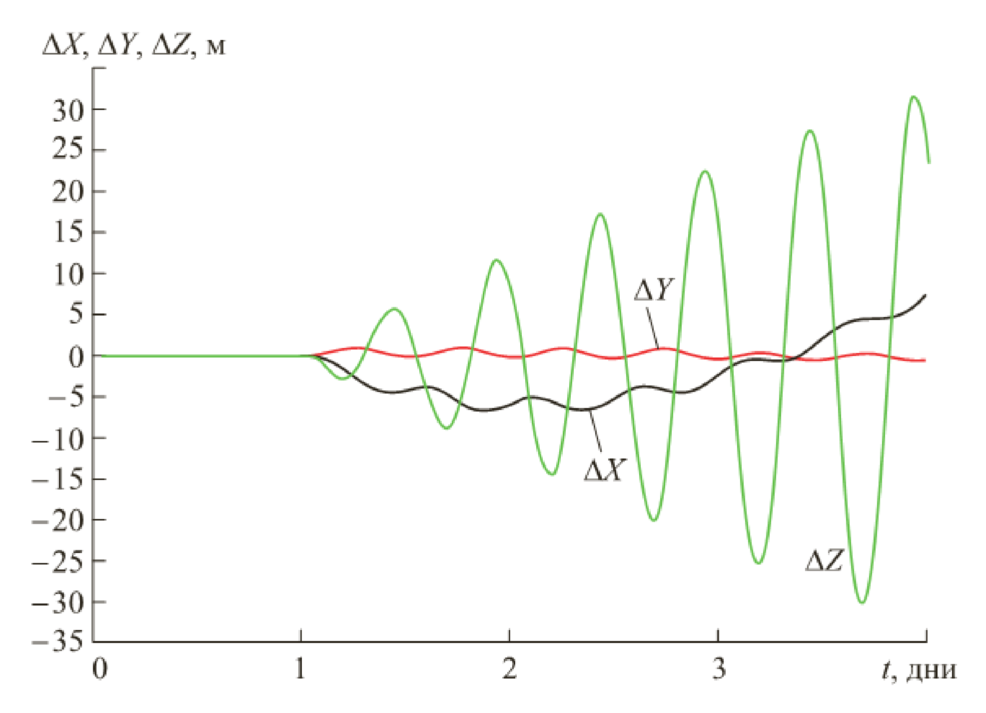


Рис. 2.23. Влияние прецессии и нутации оси вращения Земли на точность прогноза высокоорбитального КА

На рис. 2.22 и 2.23 приведены графики «разлета» низких и высоких орбит, обусловленного возмущением из-за прецессии оси вращения Земли, из которых следует, что для низких орбит прецессия и нутация оси вращения Земли приводит к «разлету» по продольной дальности на ~5 м за трое суток, и практически не влияет на высоту и боковую дальность. Для высоких орбит «разлет» по продольной дальности за трое суток составляет ~75 м, а по вертикали и боковой дальности — не превышает 3 м.

2.6.4. Влияние неравномерности вращения Земли на движение КА

При выводе уравнений движения в ГСК предполагалось, что Земля вращается равномерно с номинальной угловой скоростью $\omega_З = 0{,}7292115 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$. Однако, как отмечалось ранее (см. 1.2), реальный период вращения Земли может отличаться от номинального на несколько миллисекунд. Отличие скорости вращения Земли от номинальной приводит к росту рассогласования времен UTC и UT1 (см. рис. 1.1) (всемирное время среднего Гринвичского меридиана, рассчитанное с учетом движения полюсов), а также к отклонению истинной ГСК от расчетной, вращающейся с номинальной угловой скоростью. Поэтому в уравнениях движения КА относительно истинной ГСК появляется возмущение, обусловленное отличием истинной скорости вращения Земли от номинальной. Это отличие может быть определено по отклонению *d*UT1 времен UT1 от UTC, которое регулярно и с высокой точностью измеряется соответствующими астрономическими службами и публикуется, по крайней мере, 1 раз в сутки на сайте МСВЗ. Кроме того, эта поправка передается в составе неоперативной информации от НС ГЛОНАСС. Приращение *d*UT1 за сутки представляет собой отличие истинного периода вращения Земли от номинального ΔT, которое связано с отклонением угловой скорости Земли от номинальной соотношением

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi}{T^2}\Delta T, \qquad (2.59)$$

т. е. текущее отклонение реальной угловой скорости вращения Земли от номинальной может быть получено по формуле (2.59). Определим зависимость возмущающего ускорения в ГСК, обусловленного этим отклонением. Рассмотрим уравнение (2.40). При отсутствии смещения полюса Земли от оси Z ГСК матрица вращения Ω имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_З & 0 \\ -\omega_З & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.60)$$

где $\omega_З$ — истинная скорость вращения Земли.

Представим истинную скорость вращения Земли в виде

$$\omega_З = \omega_0 + \Delta\omega_З, \qquad (2.61)$$

где ω_0 — номинальная скорость вращения Земли; $\Delta\omega_З$ — отклонение истинной скорости вращения Земли от номинальной.

Учитывая, что $\Delta\omega_З$ — медленно меняющаяся величина, будем предполагать ее равной константе. Тогда уравнение (2.40) может быть представлено в виде

$$\dot{\bar{V}}_{ГСК} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{X}_{ГСК} + \bar{a}_{ГСК} - \Omega_0^2\bar{X}_{ГСК} + 2\Omega_0\bar{V}_{ГСК} - 2\Omega_0\Delta\Omega\bar{X}_{ГСК} + 2\Delta\Omega\bar{V}_{ГСК}, \qquad (2.62)$$

где

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Delta\omega & 0 \\ -\Delta\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Два последних слагаемых уравнения (2.62) представляют собой возмущения, обусловленные отклонением скорости вращения Земли от номинальной. В более удобном представлении этот вектор возмущающего ускорения можно записать следующим образом:

$$\bar{a}_b = 2\omega_0\Delta\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{X}_{\text{ГСК}} + 2\Delta\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{V}_{\text{ГСК}}, \tag{2.63}$$

где $\Delta\omega$ — определяется по формуле (2.59).

Формула (2.63) позволяет оценить значение этого возмущения — при отличии реального периода вращения Земли от номинального на 1 мс значение возмущающего ускорения для низкоорбитальных КА составляет $\sim 7 \cdot 10^{-9}$ м/с^2, для высокоорбитальных $\sim 3 \cdot 10^{-9}$ м/с^2.

На рис. 2.24 и 2.25 приведены графики «разлета» низких и высоких орбит соответственно, обусловленного возмущением из-за неравномерности вращения Земли. Из графиков следует, что для высоких орбит «разлет» за 3 сут по продольной дальности составляет ~12 м, по боковой дальности — 4 м, а для низких орбит — 3 м по продольной дальности и 1 м — по боковой дальности.

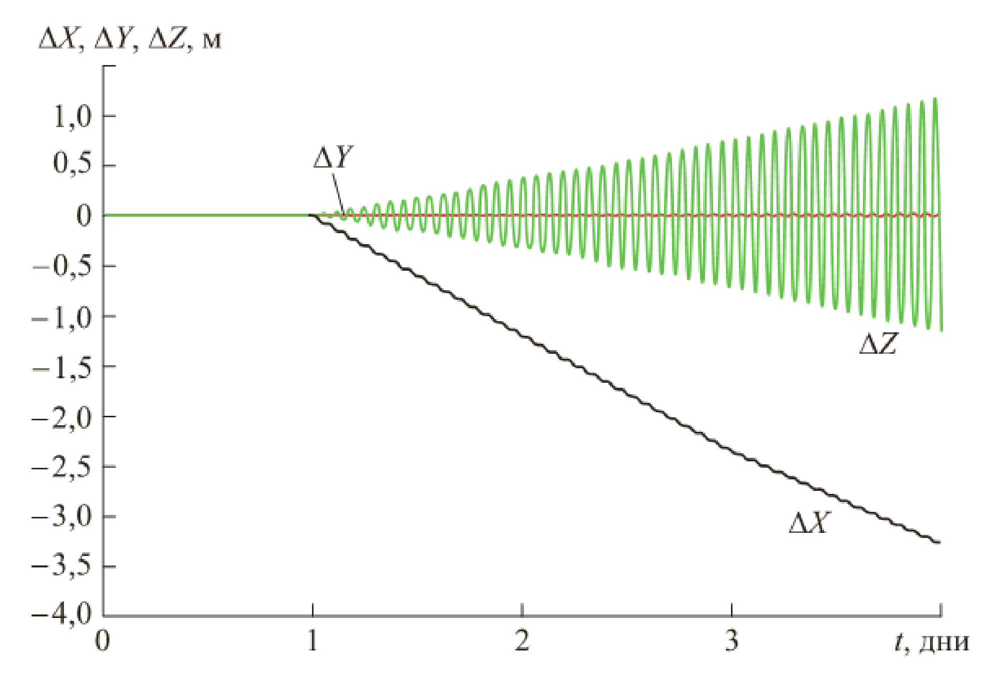


Рис. 2.24. Влияние неравномерности вращения Земли на точность прогноза низкоорбитального КА

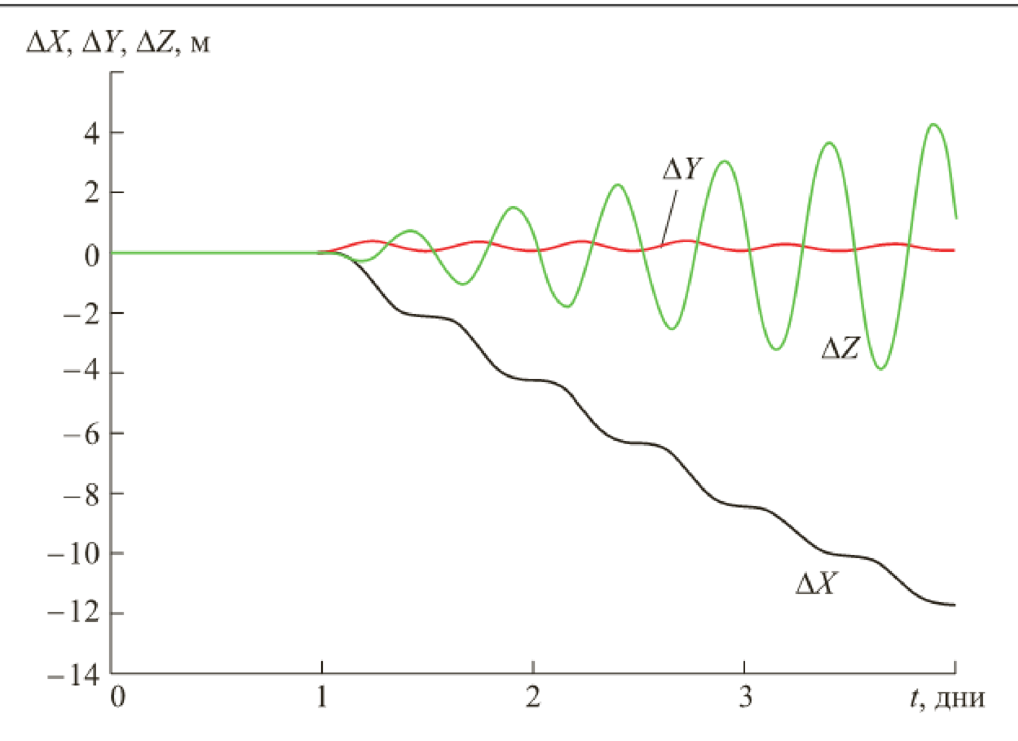


Рис. 2.25. Влияние неравномерности вращения Земли на точность прогноза высокоорбитального КА

Таким образом, нестабильность параметров движения Земли приводит к возмущениям движения КА в ГСК, которые достаточно заметны на фоне других возмущающих ускорений, влияющих на движение КА. Они соизмеримы с гравитационными возмущениями от Луны и Солнца и с силами светового давления от Солнца. В табл. 2.4 приведены значения этих возмущений для низкоорбитальных (МКС) и высокоорбитальных (GPS) КА.

Таблица 2.4

Возмущающие ускорения, обусловленные параметрами вращения Земли

Составляющая ускорения	Орбиты высотой 19 000…20 000 км, м/с^2	Орбиты высотой 350…400 км, м/с^2
Смещение полюса Земли от оси Z в ГСК	$3\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-6}$
Прецессия и нутация оси вращения Земли	$2{,}5\cdot10^{-8}$	$6\cdot10^{-8}$
Неравномерность вращения Земли	$3\cdot10^{-9}$	$7\cdot10^{-9}$

Можно сделать вывод, что возмущения, обусловленные нестабильностью параметров движения Земли, по значению аналогичны основным возмущающим факторам, таким как аномальная часть гравитационного поля Земли, аэродинамические возмущения, гравитационные возмущения от Луны и Солнца, возмущения от сил солнечного давления. Поэтому при решении задач высокоточной навигации, точного прогнозирования орбит эти возмущения необходимо учитывать. Входную информацию для их определения (текущие смещения полюсов, текущие скорости прецессии — нутации оси вращения Земли, текущее приращение dUT1) сегодня легко можно найти в Интернете.

2.7. Замечательные орбиты и их свойства

В некоторых случаях возмущения или совокупность возмущений обусловливают определенные свойства орбиты, которые полезны для решения тех или иных практических задач. Учитывая особенности таких орбит, их иногда называют *замечательными орбитами*.

2.7.1. Гелиосинхронные орбиты

К замечательным относится, например, гелиосинхронная орбита, обладающая тем свойством, что угол между плоскостью орбиты и направлением на Солнце всегда близок к константе.

Гелиосинхронные орбиты очень удобны для наблюдения за поверхностью Земли. Существует целый класс спутников дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), выводимых на гелиосинхронные орбиты и ведущих съемку поверхности Земли в различных диапазонах спектра. Благодаря постоянству угла между плоскостью орбиты и направлением на Солнце, съемка может вестись постоянно в одних и тех же условиях освещенности поверхности Земли, что важно для последующего анализа этих снимков.

Свойство гелиосинхронности связано с возмущением орбиты вследствие полярного сжатия Земли. В 2.2.1 было показано, что сжатие Земли обусловливает прецессию орбиты вокруг оси Z ИСК. Из первой формулы (2.7) для скорости прецессии орбиты следует, что прецессия для КА с наклонением меньше 90° всегда происходит в западном направлении, однако если угол наклонения больше 90°, то орбита будет прецессировать в восточном направлении. В этом же направлении движется Солнце (относительно ИСК) с угловой скоростью ~1 °/сут. Для орбитального КА можно выбрать такой угол наклонения орбиты, при котором скорость прецессии орбиты будет равна скорости движения Солнца по эклиптике. В этом случае угол между Солнцем и плоскостью орбиты КА будет постоянным.

Для околокруговой орбиты высотой, например 600 км, угол наклонения, обеспечивающий синхронную прецессию орбиты с движением Солнца по эклиптике, ~97,7°. Однако «гелиосинхронность» орбиты не является устойчивой — со временем параметры орбиты НС меняются, соответственно меняется и скорость прецессии орбиты. Для сохранения необходимого наклонения и заданного угла между Солнцем и орбитой КА необходимо осуществлять управление орбитой — определять рассогласования между реальными параметрами орбиты и расчетными, и по результатам рассчитывать и реализовывать корректирующие импульсы, приближающие орбиту к заданной гелиосинхронной.

2.7.2. Высокоорбитальные двенадцатичасовые орбиты

Свойства другой замечательной орбиты вытекают из второго равенства соотношений (2.7) — при угле наклонения $i = 63{,}4°$ скорость прецессии угла перицентра $\dot{\omega}$ становится равной нулю. Это свойство используется для по-

строения квазигеостационарных высокоширотных орбит. Известно, что геостационарные КА «висят» в одной и той же точке небесной сферы, что удобно для многих типов КА, особенно для КА связи. Однако геостационарные КА имеют малое наклонение и малодоступны для пользователей, находящихся в высокоширотных районах Земли. Поэтому для высокоширотных районов можно установить КА на высокоэллиптическую орбиту с периодом 12 ч и апогеем над требуемым районом Земли. При угле наклонения $i = 63{,}4°$ перигей не будет прецессировать, а будет оставаться постоянным над заданным районом. При высоте перигея ~1000 км и высоте апогея ~39 000 км такой КА большую часть времени (~9 из 12 ч) будет находиться в окрестности апогея. В течение следующего периода он будет «висеть» в аналогичной точке по широте, но в противоположной точке по долготе. Система из трех-четырех таких КА позволяет осуществлять непрерывное наблюдение за любой точкой северного полушария Земли.

Следует отметить, что угол наклонения орбиты НС ГЛОНАСС близок к 63,4°. Поэтому скорость прецессии перицентра для этих НС близка к нулю, и при прогнозе орбиты ГЛОНАСС по данным эфемерид в некоторых случаях прецессией перицентра можно пренебречь.

2.7.3. Геостационарные орбиты

Наиболее популярной орбитой является геостационарная орбита (ГСО) — круговая орбита в плоскости экватора высотой ~36 000 км. Ее замечательным свойством является то, что угловая орбитальная скорость КА равна угловой скорости Земли. При этом КА «висит» в одной и той же точке небесной сферы, что обусловливает главное свойство этой орбиты.

При этом на КА, установленном в некоторой точке ГСО, действует целый ряд возмущений, стремящихся увести его из этой точки. Для удержания КА в заданной точке требуется реализация управления и соответствующий расход рабочего тела. Рассмотрим эти возмущения.

Влияния лунной и солнечной гравитации, а также сжатие Земли обусловливает прецессионное движение плоскости орбиты геостационарного КА с периодом ~53 года и начальной максимальной скоростью изменения наклонения около 0,85 °/год с достижением максимального наклонения ~15° через 26,5 лет. Для удержания плоскости орбиты в плоскости экватора требуется расход рабочего тела, обеспечивающий суммарный импульс скорости ~50 м/с в год.

Также необходимо принимать во внимание дрейф КА по долготе, обусловленный поперечным сжатием Земли, из-за чего на ГСО имеются две устойчивые (~75,3° в. д. и ~104,7° з. д.) и две неустойчивые (~165,3° в. д. и 14,7° з. д.) точки равновесия. Расположенный между этими точками КА будет медленно ускоряться в сторону устойчивой точки равновесия, и совершать колебания около этой точки. Для удержания КА требуется проведение коррекций орбиты в плоскости экватора, максимальный суммарный импульс которых равен ~2 м/с за год.

2.7.4. Геосинхронные орбиты

Замечательными являются также геосинхронные орбиты — орбиты с периодом, равным суткам, но с ненулевым наклонением. Такие спутники «висят» на одной и той же долготе, но совершают колебания с суточным периодом по широте, угловая амплитуда которых равна наклонению орбиты. Несколько таких спутников могут реализовать региональную навигационную систему. В отличие от геостационарных спутников, находящихся в одной плоскости, геосинхронные образуют пространственную конфигурацию, обеспечивающую невырожденность навигационного решения.

Особыми геосинхронными орбитами являются эллиптические орбиты с наклонением ~63°. КА на таких орбитах большую часть периода находятся в окрестности апогея и быстро проходят перигей. Они так же, как и высокоорбитальные двенадцатичасовые орбиты, удобны для обслуживания высокоширотных территорий. Например, для организации круглосуточной связи региона достаточно двух КА, так как каждый из них «висит» над обслуживаемой территорией более 12 ч.

Апогей такой орбиты обычно лежит в диапазоне 46 000…52 000 км, перигей — 19 000…25 000 км, эксцентриситет находится в диапазоне 0,25…0,4, большая полуось равна 42 164 км.

2.7.5. Орбиты в точках Лагранжа

К ряду замечательных орбит относятся орбиты КА, находящиеся в точках Лагранжа или так называемых точках либрации (от англ. *libration* — раскачивание).

Точки Лагранжа представляют собой частный случай при решении так называемой ограниченной задачи трех тел — когда орбиты всех тел являются круговыми и масса одного из них (КА) намного меньше массы двух других тел, например, пары Солнце — Земля или Земля — Луна. В этом случае можно считать, что два массивных тела обращаются вокруг их общего центра масс с постоянной угловой скоростью. В пространстве вокруг них существует пять точек (рис. 2.26), в которых третье тело с пренебрежимо малой массой может оставаться неподвижным во вращающейся системе отсчета, связанной с массивными телами. В этих точках гравитационные силы, действующие на КА, уравновешены центробежной силой.

Точки Лагранжа получили свое название в честь математика Жозефа Луи Лагранжа, который первым в 1772 г. обнаружил это явление. Точки Лагранжа лежат в плоскости орбит массивных тел и обозначаются заглавной латинской буковой L с индексом от 1 до 5. Первые три точки лежат на линии, проходящей через центры масс обоих массивных тел. Эти точки называются *коллинеарными* и обозначаются L_1, L_2, L_3. Точка L_1 находится между двумя телами ближе к менее массивному телу, L_2 — снаружи за менее массивным телом и L_3 — за более массивным (см. рис. 2.26). Расстояния от центра масс системы до этих точек в первом приближении по α рассчитываются по формулам

$$r_1 = R\left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)^{1/3};$$

$$r_2 = R\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)^{1/3};$$

$$r_3 = R\left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right); \qquad (2.64)$$

$$\alpha = \frac{M_2}{M_1 + M_2},$$

где R — расстояние между телами; M_1 — масса более массивного тела; M_2 — масса второго тела.

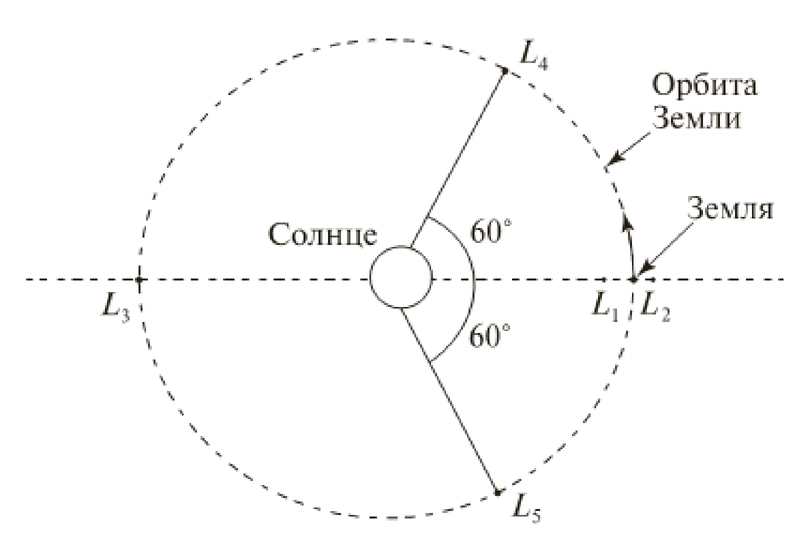


Рис. 2.26. Схема расположения пяти точек Лагранжа в системе двух массивных тел

Для системы Солнце — Земля расстояние от центра Земли до L_1 и L_2 составляет ~1,5 млн км. Для системы Земля — Луна расстояние от центра Луны до L_1 и L_2 составляет ~61 500 км.

Точка L_3 находится не на самой орбите менее массивного тела, а немного ближе к более массивному телу. Точки L_4 и L_5 называют треугольными. Они находятся в вершинах равносторонних треугольников, основанием которых является линия, соединяющая центры масс двух тел.

Тела, помещенные в коллинеарные точки Лагранжа, находятся в неустойчивом равновесии. В треугольных точках равновесие устойчиво, если отношение масс тел $M_1/M_2 > 24,96$, это обеспечивается для систем Солнце — Земля и Земля — Луна.

В настоящее время несколько КА, в первую очередь, астрофизических обсерваторий, размещены в различных точках Лагранжа Солнечной системы. В точке L_1 системы Солнце — Земля удобно разместить космическую солнечную обсерваторию — она никогда не будет попадать в тень Земли, а значит, наблюдения могут вестись непрерывно.

Точка L_2 подходит для космического телескопа — здесь Земля почти полностью заслоняет солнечный свет и сама не мешает наблюдениям, так как обращена к L_2 неосвещенной стороной.

Точка L_1 системы Земля — Луна может стать идеальным местом для строительства пилотируемой орбитальной космической станции, которая, располагаясь на полпути между Землей и Луной, позволила бы легко достичь Луны с минимальными затратами топлива и стать ключевым узлом грузового потока между Землей и нашим спутником.

Контрольные вопросы

1. Какие возмущения действуют на движение центра масс КА, их природа и порядок?
2. Как влияет сжатие Земли на эволюцию параметров орбиты?
3. Как влияет гравитационное поле Земли, его нормальная и аномальная составляющие на орбиты низкоорбитальных и высокоорбитальных КА?
4. Как влияет аэродинамическое возмущение на орбиту низкоорбитальных КА?
5. Как влияют гравитационные возмущения от Луны и Солнца на движение низкоорбитальных и высокоорбитальных КА?
6. Как влияют возмущения, обусловленные параметрами вращения Земли, на движение низкоорбитальных и высокоорбитальных КА?
7. Какие вы можете назвать замечательные орбиты КА? Каковы их свойства?

Глава 3

Методы интегрирования уравнений движения космического аппарата

3.1. Интегрирование уравнений движения КА методом Рунге — Кутты четвертого порядка

Движение КА описывается уравнениями движения, например, уравнением движения КА в ИСК (2.32). Зная начальный вектор состояния КА, интегрированием уравнения движения можно выполнить прогноз вектора состояния на любой другой момент времени. Точность прогноза зависит как от точности уравнений, описывающих движение КА, так и от точности метода интегрирования уравнений движения.

В гл. 2 были рассмотрены зависимости точности прогноза от точности модели движения КА и реализован классический метод интегрирования уравнения движения — метод Рунге — Кутты четвертого порядка, обеспечивающий высокоточный прогноз вектора состояния. При выбранном шаге интегрирования, равном 1 с, прогноз на интервал несколько суток, выполненный этим методом, как для низких, так и для высоких орбит выполняется с точностью несколько сантиметров. Поэтому ранее при изучении зависимости точности прогноза от точности модели движения мы пренебрегли методической ошибкой прогноза, определяемой методом интегрирования. Приведем алгоритмы интегрирования уравнений движения методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}\left(\overline{x}, t\right); \;\; \overline{x}\left(t_0\right) = \overline{x}_0. \tag{3.1}$$

Рекуррентный алгоритм формирования вектора состояния на $(i{+}1)$-м шаге имеет вид

$$\overline{x}_{i+1} = \overline{x}_i + \frac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right), \tag{3.2}$$

где

$$K_1 = h\overline{f}\left(\overline{x}_i, t_i\right);$$

$$K_2 = h\overline{f}\left(\overline{x}_i + \frac{1}{2}K_1,\ t_i + \frac{h}{2}\right);$$

$$K_3 = h\overline{f}\left(\overline{x}_i + \frac{1}{2}K_2,\ t_i + \frac{h}{2}\right);$$

$$K_4 = h\overline{f}\left(\overline{x}_i + K_3,\ t_i + h\right);$$

h — шаг интегрирования.

Этот метод имеет четвертый порядок точности, т. е. ошибка интегрирования на каждом шаге имеет следующий порядок: 0 — малое от $\ddot{\bar{a}}h^4$, где $\bar{a}$ — вектор суммарного ускорения КА.

Из формулы (3.2) видно, что задаваемым параметром при реализации рассматриваемого метода интегрирования является шаг интегрирования h. При решении той или иной задачи прогноза орбиты КА возникает вопрос выбора шага интегрирования. Рассмотрим зависимость точности прогноза от шага интегрирования для низкоорбитальных и высокоорбитальных КА.

С учетом возмущающих ускорений уравнение движения КА в ИСК будет иметь вид

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{\mu \bar{r}}{r^3} = \bar{a}_n, \tag{3.3}$$

где $\bar{a}_n$ — суммарный вектор всех возмущающих ускорений относительно ИСК.

Формируя суммарный вектор возмущающих ускорений с использованием моделей, рассмотренных в предыдущих разделах, и интегрируя уравнение (3.3), получим текущий вектор состояния КА $\bar{\xi}$ на любой заданный момент времени. При этом, чем более точную модель возмущающих ускорений мы будем использовать и чем более точно будем интегрировать уравнения движения, тем более точные значения вектора $\bar{\xi}$ получим. Вопросы влияния точности моделирования составляющих $\bar{a}_n$ были исследованы в 2.1–2.4. При этом моделирование проводилось с использованием метода Рунге — Кутты четвертого порядка с шагом 1 с.

Интегрирование может проводиться с разным шагом. Чем больше шаг интегрирования, тем выше скорость, а это важно при моделировании движения КА на бортовых вычислительных средствах, имеющих ограниченные ресурсы по быстродействию и памяти. Однако при выборе большого шага интегрирования снижается точность интегрирования, что равноценно наличию неучтенного возмущающего ускорения. Поэтому для выбора шага интегрирования важным вопросом является знание зависимости точности интегрирования от шага. Эта зависимость может быть разной для высоких и низких орбит. На рис. 3.1, 3.2 приведены графики зависимости погрешностей интегрирования по трем координатам ОСК от шага интегрирования для низких и высоких околокруговых орбит соответственно, из которых следует, что для низких орбит интегрирование с шагом 10 с на интервале 3 сут дает ошибку по продольной дальности 2,4 м, а по боковой дальности — 0,1 м. Такая ошибка соответствует возмущающему ускорению $\sim 10^{-11}$ м/с^2, а это означает, что для низких околокруговых орбит шаг интегрирования 10 с всегда дает ошибку меньше неучтенных возмущающих ускорений и может выбираться для интегрирования на любой интервал времени.

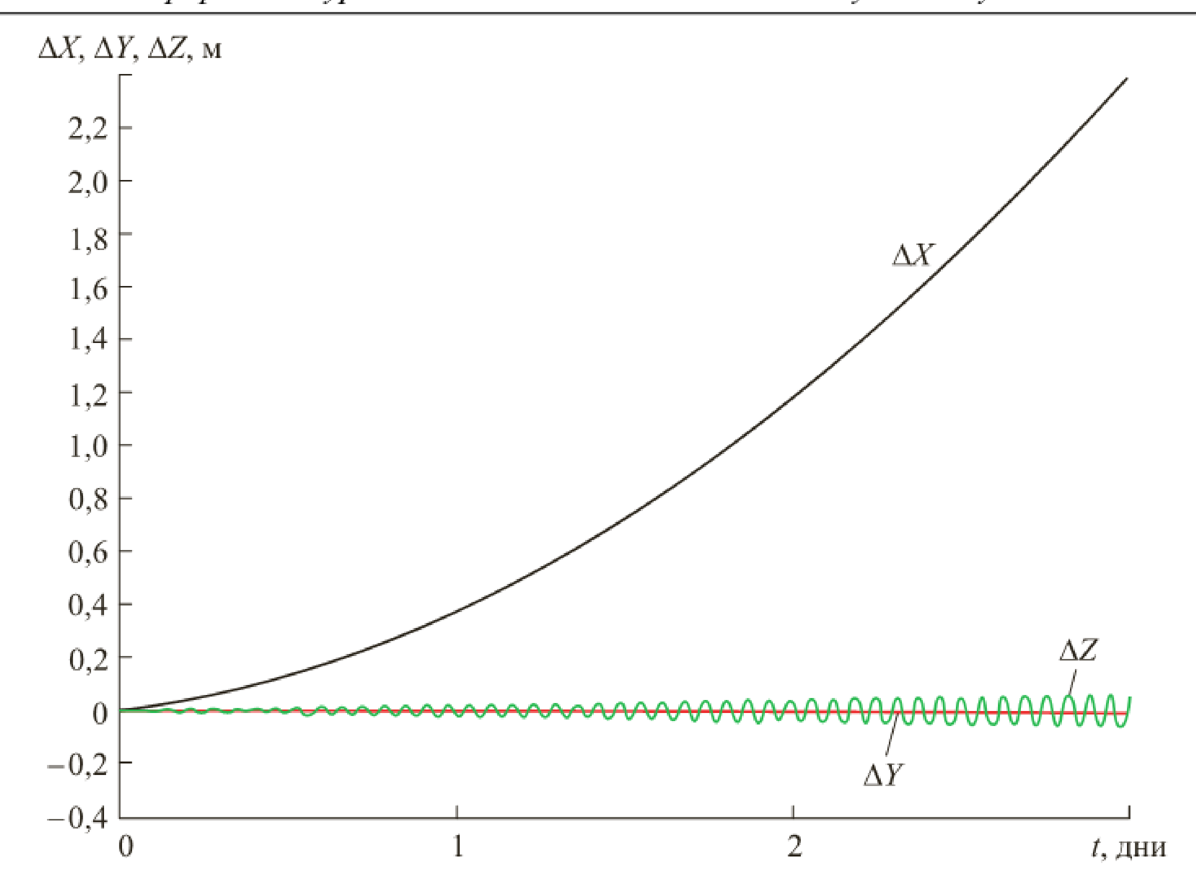


Рис. 3.1. Методическая ошибка прогноза орбиты низкоорбитального КА при шаге интегрирования 10 с

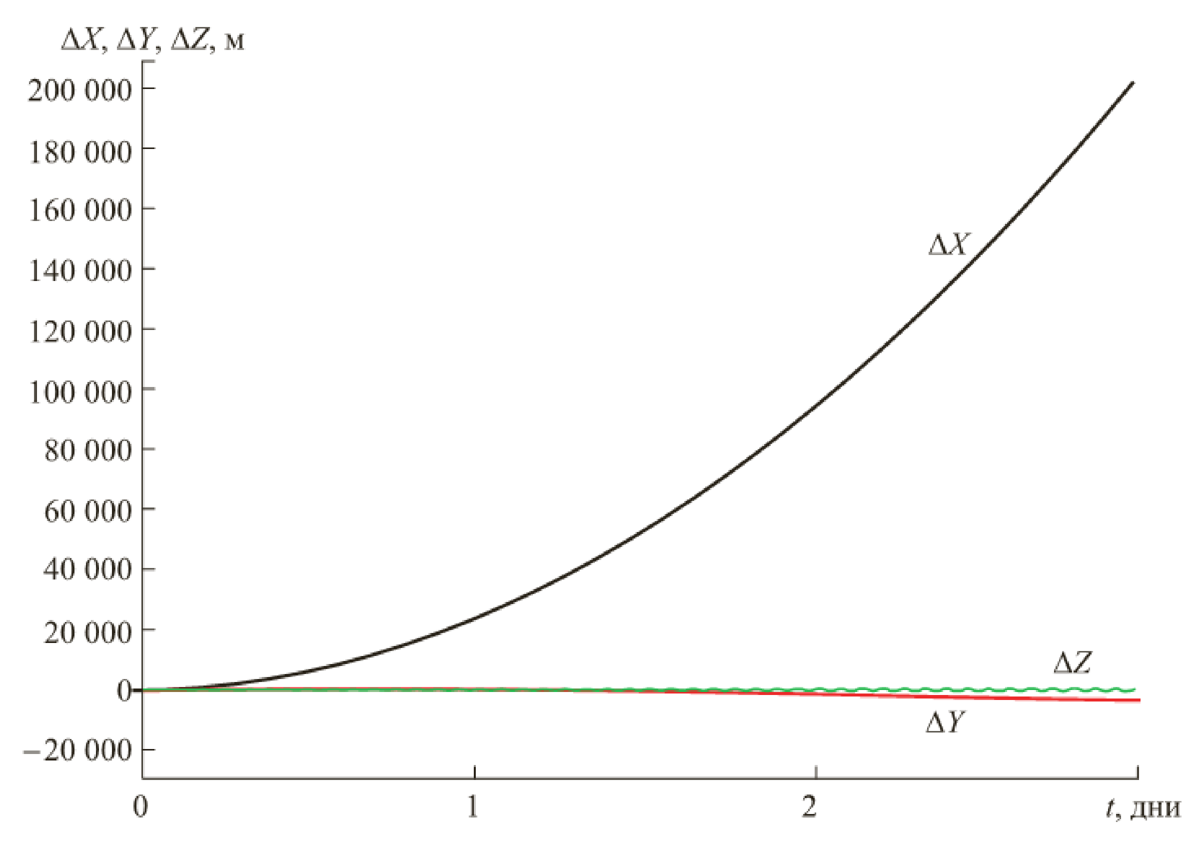


Рис. 3.2. Методическая ошибка прогноза орбиты низкоорбитального КА при шаге интегрирования 100 с

При шаге интегрирования 100 с ошибка возрастает в 10^5 раз и соответствует неучтенному ускорению 10^{-6} м/с^2. Такой шаг может использоваться только при интегрировании на короткие интервалы времени.

Для высоких орбит шаг интегрирования 10 с и 100 с обеспечивает точное решение. Шаг интегрирования 450 с на интервале 3 сут приводит к ошибке интегрирования 1000 м по продольной дальности и 200 м по боковой дальности.

3.2. Возможные способы повышения быстродействия алгоритмов. Экономичный метод интегрирования уравнений движения КА

Прогноз орбиты КА на заданный интервал времени предполагает интегрирование уравнений движения (2.42), которое может выполняться разными численными методами. Важными характеристиками методов интегрирования является их точность при прогнозировании на заданный интервал и быстродействие алгоритма, реализующего соответствующий метод. Достаточно точным и часто используемым методом интегрирования уравнений движения является метод Рунге — Кутты четвертого порядка. Точностные характеристики этого метода в зависимости от шага интегрирования для низких и высоких орбит рассмотрены в 3.1. При прогнозе орбиты КА этим методом, например, на интервал трое суток для низких и высоких орбит при шаге интегрирования 1 с, ошибка прогноза составляет доли миллиметра. Спрогнозированную таким образом орбиту можно принимать за эталонную при исследовании точности прогноза с другим более крупным шагом интегрирования или прогноза, выполняемого другими методами. Точность метода Рунге — Кутты для прогноза низких орбит с шагом 10 с и 100 с демонстрируют графики, приведенные на рис. 3.1 и 3.2, а для прогноза высоких орбит с шагом 10 с, 100 с, 450 с — графики, приведенные на рис. 3.3, 3.4 и 3.5. Приведенные графики позволяют в зависимости от требований решаемой задачи выбирать шаг интегрирования для метода Рунге — Кутты.

Однако указанный метод требует для своей реализации значительного объема вычислений и не всегда может быть использован, особенно при решении различного рода задач прогноза орбит КА в бортовых вычислительных средствах. Большой объем вычислений связан с тем, что метод Рунге — Кутты требует на каждом шаге четыре раза вычислять правую часть уравнений движения (2.42). Если речь идет о выполнении точного прогноза, то в правой части уравнений (2.42) при вычислении вектора возмущений $\bar{a}_n$ необходимо учитывать большое количество составляющих, вычисление которых требует значительных вычислительных ресурсов (см. 2.1–2.6). Но при разработке бортового ПО всегда приходится сталкиваться с дефицитом этих ресурсов, поэтому вопрос повышения быстродействия алгоритмов, решающих ту или иную задачу, всегда актуален. Ниже рассмотрен алгоритм прогнозирования орбит КА, который на каждом вычислительном шаге

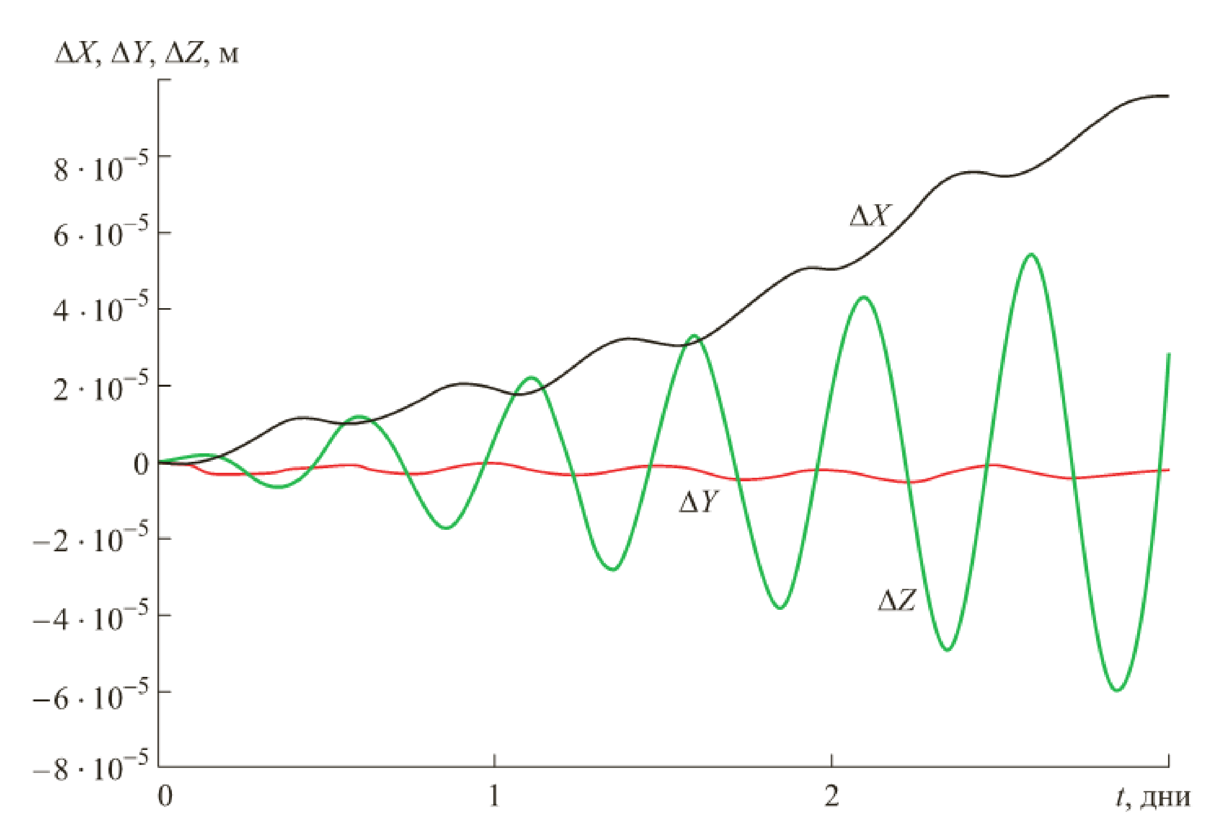


Рис. 3.3. Методическая ошибка прогноза орбиты высокоорбитального КА при шаге прогноза 10 с

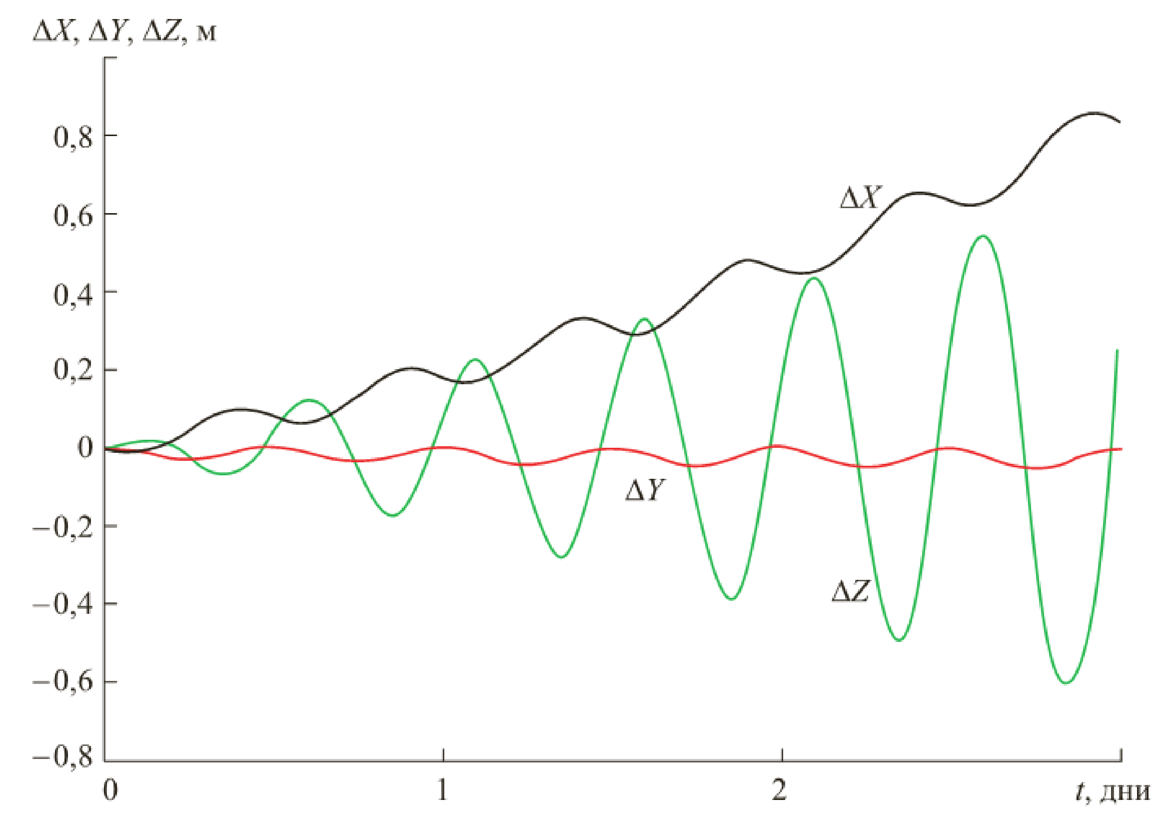


Рис. 3.4. Методическая ошибка прогноза орбиты высокоорбитального КА при шаге прогноза 100 с

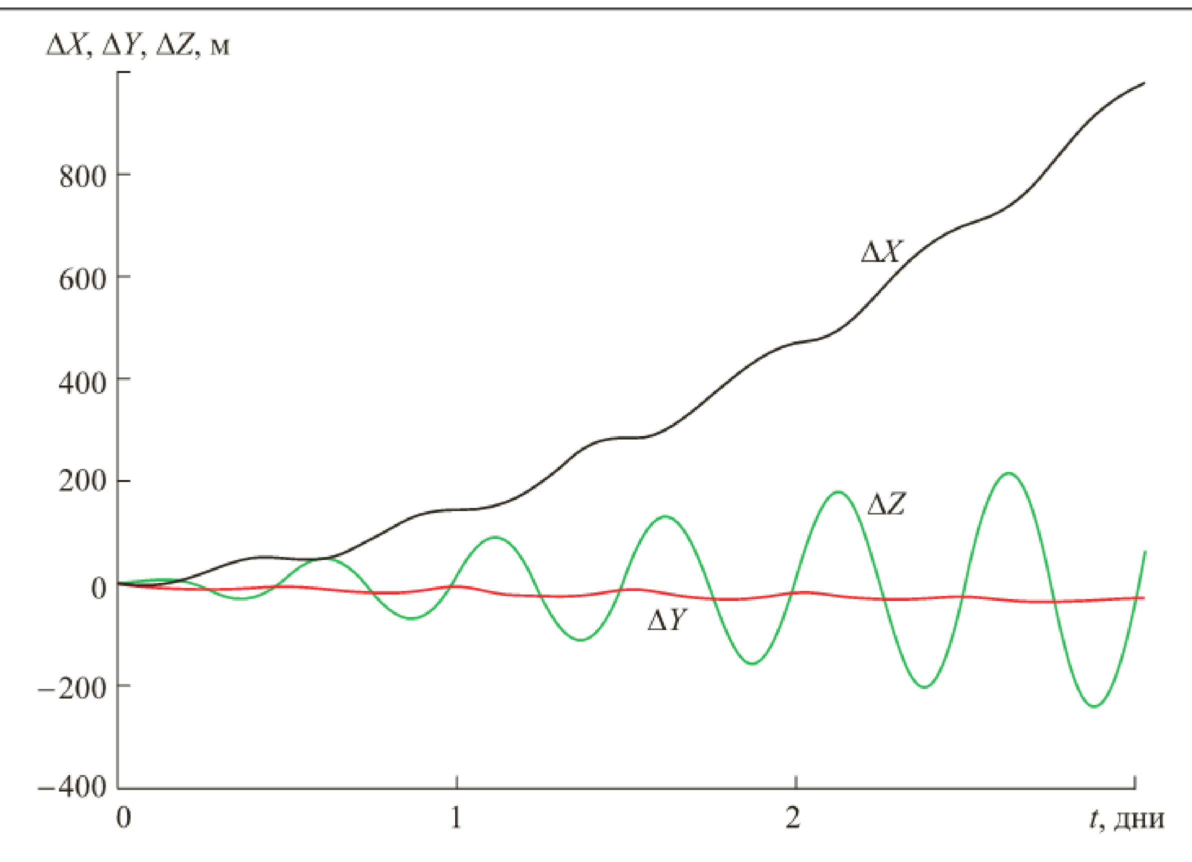


Рис. 3.5. Методическая ошибка прогноза орбиты высокоорбитального КА при шаге прогноза 450 с

требует только однократного расчета правой части уравнений движения (2.42) и по быстродействию в ~5 раз превышает метод Рунге — Кутты. При этом точность интегрирования остается достаточно высокой и во многих случаях удовлетворяет требованию точности выполняемого прогноза.

Наиболее известным и простым методом интегрирования уравнений движения КА, требующим однократного вычисления правой части уравнений движения на каждом шаге, является метод Эйлера, имеющий следующий вид:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \bar{V}_i \Delta t + \frac{1}{2} \bar{a}_i \Delta t^2; \qquad (3.4)$$
$$\bar{V}_{i+1} = \bar{V}_i + \bar{a}_i \Delta t,$$

где $\bar{X}_i, \bar{V}_i$ — известные текущие векторы координат и скорости КА на i-м шаге; Δt — шаг интегрирования; $\bar{a}_i$ — вектор ускорения КА относительно ГСК, представляющий собой правую часть уравнений (2.42).

Хотя метод Эйлера по быстродействию в ~5 раз превосходит метод Рунге — Кутты, недостатком его является низкая точность. Для демонстрации точности метода Эйлера на рис. 3.6 приведены графики ошибок прогноза орбиты относительно ОСК низкоорбитального КА, выполненного с шагом 1 с на интервале 3 сут, которые показывают, что точность суточного прогноза для низкой орбиты, выполненного с шагом 1 с, составляет ~7000 км. Понятно, что при такой точности прогноза метод Эйлера может использоваться только для короткого прогноза орбиты КА, не превышающего несколько минут.

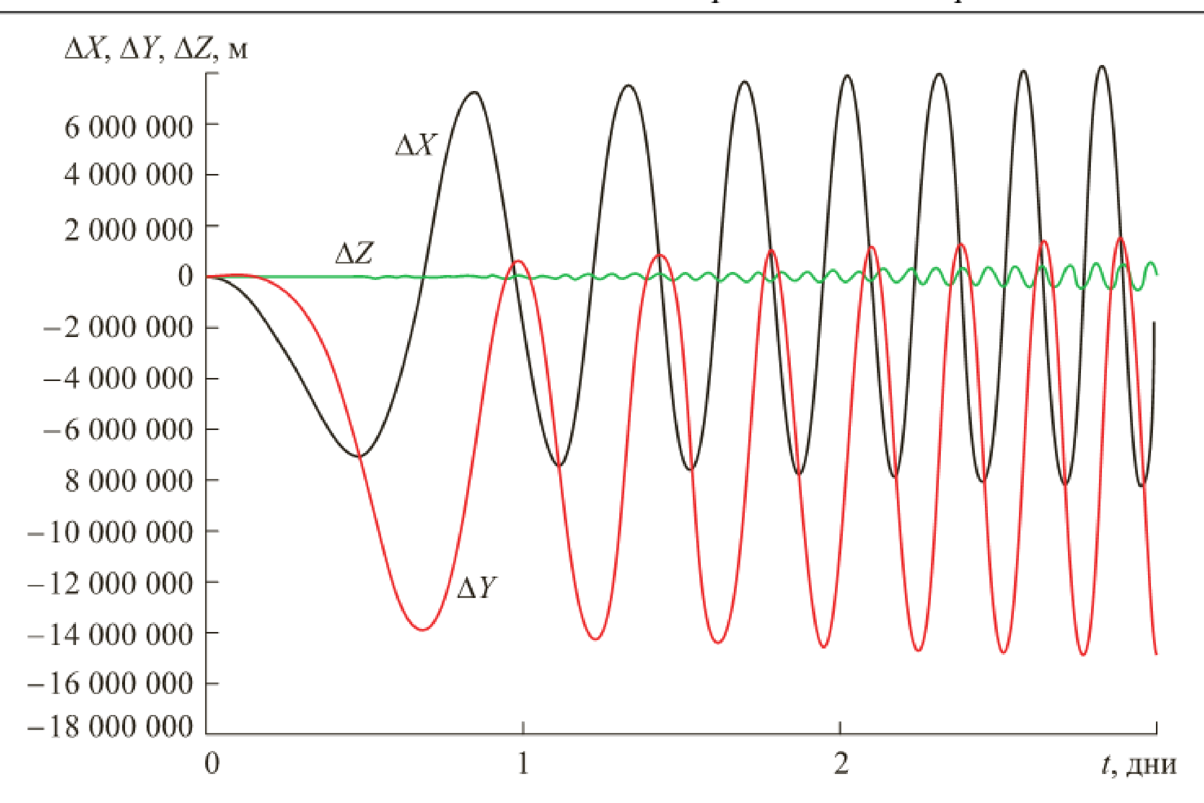


Рис. 3.6. Ошибки прогноза орбиты МКС, выполненного методом Эйлера (шаг 1 с)

Тем не менее существуют алгоритмы интегрирования уравнений движения КА, которые по быстродействию аналогичны методу Эйлера, однако имеют значительно более высокую точность. Опуская выкладки, приведем один из возможных алгоритмов интегрирования системы уравнений движения КА:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{i+1} &= \bar{X}_i + \bar{V}_i\Delta t + \frac{19}{24}\bar{a}_i\Delta t^2 - \frac{5}{12}\bar{a}_{i-1}\Delta t^2 + \frac{1}{8}\bar{a}_{i-2}\Delta t^2 + \frac{19}{180}\omega_0^4\bar{V}_i\Delta t^5; \\ \bar{V}_{i+1} &= \bar{V}_i + \frac{23}{12}\bar{a}_i\Delta t - \frac{4}{3}\bar{a}_{i-1}\Delta t + \frac{5}{12}\bar{a}_{i-2}\Delta t + \frac{3}{8}\omega_0\bar{V}_i\Delta t^4, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\bar{X}_i, \bar{V}_i$ — известные текущие векторы координат и скорости КА на i-м шаге; $\bar{a}_1, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i-2}$ — векторы ускорений КА в ГСК на текущем i-м и предыдущих $(i-1)$ и $(i-2)$ шагах; Δt — шаг интегрирования; ω_0 — средняя орбитальная угловая скорость КА.

По быстродействию алгоритмы (3.5) аналогичны алгоритмам метода Эйлера (3.4), так как основное время вычислений затрачивается на формирование вектора ускорений $\bar{a}_i$. А в обоих методах вычисление этого вектора на каждом шаге выполняется только один раз.

На рис. 3.7 и 3.8 приведены графики ошибок трехсуточного прогноза относительно ОСК, выполненного по алгоритму (3.5) с шагом 1 с и 10 с. На рис. 3.9–3.11 приведены аналогичные графики для прогноза высокоорбитального КА, выполненного с шагом 1 с, 10 с и 100 с.

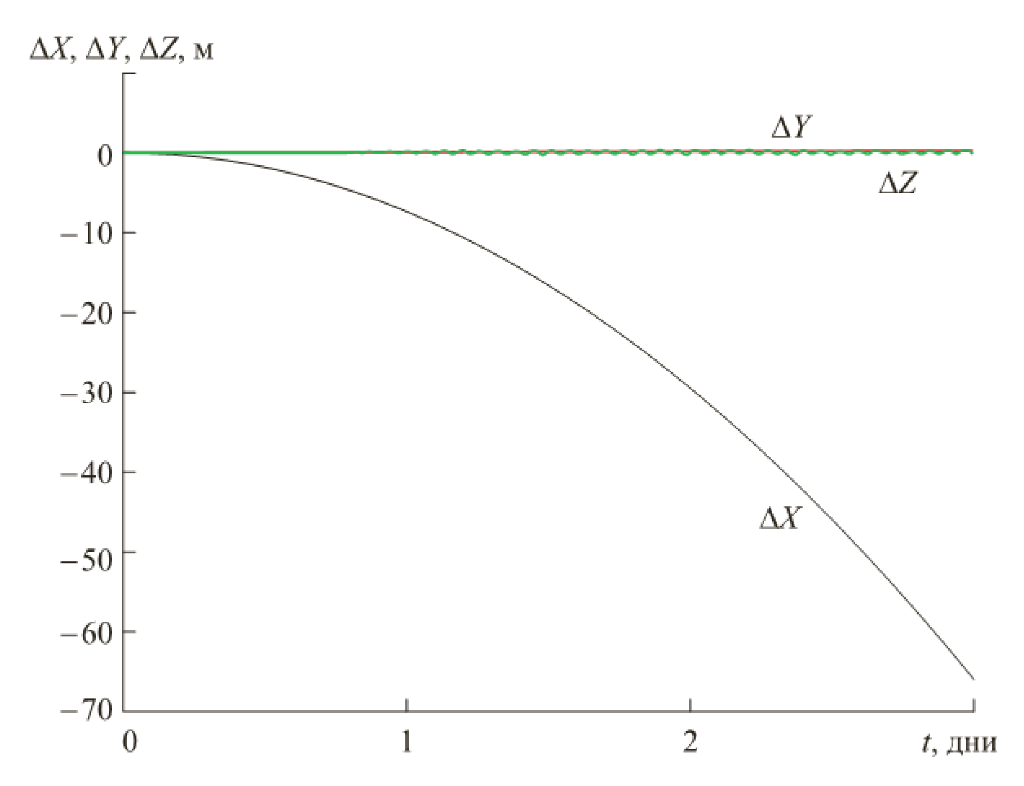


Рис. 3.7. Ошибки прогноза, выполненные по алгоритму (3.5) для орбиты МКС (шаг 1 с)

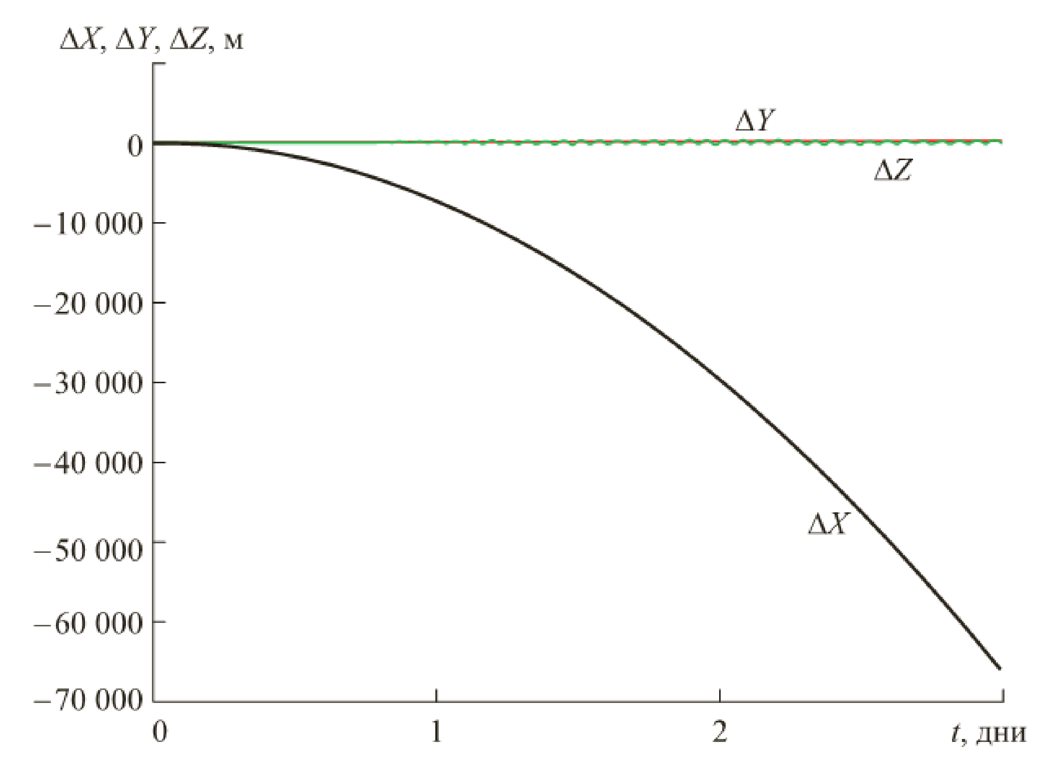


Рис. 3.8. Ошибки прогноза для орбиты МКС (шаг 10 с)

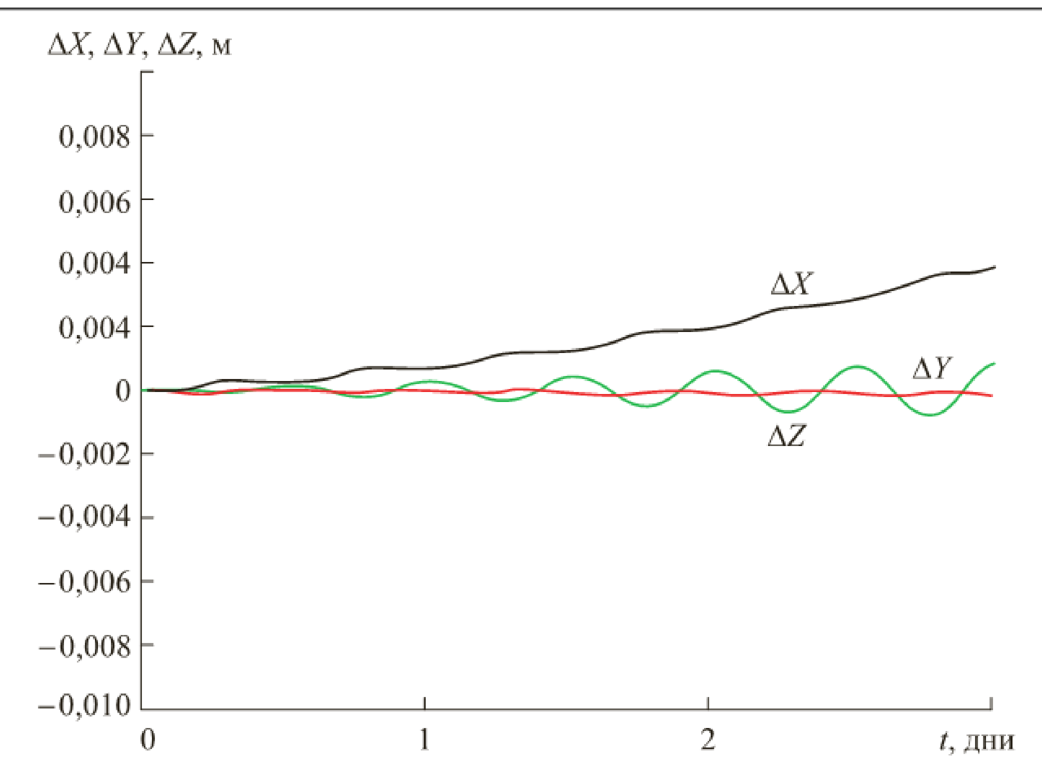


Рис. 3.9. Ошибки прогноза для орбиты GPS (шаг 1 с)

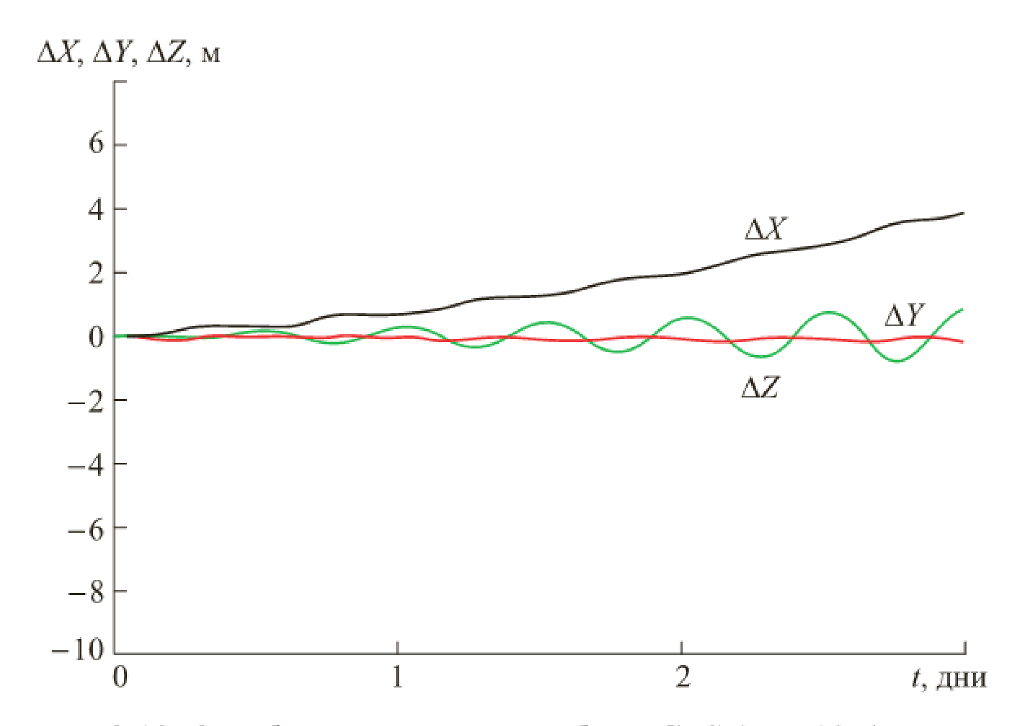


Рис. 3.10. Ошибки прогноза для орбиты GPS (шаг 10 с)

Из приведенных графиков видно, что точность суточного прогноза с шагом 1 с для низких орбит составляет ~7 м, для высоких — 1 мм. Такая точность достаточна для решения практически любых задач суточного прогноза для низкоорбитальных и высокоорбитальных КА. Графики точности прогноза для шагов интегрирования 10 с и 100 с позволяют выбрать шаг интегрирования для решения конкретных задач в зависимости от интервала прогноза и его требуемой точности.

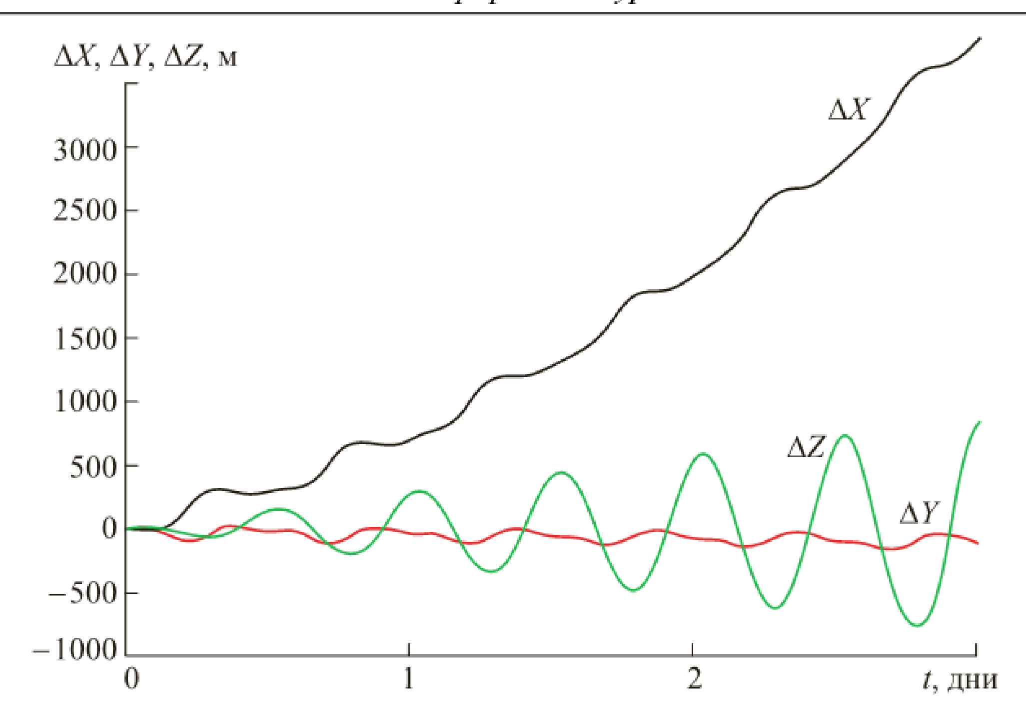


Рис. 3.11. Ошибки прогноза для орбиты GPS (шаг 100 с)

Таким образом, по алгоритмам (3.5) можно выполнять прогноз орбит КА с достаточно высокой точностью и при этом его быстродействие в ~5 раз выше быстродействия прогноза методом Рунге — Кутты четвертого порядка, что является важным преимуществом при решении задач прогноза орбит КА на бортовых вычислительных средствах.

3.3. Представление вектора состояния КА в виде вектора координат и его приращения. Метод интегрирования уравнений движения КА в приращениях

Ранее вектор состояния КА был представлен в виде векторов координат и скорости КА относительно какой-либо системы координат, например, ГСК. Зная вектор состояния КА на какой-то момент времени, путем прогноза можно определить этот вектор на любой другой момент времени. Прогноз выполняется интегрированием уравнений движения КА от начального момента t_0 до заданного момента t. Интегрирование проводят различными методами, например, методом Рунге — Кутты.

Для повышения точности вектора состояния, формируемого в процессе интегрирования уравнений движения, осуществляют его измерения различными измерительными средствами, по результатам которых выполняют коррекцию вектора состояния, компенсирующую ошибки интегрирования, обусловленные ошибками модели движения и ошибками метода интегрирования. Такой процесс называется *динамической фильтрацией измерений* при формировании оценки вектора состояния.

Подходящим измерительным средством текущего вектора состояния является АСН, в реальном времени измеряющая текущие векторы коорди-

нат и скорости КА. Эти измерения могут непосредственно применяться для коррекции. При этом процесс коррекции текущей оценки вектора состояния существенно упрощается, если измеряется вектор, который при отсутствии ошибок измерений и точной модели движения КА должен быть равен формируемой оценке. Однако на самом деле АСН измеряет вектор координат и вектор приращения координат за секунду, предшествующую измерению.

Для наземных объектов, как правило, этот вектор приращения координат за секунду практически равен вектору скорости объекта в момент измерений. Для КА вектор скорости существенно отличается от вектора приращения координат за предшествующую секунду. Например, для низкоорбитальных КА это отличие составляет ~5 м/с. Поэтому, чтобы использовать измерение приращения для коррекции текущей оценки векторов положения и скорости КА, требуется преобразовать вектор приращения в вектор скорости, что требует дополнительных вычислительных ресурсов ЦВМ КА.

Для упрощения процесса динамической фильтрации измерений АСН введем другой вид представления вектора состояния КА, в котором вместо шестимерного вектора состояния

$$\bar{\zeta}_i = \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{V}_i \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где $\bar{X}_i, \bar{V}_i$ — векторы координат и скорости в i-й момент времени, рассматривается вектор состояния вида

$$\zeta_i = \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \Delta\bar{X}_i \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где $\Delta\bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}$ — приращение вектора координат за секунду, предшествующую моменту i-го измерения.

Рассмотрим алгоритмы прогноза вектора состояния КА, представленного в виде (3.7), и уравнения движения (2.42) относительно ГСК:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}} &= \bar{V}; \\ \dot{\bar{V}} &= \bar{a}\left(\bar{X}\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\bar{X}, \bar{V}$ — векторы координат и скорости КА относительно ГСК; $\bar{a}\left(\bar{X}\right)$ — вектор ускорений, зависящий от координат $\bar{X}$, включающий все учитываемые возмущения.

Представим вектор текущего состояния КА в виде (3.7).

Выразим векторы координат КА на ($i+1$) и ($i-1$) шагах через значения $\bar{X}_i$, $\bar{V}_i\left(\bar{X}_i\right)$ на i-м шаге с точностью до третьей производной ускорения $\dddot{\bar{a}}$:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \bar{V}_i\Delta t + \frac{1}{2}\bar{a}_i\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dot{\bar{a}}_i\Delta t^3 + \frac{1}{24}\ddot{\bar{a}}_i\Delta t^4 + \frac{1}{120}\dddot{\bar{a}}_i\Delta t^5;$$
$$\bar{X}_{i-1} = \bar{X}_i - \bar{V}_i\Delta t + \frac{1}{2}\bar{a}_i\Delta t^2 - \frac{1}{6}\dot{\bar{a}}_i\Delta t^3 + \frac{1}{24}\ddot{\bar{a}}_i\Delta t^4 - \frac{1}{120}\dddot{\bar{a}}_i\Delta t^5. \tag{3.9}$$

Из равенств (3.9) получим выражение для вектора приращения координат на (i+1)-м шаге через его значение на i-м шаге:

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \bar{a}_i\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_i\Delta t^4. \tag{3.10}$$

Производные ускорения $\dot{\bar{a}}_i$, $\ddot{\bar{a}}_i$ для околокруговых орбит можно представить в виде

$$\dot{\bar{a}}_i = -\omega_0^2\frac{\Delta\bar{X}_i}{\Delta t};$$
$$\ddot{\bar{a}}_i = -\omega_0^2\bar{a}_i. \tag{3.11}$$

Подставив значения векторов $\dot{\bar{a}}_i$, $\ddot{\bar{a}}_i$ в выражение (3.11), после преобразования получим

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \left(1 - \frac{1}{12}\omega_0^2\Delta t^2\right)\bar{a}_i\Delta t^2. \tag{3.12}$$

Значение вектора координат $\bar{X}_{i+1}$ на (i+1)-м шаге получим по формуле

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \Delta\bar{X}_{i+1}. \tag{3.13}$$

Алгоритмы (3.12) и (3.13) позволяют по значениям вектора состояния $\bar{X}_i$ $\Delta\bar{X}_i$ на текущем i-м шаге определить вектор состояния $\bar{X}_{i+1}$, $\Delta\bar{X}_{i+1}$ на следующем (i+1)-м шаге. Для этого требуется вычислить значение вектора ускорения $\bar{a}_i$, зависящее только от вектора координат $\bar{X}_i$, на i-м шаге, а затем по алгоритмам (3.12) и (3.13) найти значение вектора состояния на следующем шаге. Реализация алгоритма прогноза вектора состояния на один шаг требует однократного вычисления вектора ускорения $\bar{a}_i$, в отличие от алгоритма Рунге — Кутты четвертого порядка, требующего четырехкратного вычисления этого вектора на одном шаге. В конечном счете, объем вычислений на каждом шаге для предлагаемого алгоритма оказывается в ~5 раз меньше, чем для метода Рунге — Кутты четвертого порядка, традиционно используемого для прогноза орбит КА.

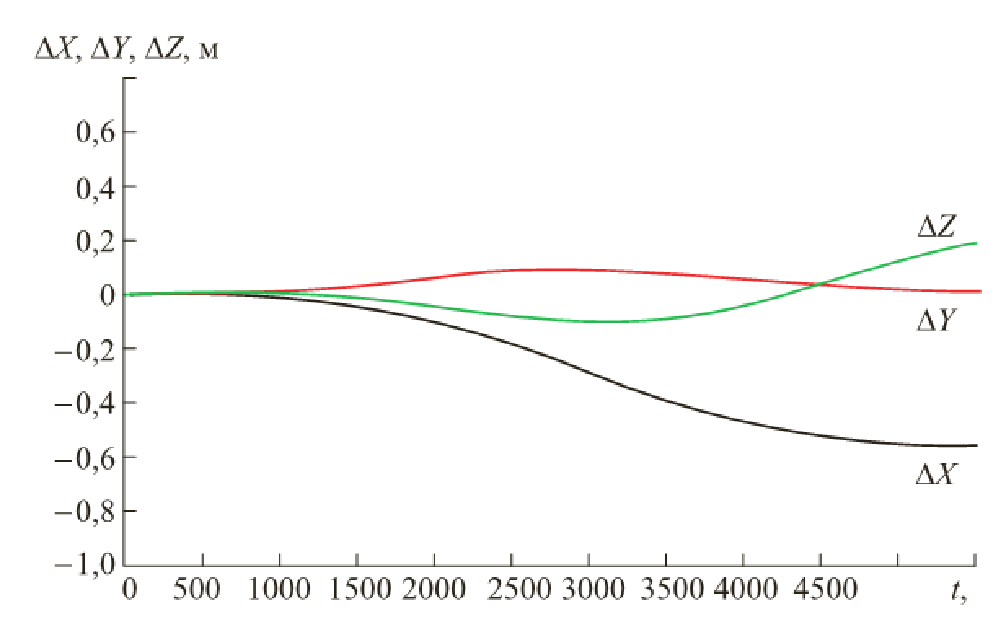


Рис. 3.12. Ошибки прогноза орбиты МКС на интервале 1 виток (шаг 1 с)

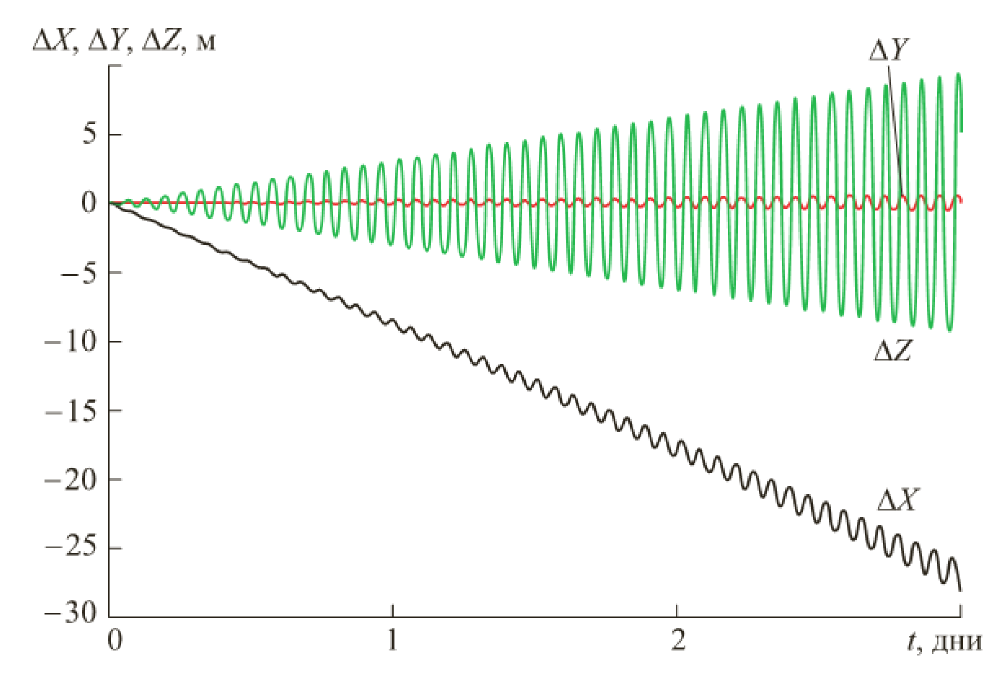


Рис. 3.13. Ошибки прогноза орбиты МКС (шаг 1 с)

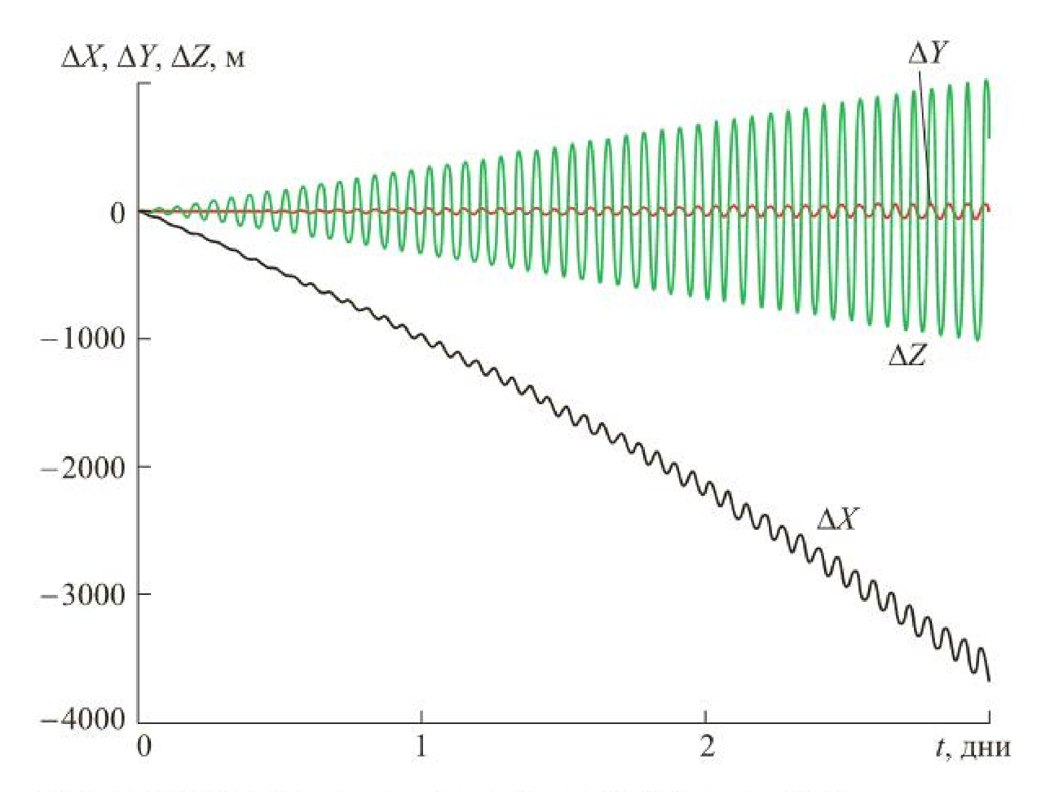


Рис. 3.14. Ошибки прогноза орбиты МКС (шаг 10 с)

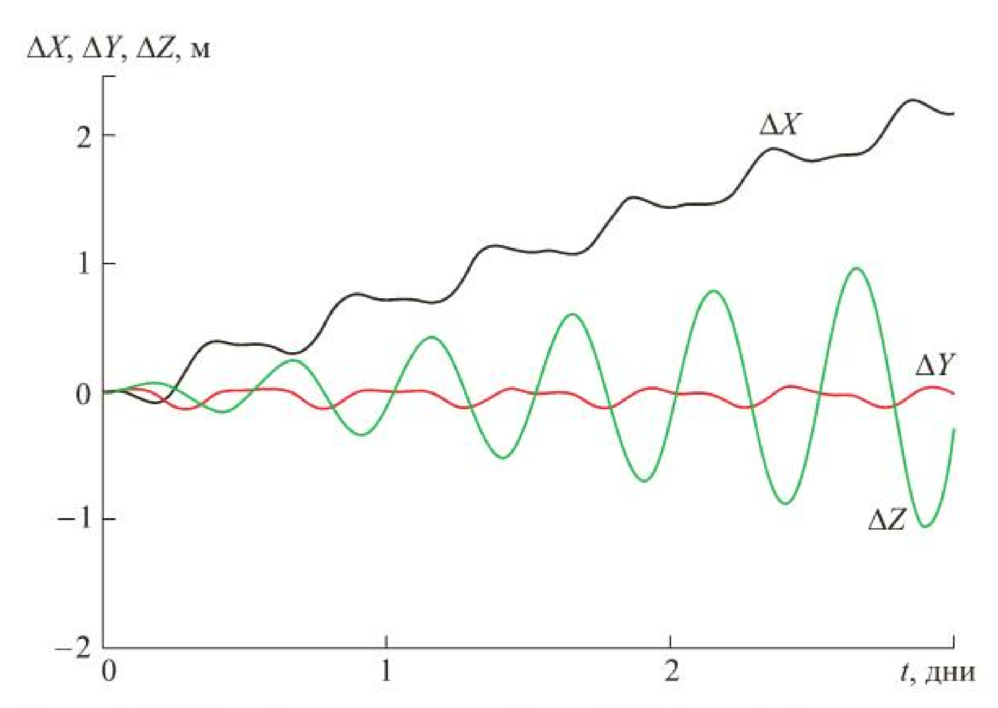


Рис. 3.15. Ошибки прогноза орбиты GPS (шаг 1 с)

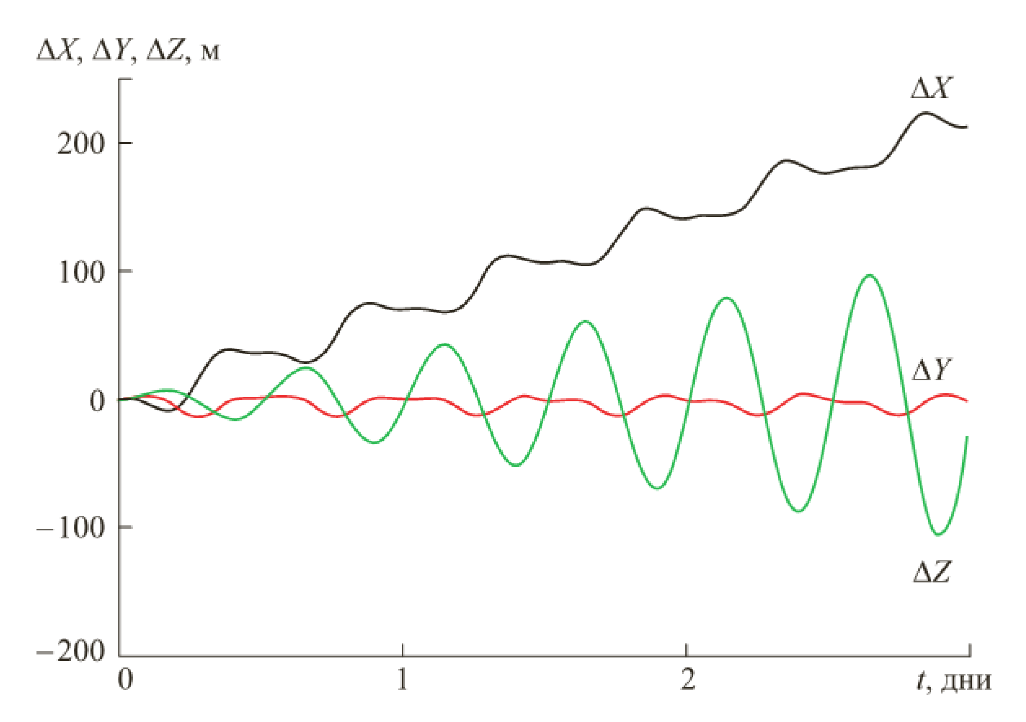


Рис. 3.16. Ошибки прогноза орбиты GPS (шаг 10 с)

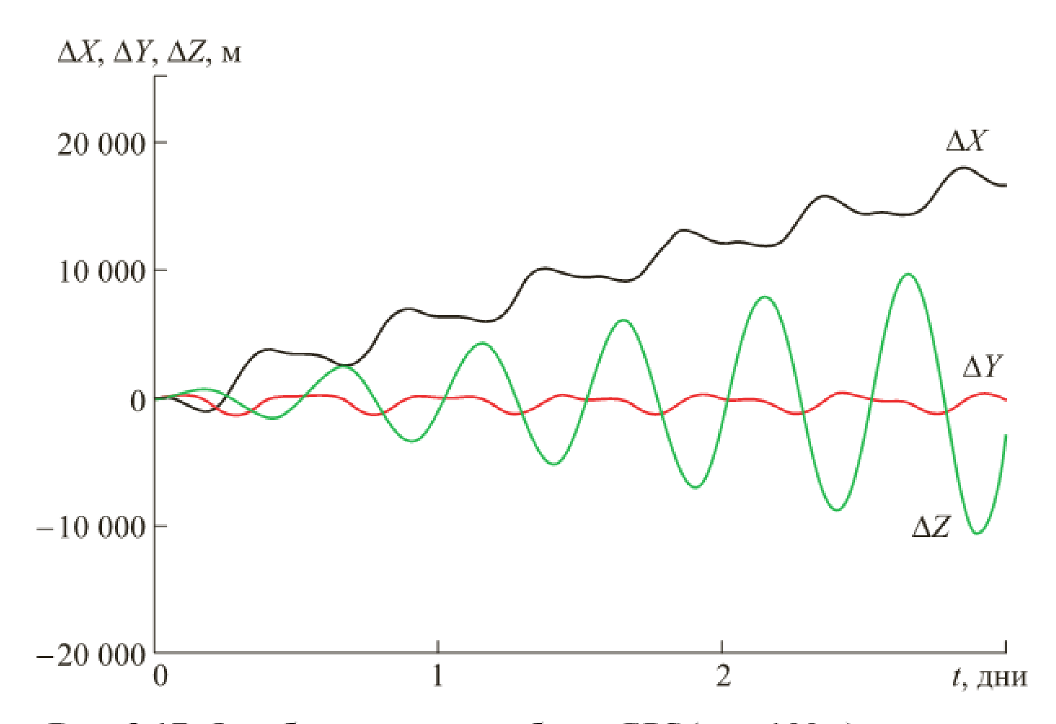


Рис. 3.17. Ошибки прогноза орбиты *GPS* (шаг 100 с)

По объему вычислений предложенный алгоритм аналогичен методу Эйлера, также требующего однократного вычисления вектора ускорения $\overline{a}_i$ на каждом шаге интегрирования уравнений движения. Однако точность прогноза орбиты предложенным методом, как видно из графиков, приведенных на рис. 3.12–3.17, оказывается в сотни раз выше, чем точность прогноза методом Эйлера. Поэтому этот метод вполне может использоваться в бортовом программном обеспечении.

3.4. Интегрирование уравнений движения КА в ИСК БИНС с учетом измерений БИНС

Ранее рассматривали интегрирование уравнений движения КА, находящихся в «свободном полете», когда ускорение КА полностью моделировалось. На практике часто бывают случаи, когда некоторые составляющие ускорения КА не могут моделироваться вообще, либо моделируются с большими ошибками. Например, при движении КА в атмосфере (ракеты или спускаемого аппарата) его аэродинамические ускорения и ускорения от двигателей могут достигать несколько g, а возможная точность моделирования этих ускорений не превышает 10 %. Понятно, что при такой точности не возможен сколько-нибудь точный прогноз орбиты КА или формирование текущей оценки вектора состояния. В этом случае используют различные инерциальные методы измерений этих ускорений, позволяющие в реальном времени осуществлять интегрирование уравнений движения КА и формировать текущую оценку его вектора состояния.

Наиболее универсальным инструментом, обеспечивающим такие измерения, является бесплатформенная инерциальная навигационная система (БИНС), включающая систему датчиков угловой скорости (ДУС) и систему акселерометров (Акс). Не вдаваясь в детали аппаратной реализации датчиковой аппаратуры отметим, что БИНС измеряет проекции абсолютной угловой скорости КА на оси связанной системы координат КА (ССК) и проекции «кажущихся» ускорений КА на оси ССК. Кажущимися ускорениями называются ускорения, обусловленные негравитационными силами, такими как аэродинамические силы или силы от реактивных двигателей.

Гравитационные силы, связанные с Землей и другими планетами, акселерометрами БИНС не воспринимаются. Следует отметить, что поскольку измерения датчиков считываются ЦВМ КА с определенной дискретностью (тактом), реально в ЦВМ поступают приращения углов поворотов КА вокруг осей ССК и приращения проекций кажущейся скорости на оси ССК за время такта. В ЦВМ осуществляется обработка измерений датчиков БИНС. В результате этой обработки формируется матрица (или кватернион) перехода от некоторой инерциальной системы координат ИСК БИНС, совпадавшей с ССК в начальный момент работы БИНС текущей ССК, и проекции приращений кажущейся скорости КА за время текущего такта на оси этой ИСК. Матрица перехода $A_{\text{ИСК—ССК}}$ формируется путем интегрирования кинематических уравнений углового движения КА. С учетом знания этой матрицы осуществляется расчет измерений кажущейся скорости. Определение матрицы перехода $A_{\text{ИСК—ГСК}}$ от ИСК БИНС к ГСК или ИСК $J2000$ обеспечивает система ориентации КА.

Рассмотрим задачу формирования текущей оценки орбиты КА при воздействии на КА значительных негравитационных ускорений с использованием измерений БИНС. Будем предполагать, что на каждом такте БИНС формирует матрицу $A_{\text{ИСК—ССК}}$ и вектор приращения кажущейся скорости в систе-

ме координат ИСК БИНС. Рассмотрим уравнения движения КА относительно ИСК БИНС:

$$\dot{\bar{X}} = \bar{V};\\ \dot{\bar{V}} = \bar{a}_{\text{г}} + \bar{a}_{\text{и}}, \tag{3.14}$$

где $\bar{a}_{\text{г}}$ — все гравитационные ускорения КА; $\bar{a}_{\text{и}}$ — все инерциальные ускорения, измеряемые БИНС.

Выразим векторы координат КА на (i+1) и (i–1) шагах через значения $\bar{X}_i, \bar{V}_i, \bar{a}_{\text{г}i}, \bar{a}_{\text{и}}$ на i-м шаге и точностью до третьей производной ускорения:

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \bar{V}_i\Delta t + \frac{1}{2}\bar{a}_{\text{г}\,i}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\bar{a}_{\text{и}\,i}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dot{\bar{a}}_{\text{г}\,i}\Delta t^3 + \frac{1}{6}\dot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^3 +\\ + \frac{1}{24}\ddot{\bar{a}}_{\text{г}\,i}\Delta t^4 + \frac{1}{24}\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^4;\\ X_{i-1} = \bar{X}_i - \bar{V}_i\Delta t + \frac{1}{2}\bar{a}_{\text{г}i}\Delta t^2 + \frac{1}{2}\bar{a}_{\text{и}\,i}\Delta t^2 - \frac{1}{6}\dot{\bar{a}}_{\text{г}i}\Delta t^3 - \frac{1}{6}\dot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^3 +\\ + \frac{1}{24}\ddot{\bar{a}}_{\text{г}\,i}\Delta t^4 + \frac{1}{24}\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^4. \tag{3.15}$$

Из равенства (3.15) получим выражение для вектора приращения координат на (i+1)-м шаге через его значение на i-м шаге:

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \bar{a}_{\text{г}\,i}\Delta t^2 + \bar{a}_{\text{и}\,i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{г}\,i}\Delta t^4 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^4. \tag{3.16}$$

В правой части выражения (3.16) вектор $\Delta\bar{X}_i$ известен, так как он сформирован на предыдущем шаге. Вектор гравитационных ускорений $\bar{a}_{\text{г}i}$ известен из модели движения КА. Определим вектор $\ddot{\bar{a}}_{\text{г}i}$. Учитывая малый размер этого вектора, получим его выражение через приближенное значение вектора $\bar{a}_{\text{г}i}$ в виде

$$\bar{a}_{\text{г}} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{X}, \tag{3.17}$$

где $r^3 = \left|\bar{X}\right|^3$.

Здесь пренебрегли всеми гармониками гравитационного поля Земли и влиянием Луны и Солнца на движение КА. Определим теперь производные вектора $\bar{a}_{\text{г}}$:

$$\dot{\bar{a}}_{\text{г}} = -\frac{\mu}{r^3}\dot{\bar{X}} + \frac{3\mu}{r^4}\dot{r}\bar{X}_j;\\ \ddot{\bar{a}}_{\text{г}} = -\frac{\mu}{r^3}\ddot{\bar{X}} + \frac{6\mu}{r^4}\dot{r}\dot{\bar{X}} + \frac{3\mu}{r^4}\ddot{r}\bar{X} - \frac{12\mu}{r^5}\dot{r}^2\bar{X}. \tag{3.18}$$

Отметим, что ранее предполагалось, что орбита КА близка к круговой и поэтому пренебрегали членом, включающим скорость роста модуля вектора координат $\dot{r}$. Здесь будем рассматривать более общий случай, когда орбита может быть эллиптической. Тогда в выражении (3.18) необходимо учитывать $\dot{r}$.

Скорость увеличения расстояния от КА до центра Земли

$$\dot{r} = \frac{\dot{\bar{X}} \cdot \bar{X}}{r}. \qquad (3.19)$$

Подставив в выражение (3.18) значение $\ddot{\bar{X}}$ найденное из выражений (3.14) и (3.17), после преобразований получим формулу для $\ddot{\bar{a}}_{\text{г}}$:

$$\ddot{\bar{a}}_{\text{г}} = \left(\frac{\mu}{r^3}\right)^2 \bar{X} + \frac{6\mu}{r^3}\frac{\dot{r}}{r}\dot{\bar{X}} + \frac{3\mu}{r^3}\left(\frac{\ddot{r}}{r} - \frac{4\dot{r}}{r^2}\right)\bar{X}. \qquad (3.20)$$

Продифференцировав выражение (3.19), после преобразований получим

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{\dot{\bar{X}}^2}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r}. \qquad (3.21)$$

Подставив значение $\ddot{r}$ из равенства (3.21) в равенство (3.20), после преобразований получим выражение для второй производной гравитационного ускорения:

$$\ddot{\bar{a}}_{\text{г}} = \omega_0^2\left(3\frac{\left(\dot{\bar{X}}\right)^2}{r^2} - 2\omega_0^2 - \frac{15\dot{r}^2}{r^2}\right)\bar{X} + 6\omega_0^2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\bar{X}}, \qquad (3.22)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3};$$

$$r = \left|\bar{X}\right|;$$

$$\dot{r} = \frac{\dot{\bar{X}} \cdot \bar{X}}{r}.$$

Выражение (3.22) позволяет для любых значений векторов $\bar{X}$ и $\dot{\bar{X}}$ (или $\Delta\bar{X}$) найти вектор $\ddot{\bar{a}}_{\text{г}}$.

Теперь определим значение векторов $\bar{a}_{\text{и}i}$ и $\ddot{\bar{a}}_{\text{и}i}$, входящих в правую часть равенства (3.16). Будем предполагать, что по результатам обработки измерений БИНС на каждом такте определяются приращения кажущейся

скорости ΔV_i в проекции на оси ИСК БИНС. Приращение кажущейся скорости на (i+1)-м и (i–1)-м тактах определяются по формуле

$$\Delta\bar{V}_{i+1} = \int_0^{\Delta t} \bar{a}_{\text{и}}(t)\,dt = \int_0^{\Delta t}\left(\bar{a}_{\text{и}\,i} + \dot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}t + \frac{1}{2}\ddot{\bar{a}}ut^2\right)dt =$$

$$= \bar{a}_{\text{и}\,i}\Delta t + \frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^3; \qquad (3.23)$$

$$\Delta\bar{V}_i = \bar{a}_{\text{и}\,i}\Delta t - \frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^3.$$

Исключив из системы уравнений (3.23) вектор $\dot{\bar{a}}_{\text{и}i}$, найдем значение вектора $\bar{a}_{\text{и}\,i}$ через приращения $\Delta\bar{V}_i$ и $\Delta\bar{V}_{i+1}$:

$$\bar{a}_{\text{и}\,i}\Delta t = \frac{\Delta\bar{V}_{i+1} + \Delta\bar{V}_i}{2} - \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^3. \qquad (3.24)$$

Подставив значение выражения $\bar{a}_{\text{и}\,i}\Delta t$ из (3.24) в (3.16), получим формулу для формирования вектора приращения координат КА на (i+1)-м шаге:

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \bar{a}_{\text{г}\,i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{г}\,i}\Delta t^4 + \frac{\Delta\bar{V}_{i+1} + \Delta\bar{V}_i}{2}\Delta t - \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^4. \qquad (3.25)$$

В выражение (3.25) для приращения вектора координат на (i+1)-м шаге входит приращение вектора координат на текущем шаге $\Delta\bar{X}_i$, значение гравитационного ускорения на текущем шаге $\bar{a}_{\text{г}\,i}$, значение второй производной гравитационного ускорения на текущем шаге $\ddot{\bar{a}}_{\text{г}\,i}$, формируемое по формуле (3.22), и значения приращений кажущейся скорости в системе координат ИСК БИНС на (i+1)-м и i-м шагах $\Delta\bar{V}_{i+1}$ и $\Delta\bar{V}_i$, формируемые БИНС. В правую часть выражения (3.25) входит также вектор $\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}$, которым в большинстве практических задач можно пренебречь. При необходимости этот вектор может быть оценен через значение приращения кажущейся скорости на предыдущем (i–1)-м шаге:

$$\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}\Delta t^3 = \Delta\bar{V}_{i+1} - 2\Delta\bar{V}_i + \Delta\bar{V}_{i-1}. \qquad (3.26)$$

Подставив значение вектора $\ddot{\bar{a}}_{\text{и}\,i}$ из выражения (3.26) в (3.25), получим

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \bar{a}_{\text{Г}i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{Г}i}\Delta t^4 + \frac{5\Delta\bar{V}_{i+1} + 8\Delta\bar{V}_i - \Delta\bar{V}_{i-1}}{12}\Delta t\,;$$

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \Delta\bar{X}_{i+1}, \qquad (3.27)$$

т. е. алгоритм формирования приращений векторов координат.

3.5. Алгоритмы расчета приращений кажущейся скорости в БИНС

Для реализации алгоритмов интегрирования уравнений движения необходимо формировать векторы приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_i$ за время Δt_i. Для обеспечения высокой точности интегрирования требуется высокая точность формирования вектора $\Delta\bar{V}_i$, для чего интегрирование этого вектора в БИНС выполняется с более мелким шагом, чем интегрирование уравнений движения. Например, в АСН-М МКС при формировании текущего вектора состояния интегрирование уравнений движения выполняется с шагом 1 с, а формирование приращений кажущейся скорости в БИНС, реализуемой в бортовой вычислительной системе МКС, — с шагом 0,2 с. Рассмотрим алгоритмы формирования приращений кажущейся скорости в ИСК БИНС за время Δt при считывании показаний датчиков БИНС с более мелким шагом h. Будем предполагать, что значение такта Δt кратно шагу h, как это реализовано на МКС. Пусть $A_{\text{ИСК—ССК}}$ — матрица перехода от ИСК БИНС к ССК. Для производной этой матрицы можно записать кинематическое уравнение

$$\dot{A}_{\text{ИСК—ССК}} = \Omega\, A_{\text{ИСК—ССК}}, \tag{3.28}$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$ — матрица вращения; ω_x, ω_y, ω_z — проекции абсолютной угловой скорости КА на ССК.

В идеальном случае ДУС БИНС измеряют приращения углов φ_x, φ_y, φ_z, равные интегралам соответственно от ω_x, ω_y, ω_z за время такта Δt. Значения матриц $\Omega(t)$ и $A_{\text{ИСК—ССК}}(t)$ могут быть представлены в виде

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \dot{\Omega}_0 t;$$
$$A_{\text{ИСК—ССК}}(t) = A_{\text{ИСК—ССК}_0} + \dot{A}_{\text{ИСК—ССК}_0} t + \frac{1}{2}\ddot{A}_{\text{ИСК—ССК}_0} t^2, \tag{3.29}$$

где $\Omega_0, \dot{\Omega}_0 A_{\text{ИСК—ССК}_0}, \dot{A}_{\text{ИСК—ССК}_0}, \ddot{A}_{\text{ИСК—ССК}_0}$ — значения соответствующих матриц на начало $(i+1)$-го такта (момент t_i); t — время от момента t_i.

Введем матрицу углов приращения за время i-го такта:

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{zi} & -\varphi_{yi} \\ -\varphi_{zi} & 0 & \varphi_x \\ \varphi_y & -\varphi_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Для i-го и (i+1)-го тактов с точностью до членов порядка h^3 эта матрица будет иметь вид

$$\varphi_i = \int_{-h}^{0} \left(\Omega + \dot{\Omega}_0 t\right) dt = \Omega_0 h - \frac{1}{2}\dot{\Omega}_0 h^2;$$
$$\varphi_{i+1} = \int_{-\theta}^{h} \left(\Omega + \dot{\Omega}_0 t\right) dt = \Omega_0 h + \frac{1}{2}\dot{\Omega}_0 h^2. \quad (3.31)$$

Через матрицы измерений φ_i, φ_{i+1} на i-м и (i+1)-м шагах из равенства (3.31) определим значение матриц $\Omega_0 h$ и $\dot{\Omega}_0 h^2$:

$$\Omega_0 h = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2}; \quad \dot{\Omega}_0 h^2 = \varphi_{i+1} - \varphi_i. \quad (3.32)$$

Из второго уравнения (3.29) с учетом равенства (3.28) получим значение матрицы $A_{\text{ИСК—ССК}}(t)$:

$$A_{\text{ИСК—ССК}}(t) = A_{\text{ИСК—ССК}0} + \Omega_0 A_{\text{ИСК—ССК}0}(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\dot{\Omega}_0 + \Omega_0^2\right) A_{\text{ИСК—ССК}0} t^2. \quad (3.33)$$

Если $A_{\text{ИСК—ССК}}(0) = A_{\text{ИСК—ССК}\,i}$, а $A_{\text{ИСК—ССК}}(h) = A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1}$, то из равенства (3.33) с учетом (3.32) получим рекуррентный алгоритм формирования матрицы $A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1}$:

$$A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1} = \left[E + \varphi_{i+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2}\right)^2\right] A_{\text{ИСК—ССК}\,i}. \quad (3.34)$$

Учитывая, что $\varphi_i \approx \varphi_{i+1}$, с учетом малости φ_i^2, получим рекуррентный алгоритм формирования матрицы $A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1}$ без использования измерений ДУС на предыдущем шаге:

$$A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1} = \left[E + \varphi_{i+1} + \frac{1}{2}\varphi_{i+1}^2\right] A_{\text{ИСК—ССК}\,i}. \quad (3.35)$$

Отметим, что при малых угловых скоростях вращения КА членом $\frac{1}{2}\varphi_{i+1}^2$ в алгоритме (3.35) можно пренебречь. Тогда приближенный алгоритм будет

$$A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1} = (E + \varphi_{i+1})\, A_{\text{ИСК—ССК}\,i}. \quad (3.36)$$

Оценим дрейф БИНС, не учитывая малые члены в алгоритме (3.36). Пусть КА имеет угловую скорость ω, равную 1 °/с, тогда за время такта h ошибка матрицы $A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1}$ составит

$$\Delta A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1} \approx \frac{1}{2}(\omega h)^2. \quad (3.37)$$

Скорость дрейфа для h = 0,2 с будет

$$\dot{A}_{\text{ИСК—ССК}} \approx \frac{\Delta A_{\text{ИСК—ССК}\,i+1}}{h} \approx \frac{1}{2}\omega^2 h \approx 0{,}0017\ {}^\circ/\text{с}. \tag{3.38}$$

При таком дрейфе за час уход БИНС составит ~6°. При учете членов φ_i^2, оцениваемая методическая ошибка ухода БИНС, обусловленная неточностью алгоритма (3.36), в рассматриваемом примере уменьшается более чем в 800 раз.

Рассмотрим алгоритмы формирования приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}}$ относительно ИСК БИНС на интервале шага интегрирования уравнений движения КА Δt. Пусть на $(i+1)$-м такте h измерений БИНС проведено измерение $\Delta\bar{V}_{\text{ССК}\,i+1}$ акселерометра БИНС относительно ССК, на момент t_i известна матрица перехода $A_{\text{ИСК—ССК}\,i}$ от ИСК БИНС к ССК, сформированная по алгоритму (3.35). Выполняемые на такте измерения равны интегралу за время такта от ускорения КА в осях ССК:

$$\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{a}_{\text{ССК}}(t)\,dt. \tag{3.39}$$

Приращение кажущейся скорости за время такта h в осях ИСК БИНС имеет вид

$$\Delta\bar{V}_{i+1\text{ИСК}} = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}}(t)\,\bar{a}_{\text{ССК}}(t)\,dt. \tag{3.40}$$

Представим вектор $\bar{a}_{\text{ССК}}(t)$ и матрицу $A_{\text{ИСК—ССК}}(t)$ в виде

$$\begin{gathered}\bar{a}_{\text{ССК}}(t) = \bar{a}_{\text{ССК}_i} + \dot{\bar{a}}_{\text{ССК}\,i}t + \frac{1}{2}\ddot{\bar{a}}_{\text{ССК}\,i}t^2;\\ A_{\text{ИСК—ССК}}(t) = A_{\text{ИСК—ССК}\,i} + \dot{A}_{\text{ИСК—ССК}\,i}t + \frac{1}{2}\ddot{A}_{\text{ИСК—ССК}\,i}t^2,\end{gathered} \tag{3.41}$$

где t — время от момента t_i; $\bar{a}_{\text{ССК}\,i}$, $\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}\,i}$, $\ddot{\bar{a}}_{\text{ССК}\,i}$ — вектор кажущегося ускорения и его производные в момент t_i; $A_{\text{ИСК—ССК}\,i}$, $\dot{A}_{\text{ИСК—ССК}\,i}$, $\ddot{A}_{\text{ИСК—ССК}\,i}$ — матрица $A_{\text{ИСК—ССК}}$ и ее производные в момент t_i.

С учетом равенства (3.28) матрица $A_{\text{ИСК—ССК}}(t)$ может быть представлена в виде

$$A_{\text{ИСК—ССК}}(t) = A_{\text{ИСК—ССК}\,i} + \Omega_i A_{\text{ИСК—ССК}\,i}t + \frac{1}{2}\left(\dot{\Omega}_i + \Omega_i^2\right)A_{\text{ИСК—ССК}\,i}t^2, \tag{3.42}$$

где Ω_i, $\dot{\Omega}_i$ — матрица скорости вращения КА и ее производная в момент t_i.

Подставив значение вектора ускорения $\bar{a}_{\text{ССК}}(t)$ из равенства (3.41) и матрицы $A_{\text{ИСК—ССК}}(t)$ из равенства (3.42) в равенство (3.39), после интегрирования на интервалах от t_{i-1} до t_i и от t_i до t_{i+1}, пренебрегая членами третьего порядка малости по h, получим значения приращений вектора кажущейся скорости относительно ИСК БИНС на i-м и (i+1)-м шагах:

$$\begin{aligned}
&\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i} = A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}i} a_i h - \frac{1}{2} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}i}\left(\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} - \Omega_i \bar{a}_{\text{ССК}i}\right) h^2 + \\
&+ \frac{1}{6} A^{\text{T}}\left[\ddot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} + \Omega_i \dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} + \left(\Omega_i^2 - \dot{\Omega}\right)\bar{a}_{\text{ССК}i}\right] h^3; \\
&\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i+1} = A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}i} a_i h + \frac{1}{2} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}i}\left(\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} - \Omega_i \bar{a}_{\text{ССК}i}\right) h^2 + \\
&+ \frac{1}{6} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}i}\left[\ddot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} + \Omega_i \dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} + \left(\Omega_i^2 - \dot{\Omega}_i\right)\bar{a}_{\text{ССК}i}\right] h^3.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Вычитая первое равенство из второго, получим рекуррентный алгоритм формирования вектора $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i+1}$:

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i+1} = \Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i} + A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}i}\left(\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} - \Omega_i \bar{a}_{\text{ССК}i}\right) h^2. \tag{3.44}$$

Выразим значения векторов $\bar{a}_{\text{ССК}i}$ и $\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i}$ через измерения приращений кажущейся $\Delta\bar{V}_{\text{ССК}}$ скорости относительно ССК на i-м и (i+1)-м шагах. Подставив значение $\bar{a}_{\text{ССК}}(t)$ из первого уравнения (3.41) в равенство (3.39) и проинтегрировав его на интервалах времени от t_{i-1} до t_i и от t_i до t_{i+1}, получим значения векторов приращений $\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i}$ и $\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1}$, измеряемых БИНС:

$$\begin{aligned}
&\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i} = \bar{a}_{\text{ССК}i} h - \frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} h^2 + \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} h^3; \\
&\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} = \bar{a}_{\text{ССК}i} h + \frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} h^2 + \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} h^3.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Сложив первое и второе равенство (3.45) и вычитая первое равенство из второго, получим значения векторов $\bar{a}_{\text{ССК}i}$ и $\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i}$:

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{\text{ССК}i} h = \frac{\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} + \Delta\bar{V}_{\text{ССК}i}}{2} - \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{ССК}i} h^3; \\
&\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}i+1} h^2 = \Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} - \Delta\bar{V}_{\text{ССК}i}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Подставив значения векторов $\bar{a}_{\text{ССК}i}$ и $\dot{\bar{a}}_{\text{ССК}}$ через измерения приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i}$ и $\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1}$ из (3.46) и значение матриц Ω_i через измерения φ_i и φ_{i+1} из равенства (3.32), получим рекуррентный алгоритм формирования вектора $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i+1}$ (i+1)-м шаге через его значение на i-м шаге и измерения БИНС на на i-м и (i+1)-м шагах:

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i+1} = \Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i} + A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}i} \times$$
$$\times\left[\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} - \Delta\bar{V}_{\text{ССК}i} - \frac{(\varphi_i + \varphi_{i+1})\left(\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} + \Delta\bar{V}_{\text{ССК}i}\right)}{4}\right]. \qquad (3.47)$$

Матрица $A_{\text{ИСК—ССК}i}$ в алгоритме (3.47) формируется по алгоритму (3.35).

Просуммировав значения векторов приращений $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i}$ на малых тактах БИНС h от 1 до K, получим значение приращения вектора кажущейся скорости

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}} = \sum_{i=1}^{K} \Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i} \qquad (3.48)$$

за время большого такта Δt интегрирования уравнений движения КА.

3.6. Синхронизация измерений БИНС с измерениями АСН

При выводе алгоритмов прогноза вектора состояния (3.29) предполагалось, что измерения БИНС выполняются синхронно с тактами прогноза Δt, хотя и с более мелким шагом h, т. е. такт Δt включает точно k тактов, при этом начало первого такта измерений БИНС внутри такта Δt строго совпадает с началом такта прогноза. Такая ситуация реализуется, например, если прогноз орбиты КА и обработка результатов измерений БИНС выполняются в ЦВМ КА. В этом случае прогноз орбиты КА выполняется на моменты целой секунды времени ЦВМ, а измерения БИНС осуществляются с более высокой частотой и синхронно со временем ЦВМ.

В некоторых случаях прогнозирование орбиты и обработка измерений датчиков БИНС может выполняться в разных вычислителях. В таком случае в каждом из вычислителей соответствующая задача решается во времени соответствующего вычислителя, а это время физически может быть не синхронизировано. Например, на МКС задача высокоточного прогноза орбиты решается в аппаратуре спутниковой навигации АСН-М. Вычислитель АСН выполняет интегрирование уравнений движения КА с тактом 1 с внутренних часов АСН. Обработка измерений БИНС выполняется в бортовой вычислительной системе (БВС) МКС с тактом 0,2 с внутренних часов БВС. Поэтому будем предполагать, что матрица $A_{\text{ИСК—ССК}}$ и вектор $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}}$ в ЦВМ формируются на момент t_i с малым шагом h, а интегрирование уравнений движения выполняется в АСН с большим шагом Δt. В шаг Δt входит ~k шагов h. Но так как часы ЦВМ и АСН не синхронизированы, через некоторое число шагов Δt на одном шаге Δt может быть k+1 или k−1 шагов h. Будем считать, что в ЦВМ из АСН периодически поступает информация о сдвиге часов ЦВМ $\tau_{\text{ЦВМ}}$ и

АСН $\tau_{АСН}$ относительно системного времени с привязкой к нему, а также известно значение дрейфа часов ЦВМ $\nu_{ЦВМ}$ и часов АСН $\nu_{АСН}$. Обмен информацией между ЦВМ и АСН может быть построен с частотой $1/h$, т. е. после каждого короткого такта h информация о $A_{ИСК—ССК}$ и $\Delta\bar{V}_{ИСК}$ после ее формирования в ЦВМ передается в АСН для реализации интегрирования уравнений движения. Однако в этом случае из ЦВМ в АСН требовалось бы передавать слишком большой поток информации. Реально обмен между АСН и ЦВМ устроен с частотой 1 Гц часов АСН — с частотой измерений АСН. Поэтому в ЦВМ в течение k малых тактов h формируется матрица $A_{ИСК—ССК}$ по алгоритму (3.35) и вектор $\Delta\bar{V}_{ИСК}$ по алгоритму (3.47) и (3.48) и только после этого значение матрицы и вектора с их привязкой к времени ЦВМ передаются в АСН с частотой 1 Гц. Момент передачи должен выбираться после завершения каждого малого такта h, когда рассчитано время часов АСН, соответствующее моменту завершения такта h ЦВМ. Если дробная часть секунды этого времени меньше или равна значению такта h, а число тактов m от начала суммирования векторов $\Delta\bar{V}_{ИСК}$ (в соответствии с алгоритмом (3.48)) больше 3, то осуществляется передача вектора $\Delta\bar{V}_{ИСК}$ с привязкой к часам ЦВМ, а также выполняется обнуление текущего числа тактов накопления m и накопленного вектора $\Delta\bar{V}_{ИСК}$. В результате, в АСН от ЦВМ с интервалами, близкими к Δt передаются значения вектора приращения кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{i+1}$ и значение времени $t_{i+1ЦВМ}$ в шкале ЦВМ, на которое этот вектор рассчитан.

В АСН с учетом знания смещения часов АСН $\tau_{АСН}$ и ЦВМ $\tau_{ЦВМ}$ относительно системного времени на какой-то момент времени T_A и дрейфа часов АСН $\nu_{АСН}$ и ЦВМ $\nu_{ЦВМ}$ рассчитывается момент времени $t_{i+1АСН}$ в шкале АСН, соответствующий моменту измерения $t_{i+1ЦВМ}$. Расчет приращения вектора $\Delta\bar{X}_{i+1}$ на $(i+1)$-м такте АСН будем проводить по алгоритму (3.16). Для этого по измерениям приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{ИСК}$ необходимо определить вектор кажущегося ускорения $\bar{a}_{ИСК_i}$ на момент t_i и второй производной этого ускорения $\ddot{\bar{a}}_{ИСК_i}$ на этот же момент времени.

Для вычисления этих векторов необходимо использовать три измерения приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{ИСК i-1}$, $\Delta\bar{V}_{ИСК i}$, $\Delta\bar{V}_{ИСК i+1}$, выполненные соответственно в моменты времени $t_{АСН i-1}$, $t_{АСН i}$, $t_{АСН i+1}$ шкалы АСН.

Пусть t — время от момента t_i, тогда приращение кажущейся скорости на интервале от t_0 до t_k определяется по формуле

$$\Delta\bar{V}_{ИСК} = \int_{t_0}^{t_k}\left(\bar{a}_{ИСК} + \dot{\bar{a}}_{ИСК}t + \frac{1}{2}\ddot{\bar{a}}_{ИСК}t^2\right)dt = \bar{a}_{ИСК}\left(t_k - t_0\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{ИСК}\left(t_k^2 - t_0^2\right) + \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{ИСК}\left(t_k^3 - t_0^3\right). \qquad (3.49)$$

Введем следующие обозначения:

$$\tau_{i+1} = t_{\text{АСН}\,i+1} - t_i;\quad \tau_i = t_{\text{АСН}\,i} - t_i;\quad \tau_{i-1} = t_{\text{АСН}\,i-1} - t_i;\quad \tau_{i-2} = t_{\text{АСН}\,i-2} - t_i. \qquad (3.50)$$

Тогда для значений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i-1}$, $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i}$, $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i+1}$ можно составить три уравнения:

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i-1} = \bar{a}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i-1} - \tau_{i-2}\right) + \frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i-1}^2 - \tau_{i-2}^2\right) + \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i-1}^3 - \tau_{i-2}^3\right);$$

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i} = \bar{a}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i} - \tau_{i-1}\right) + \frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i}^2 - \tau_{i-1}^2\right) + \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i}^3 - \tau_{i-1}^3\right); \qquad (3.51)$$

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i+1} = \bar{a}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i+1} - \tau_{i}\right) + \frac{1}{2}\dot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i+1}^2 - \tau_{i}^2\right) + \frac{1}{6}\ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\left(\tau_{i+1}^3 - \tau_{i}^3\right).$$

Неизвестными в этой системе являются векторы $\bar{a}_{\text{ИСК}}$, $\dot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}$, $\ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}$. Составим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} \tau_{i-1} - \tau_{i-2} & \frac{1}{2}\left(\tau_{i-1}^2 - \tau_{i-2}^2\right) & \frac{1}{6}\left(\tau_{i-1}^3 - \tau_{i-2}^3\right) \\ \tau_{i} - \tau_{i-1} & \frac{1}{2}\left(\tau_{i}^2 - \tau_{i-1}^2\right) & \frac{1}{6}\left(\tau_{i}^3 - \tau_{i-1}^3\right) \\ \tau_{i+1} - \tau_{i} & \frac{1}{2}\left(\tau_{i+1}^2 - \tau_{i}^2\right) & \frac{1}{6}\left(\tau_{i+1}^3 - \tau_{i}^3\right) \end{pmatrix};$$

$$\Delta V = \left(\Delta\bar{V}_{i-1},\ \Delta\bar{V}_{i},\ \Delta\bar{V}_{i+1}\right); \qquad (3.52)$$

$$A = \left(\bar{a}_{\text{ИСК}}\ \ \dot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\ \ \ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\right).$$

Тогда система уравнений (3.51) может быть представлена в виде

$$\Delta V = AH^{\text{T}}, \qquad (3.53)$$

откуда

$$A = \Delta V(H^{-1})^{\text{T}}. \qquad (3.54)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда интегрирование уравнений движения КА и измерений БИНС выполняются синхронно в одном вычислителе. Тогда $\nu = 0$ и $\tau = 0$. Пусть также шаг интегрирования уравнения движения Δt равен 1 с. Матрица H тогда будет иметь вид

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},\quad H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.55)$$

Подставив значение матрицы H^{-1} из равенства (3.43) в равенство (3.42), получим значения векторов $\bar{a}_{ИСК}$, $\dot{\bar{a}}_{ИСК}$ и $\ddot{\bar{a}}_{ИСК}$ для i-го момента времени через значения измеренных векторов $\Delta\bar{V}_i$, $\Delta\bar{V}_{i-1}$, $\Delta\bar{V}_{i+1}$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ИСК} &= -\frac{1}{6}\Delta\bar{V}_{i-1} + \frac{5}{6}\Delta\bar{V}_i + \frac{1}{3}\Delta\bar{V}_{i+1}; \\ \dot{\bar{a}}_{ИСК} &= -\Delta\bar{V}_i + \Delta\bar{V}_{i+1}; \\ \ddot{\bar{a}}_{ИСК} &= \Delta\bar{V}_{i-1} - 2\Delta\bar{V}_i + \Delta\bar{V}_{i+1}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Подставив значения векторов $\bar{a}_{ИСК}$ и $\ddot{\bar{a}}_{ИСК}$ в алгоритм формирования приращения вектора координат $\Delta\bar{X}_{i+1}$ на $(i+1)$-м шаге (3.16), после преобразований получим

$$\Delta\bar{X}_{i+1} = \Delta\bar{X}_i + \bar{a}_{ГСК i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{ГСК\, i}\Delta t^4 + \\ + \frac{5\Delta\bar{V}_{i+1} + 8\Delta\bar{V}_i - \Delta\bar{V}_{i-1}}{12}\Delta t. \tag{3.57}$$

Результат решения (3.57) совпадает с алгоритмом (3.27), определяющим приращение вектора координат при синхронном интегрировании уравнений движения КА по измерениям БИНС.

3.7. Рекуррентный алгоритм интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС

Алгоритм формирования вектора приращений координат (3.16) с учетом измерений БИНС обеспечивает прогноз движения КА в приращениях относительно ИСК БИНС. Интерес в данном случае представляет прогноз движения КА относительно ГСК или ИСК *J*2000. Рассмотрим интегрирование уравнений движения КА в ГСК. Будем считать, что матрица перехода из ИСК БИНС в ГСК формируется БИНС и известна в момент времени t_i. Умножив левую и правую части равенства (3.16) на матрицу $A_{ИСК—ГСК i}$, получим

$$A_{ИСК—ГСК i}\left(\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i\right) = A_{ИСК—ГСК i}\left(\bar{X}_i - \bar{X}_{i-1}\right) + A_{ИСК—ГСК i}\bar{a}_i. \tag{3.58}$$

Вектор $\bar{a}$ в правой части равенства (3.58) имеет вид

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{г\, i}\Delta t^2 + \bar{a}_{ИСК i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{г\, i}\Delta t^4 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{ИСК i}\Delta t^4. \tag{3.59}$$

Выразим матрицу $A_{\text{ИСК—ГСК}i}$ через ее значения в моменты t_{i+1} и t_{i-1}:

$$A_{\text{ИСК—ГСК}i} = \left(E - \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) A_{\text{ИСК—ГСК}i+1};$$
$$A_{\text{ИСК—ГСК}i} = \left(E + \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) A_{\text{ИСК—ГСК}i-1}, \tag{3.60}$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta t$ — матрица поворота Земли за такт Δt; ω_3 — скорость вращения Земли.

Будем обозначать векторы координат КА в ГСК через $\bar{X}_{Gi}$. Тогда

$$\bar{X}_{Gi} = A_{\text{ИСК—ГСК}i} \bar{X}_i . \tag{3.61}$$

Подставив значения матрицы $A_{\text{ИСК—ГСК}i}$ из равенства (3.60) в равенство (3.58), получим уравнения для определения приращения вектора координат $\Delta\bar{X}_{Gi+1}$ на (i+1)-й шаг через его значения на i-м шаге:

$$\left(E - \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) \bar{X}_{Gi+1} - \bar{X}_{Gi} = \bar{X}_{Gi} - \left(E + \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) \bar{X}_{Gi-1} + A_{\text{ИСК—ГСК}i} \bar{a}_i . \tag{3.62}$$

Откуда, с учетом малости скорости вращения Земли, после некоторых преобразований получим

$$\Delta\bar{X}_{Gi+1} = \Delta\bar{X}_{Gi} + \left(\Omega - \frac{1}{2}\Omega^2 \right) \left(\Delta\bar{X}_{Gi+1} + \bar{X}_{Gi} \right) -$$
$$- \left(\Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) \left(\bar{X}_{Gi} - \Delta\bar{X}_{Gi} \right) + A_{\text{ИСК—ГСК}i} \bar{a}, \tag{3.63}$$

а из равенства (3.63) будем иметь

$$\Delta\bar{X}_{Gi+1} = \Delta\bar{X}_{Gi} + \Omega \left(\Delta\bar{X}_{Gi+1} + \Delta\bar{X}_{Gi} \right) - \Omega^2 \bar{X}_{Gi} + A_{\text{ИСК—ГСК}i} \bar{a}. \tag{3.64}$$

Отсюда можно рассчитать рекуррентный алгоритм интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС:

$$\Delta\bar{X}_{Gi+1} = \left(E + 2\Omega + \Omega^2 + \frac{4}{3}\Omega^3 \right) \Delta\bar{X}_{Gi} - \left(E + \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) \Omega^2 \bar{X}_{Gi} +$$
$$+ \left(E + \Omega + \frac{1}{2}\Omega^2 \right) A_{\text{ИСК—ГСК}i} \bar{a}_i ; \tag{3.65}$$
$$\bar{X}_{Gi+1} = \bar{X}_{Gi} + \Delta\bar{X}_{Gi+1}.$$

Вектор $\overline{a}$ в алгоритме (3.65) представляет собой сумму возмущающих векторов в соответствии с выражением (3.59), представленных в ИСК. Матрица $A_{\text{ИСК—ГСК}i}$ в правой части равенства (3.65) преобразует эти векторы в ГСК. Например, вектор гравитационных ускорений $\overline{a}_{\text{г}i}$, входящий в равенство (3.59), после умножения на матрицу $A_{\text{ИСК—ГСК}i}$ будет представлять собой вектор гравитационных ускорений относительно ГСК. Вектор второй производной гравитационных ускорений $\ddot{\overline{a}}_{\text{г}}$, также входящий в вектор $\overline{a}$, для околокруговых орбит может быть вычислен в соответствии с формулой (3.11):

$$\ddot{\overline{a}}_{\text{г}} = -\omega_0^2 \overline{a}_{\text{г}}, \tag{3.66}$$

где $\overline{a}_{\text{г}}$ — вектор гравитационных ускорений в ИСК.

После умножения вектора $\overline{a}$ слева на матрицу $A_{\text{ИСК—ГСК}}$ получим

$$A_{\text{ИСК—ГСК}} \ddot{\overline{a}}_{\text{г}} = -\omega_0^2 A_{\text{ИСК—ГСК}} \overline{a}_{\text{г}}. \tag{3.67}$$

Вектор $A_{\text{ИСК—ГСК}} \overline{a}_{\text{г}}$ представляет собой вектор гравитационных ускорений относительно ГСК.

Тогда алгоритм (3.65) для околокруговой орбиты после пренебрежения малыми высокого порядка при отсутствии ускорений от двигателей и измерений БИНС примет следующий вид:

$$\Delta \overline{X}_{Gi+1} = \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right) \Delta \overline{X}_{Gi} - \left(E + \Omega\right) \Omega^2 \overline{X}_{Gi} +$$

$$+ \left(E + \Omega\right) \left(1 - \frac{\omega_0^2}{12} \Delta t^2\right) \overline{a}_{\text{г ГСК}} \Delta t^2, \tag{3.68}$$

где $\overline{a}_{\text{г ГСК}}$ — вектор гравитационных ускорений в ГСК.

Если орбита не является околокруговой, то вектор $\ddot{\overline{a}}_{\text{г}}$ необходимо формировать по алгоритму (3.22). После умножения $\ddot{\overline{a}}_{\text{г}}$ на матрицу $A_{\text{ИСК—ГСК}}$ алгоритм (3.22) примет вид

$$A_{\text{ИСК—ГСК}} \ddot{\overline{a}}_{\text{г}} = \omega_0^2 \left(3 \frac{\dot{\overline{X}}_{G0}^2}{r^2} - 2\omega_0^2 - \frac{15\dot{r}^2}{r^2}\right) \overline{X}_G + 6\omega_0^2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\overline{X}}_{G0}, \tag{3.69}$$

где $\overline{X}_G$ — вектор текущих координат в ГСК; $\dot{\overline{X}}_G$ — вектор скорости относительно ГСК; $\dot{\overline{X}}_{G0}$ — вектор полной скорости КА в проекциях на ГСК,

$$\dot{\overline{X}}_{G0} = \dot{\overline{X}}_G + \left[\overline{\omega}_3 \times \overline{X}_G\right];$$

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3};$$

$$r = \left|\overline{X}_G\right|;$$

$$\dot{r} = \frac{\dot{\bar{X}}_G \bar{X}_G}{r};$$

$$\bar{a}_{\text{ИСК}i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}i}\Delta t^4 = \frac{\Delta\bar{V}_{i+1} + \Delta\bar{V}_i}{2} - \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}i};$$

$$\ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}i}\Delta t^3 = \Delta\bar{V}_{i+1} - 2\Delta\bar{V}_i + \Delta\bar{V}_{i-1}.$$

Вектор скорости $\dot{\bar{X}}_G$ может быть выражен через приращение $\Delta\bar{X}_G$ в соответствии с формулой

$$\dot{\bar{X}}_G = \Delta\bar{X}_G + 0{,}5\bar{a}_{\text{г ГСК}}. \tag{3.70}$$

Отметим, что учет эллиптичности орбиты при вычислении вектора $\ddot{\bar{a}}_{\text{г}}$ по алгоритму (3.69) обеспечивает более точный прогноз орбиты даже для околокруговых орбит. На рис. 3.18 приведены графики ошибок прогноза орбиты МКС, выполненного по алгоритму (3.65) с расчетом вектора $\ddot{\bar{a}}_{\text{г}}$ по алгоритму (3.69).

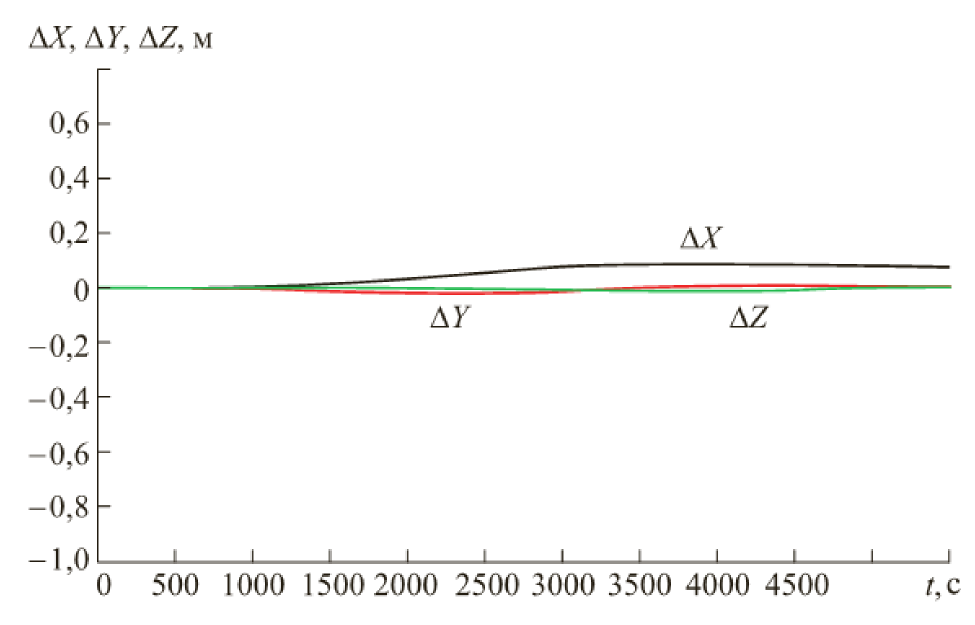


Рис. 3.18. Ошибки прогноза орбиты МКС в приращениях (шаг 1 с)

Из рисунка видно, что ошибки прогноза на виток по осям ΔX, ΔY, ΔZ ГСК не превышают 0,07 м. Аналогичные графики ошибок прогноза для этого же участка орбиты МКС с расчетом вектора $\ddot{\bar{a}}$, выполненного по алгоритму (3.67), приведены на рис. 3.12. Там ошибки прогноза на виток составили 0,6 м, т. е. учет эллиптичности орбиты по алгоритму (3.69) даже для орбиты МКС, эксцентриситет которой имеет порядок 0,01, обеспечил повышение точности прогноза почти в 10 раз.

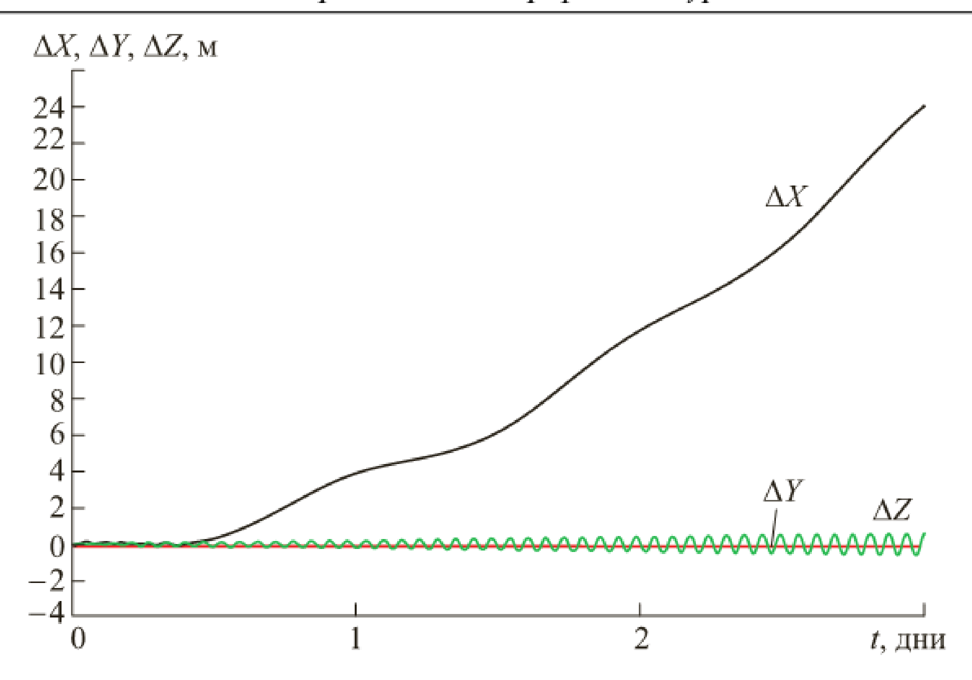


Рис. 3.19. Ошибки прогноза орбиты МКС для трехсуточного интервала относительно ОСК

На рис. 3.19 показаны ошибки прогноза орбиты МКС для трехсуточного интервала относительно ОСК. Очевидно, что за трое суток ошибка прогноза по продольной дальности составила ~30 м, по высоте и боковой дальности ~1 м.

3.8. Неформальное описание алгоритмов интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС

Для программиста процесс создания ПО предусматривает этап разработки так называемого неформального описания программы, т. е.:

– краткое содержание сути задачи, ее цель и методы решения;
– интерфейс программы;
– используемые структуры и другие программные функции;
– алгоритм решения задачи;
– методы верификации разработанного ПО.

В качестве примера рассмотрим описание алгоритмов интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС.

3.8.1. Назначение ПО и методы решения задачи

Разрабатываемое ПО предназначено для интегрирования уравнений движения КА. Интервал интегрирования — 1 шаг (Δt), т. е. ПО по вектору состояния на текущем i-м шаге обеспечивает формирование вектора состояния КА на следующем (i+1)-м шаге. Вектором состояния КА в данном ПО является текущий вектор координат КА в ГСК $\bar{X}_i$ и вектор приращения координат

$\Delta\overline{X}_i = \overline{X}_i - \overline{X}_{i-1}$. Предполагается, что вектор гравитационных ускорений $\overline{a}_{\text{г}\,i}\left(\overline{X}_i\right)$ известен, а также, что инерциальные ускорения КА измеряются датчиками БИНС. Управление процессом измерений датчиками БИНС и обработку этих измерений реализует ЦВМ КА с шагом h. Циклограмма измерений БИНС реализуется в шкале времени ЦВМ. ЦВМ формирует матрицы перехода от ИСК БИНС в ГСК. Интегрирование уравнений движения КА обеспечивает вычислитель АСН с шагом Δt. Будем считать, что $\Delta t = 1$ с в шкале внутренних часов АСН, а k шагов измерений БИНС $h \approx 1$ с в шкале часов ЦВМ. В течение этой секунды БИНС принимает и обрабатывает их по рассмотренному выше алгоритму. По завершении секунды БИНС формирует вектор приращения кажущейся скорости $\Delta\overline{V}_{\text{ИСК}\,i+1}$ относительно ИСК БИНС на момент, близкий к завершению (i+1)-й секунды часов АСН. Задача БИНС решается независимо в ЦВМ, а матрица $A_{\text{ИСК—ГСК}\,i}$ и вектор $\Delta\overline{V}_{\text{ИСК}\,i+1}$ передаются в АСН в виде информационных сообщений. Эти матрица и вектор являются входной информацией для задачи интегрирования уравнений движения КА, решаемой в АСН.

Входной информацией для данной программы также являются дрейф внутренних часов АСН $\nu_{\text{АСН}}$ и часов ЦВМ $\nu_{\text{ЦВМ}}$, смещение часов ЦВМ $\tau_{\text{ЦВМ}}$ и часов АСН $\tau_{\text{АСН}}$ относительно системного времени в i-й момент времени t, формируемые другими программами ПО АСН. На выходе программы должны быть сформированы векторы $\Delta\overline{X}_{i+1}$ и $\overline{X}_{i+1}$ относительно ГСК для момента i+1 целой секунды внутренних часов АСН. С учетом независимости работы БИНС и АСН программы, относящиеся к работе ПО БИНС и ПО АСН, могут быть оформлены как отдельные программные функции. Назовем их соответственно *f_BINS* (функция обработки измерений БИНС) и *f_INTEGR* (функция интегрирования уравнений движения КА).

3.8.2. Описание интерфейса программы

Программа использует ряд констант, которые, как правило, должны быть глобальными для всего ПО АСН: $\omega_з$ — угловая скорость вращения Земли; μ — гравитационная постоянная Земли. Неглобальными константами могут быть шаг интегрирования уравнений движения в АСН Δt и шаг обработки измерений БИНС в ЦВМ h.

Интерфейсные параметры программ могут быть входными (I), выходными (0) и входными-выходными (I/0). Входные параметры используются программой, но не меняются внутри нее, выходные — формируются программой и используются другими, но не используются данной программой на следующих шагах. Входные-выходные параметры формируются программой, используются ею на следующем шаге и могут использоваться другими программами.

Для всех интерфейсных параметров в неформальном описании программы должны быть приведены: размер, тип и размерность. Такое описание интерфейсных параметров для функций *f_BINS* и *f_INTEGR* приведено в табл. 3.1 и 3.2 соответственно.

Таблица 3.1

Описание интерфейсных параметров для функций *f_BINS*

Идентификатор	Название	Вход-выход	Размер	Тип	Размер-ность
n	Номер текущего такта БИНС внутри секунды	I/0	1	short	–
φ_mes	Вектор измерений приращений угловой скорости в БИНС на такте	I	3	float	rad/s
prev_matr_I_B	Матрица перехода ИСК—БИНС в ССК на предыдущем такте БИНС	I/0	3×3	double	–
prev_delta_V_mes	Измеренное значение приращения кажущейся скорости на предыдущем такте БИНС	I/0	3	double	m/s
delta_V_mes	Измеренное значение приращений кажущейся скорости на *n*-м такте БИНС	I	3	double	m/s
delta_V_I_n	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС за предыдущие *n*–1 такты	I/0	3	double	m/s
delta_V_I_mes	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС за такт Δt	0	3	double	m/s
t_OCS_mes	Время формирования *delta_V_I_mes*	0	1	double	s
tau_OCS	Смещение часов ЦВМ относительно системного времени	I	1	double	s
drift_OCS	Дрейф часов ЦВМ относительно системного времени	I	1	double	s/s
t_tau	Время по шкале системного времени, на которое рассчитано смещение и дрейф часов ЦВМ	I	1	double	s
t_OCS	Время по шкале ЦВМ завершения *n*-го такта БИНС	I	1	double	s

Таблица 3.2

Описание интерфейсных параметров для функций *f_INTEGR*

Идентификатор	Название	Вход-выход	Размер	Тип	Размерность
t_ASN	Текущий момент времени по шкале АСН	I	1	double	s
pos_vect	Вектор координат КА на текущем шаге	I/0	3	double	m
delta_Pos_vect	Вектор приращения координат КА на текущем шаге	I/0	3	double	m
acs_vect	Вектор гравитационного ускорения на текущем шаге в ГСК	I	3	double	m/s^2
delta_V_I_mes	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС на (i+1)-м такте БИНС	I	3	double	m/s
t_OCS_mes	Время завершения (i+1)-го такта БИНС	I	1	double	s
*delta_V_I_mes*1	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС на i-м такте БИНС	I/0	3	double	m/s
*t_OCS_mes*1	Время завершения i-го такта БИНС	I/0	1	double	s
*delta_V_I_mes*2	Приращение кажущейся скорости в ИСК БИНС на i-м такте БИНС	I/0	3	double	m/s
*t_OCS_mes*2	Время завершения (i–1)-го такта БИНС	I/0	1	double	s
*t_OCS_mes*3	Время завершения (i–2)-го такта БИНС	I/0	1	double	s
matr_I_G	Матрица перехода от ИСК БИНС в ГСК на текущем шаге	I	3×3	double	-
tau_OCS	Смещение часов ЦВМ относительно системного времени	I	1	double	s
drift_OCS	Дрейф часов ЦВМ относительно системного времени	I	1	double	s/s
t_tau_OCS	Время по шкале системного времени, на которое рассчитано смещение и дрейф часов ЦВМ	I	1	double	s
tau_ASN	Смещение часов АСН относительно системного времени	I	1	double	s
drift_ASN	Дрейф часов АСН относительно системного времени	I	1	double	s/s
t_tau_ASN	Время по шкале системного времени, на которое рассчитано смещение и дрейф часов АСН	I	1	double	s

Из таблиц следует, что интерфейсы рассматриваемых программных функций не содержат структур, поэтому в данном неформальном описании ПО отсутствует соответствующий раздел. Ниже рассмотрим подробнее описание алгоритмов функций *f_BINS* и *f_INTEGR*.

3.8.3. Алгоритм функции f_BINS

Данная программная функция входит в состав ПО ЦВМ и запускается на каждом такте *h* БИНС после выведения измерений БИНС *φ_mes* и *delta_V_mes*. В момент первого запуска функции должны быть известны все интерфейсные параметры типа I/0.

Последовательность реализации программы следующая.

1. Начало.

2. Формирование номера текущего такта БИНС:

$$n = n + 1.$$

3. Формирование матрицы приращений углов БИНС на n-м шаге:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{_mes_z} & -\varphi_{_mes_y} \\ -\varphi_{_mes_z} & 0 & \varphi_{_mes_x} \\ \varphi_{_mes_y} & -\varphi_{_mes_x} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\varphi_{_mes_x}$, $\varphi_{_mes_y}$, $\varphi_{_mes_z}$ — компоненты вектора $\varphi_{_mes}$.

4. Формирование вектора приращения $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}}$ за n тактов:

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}} = \Delta\bar{V}_{\text{ИСК}} + A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ССК}}\left[\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} - \Delta\bar{V}_{\text{ССК}i} - \frac{(\varphi_{i+1} + \varphi_i)\left(\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} + \Delta\bar{V}_{\text{ССК}i}\right)}{4}\right],$$

где

$$A_{\text{ИСК—ССК}} = prev_matr_I_B;$$

$$\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i+1} = delta_V_mes;$$

$$\Delta\bar{V}_{\text{ССК}i} = prev_delta_V_mes;$$

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}} = delta_V_I_n.$$

5. Переприсвоение значения вектора приращения:

$$prev_delta_\bar{V}_mes := delta_V_mes.$$

6. Формирование матрицы $A_{\text{ИСК—ССК}}$ на n-й шаг:

$$A_{\text{ИСК—ССК}} = \left[E + \varphi + \frac{1}{2}\varphi^2\right] A_{\text{ИСК—ССК}},$$

где $A_{\text{ИСК—ССК}} = prev_matr_I_B$.

7. Формирование времени завершения n-го такта БИНС по шкале системного времени и дробной части этого времени:

$t = t_{_OCS} + tau_OCS + drift_OCS\,(t_{_OCS} + tau_OCS - t_tau)$;

τ = дробная часть (t).

8. Формирование вектора приращения кажущейся скорости, передаваемого в АСН:

если $\tau \le 1{,}1\ h$ и $n > 3$, то

$$delta_V_I_mes := \Delta\bar{V}_{\text{ИСК}};$$

$$\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}} := 0;$$

$$t_ocs_mes := t_ocs;$$

$$n := 0.$$

9. Конец.

Сформированный в результате работы программы вектор *delta_V_I_mes* и соответствующее время *t_ocs_mes* по шкале ЦВМ передаются в АСН для расчета возмущающих ускорений $\bar{a}_{\text{ИСК}}$ в уравнении движения КА.

Данная функция ПО ЦВМ вызывается на каждом такте h и раз в секунду формирует вектор $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}}$ с соответствующей привязкой ко времени, который передается в АСН через интерфейс между ЦВМ и АСН и является входной информацией для функции *f_INTEGR*. Кроме того, из ЦВМ в АСН передается матрица $A_{\text{ИСК—ГСК}}$, формируемая в ЦВМ не рассматриваемыми здесь другими программами.

3.8.4. Алгоритм функции f_INTEGR

Данная программная функция входит в состав ПО АСН и запускается на каждом такте Δt работы АСН после получения данных от БИНС *delta_V_I_mes*, *matr_I_G* и *t_OCS_mes*.

Первый запуск выполняется после получения измерений БИНС минимум на четырех тактах Δt АСН.

Программа реализуется в такой последовательности.

1. Начало.

2. Формирование вектора $\ddot{\bar{a}}_{\text{г}\,i}$ относительно ГСК в соответствии с алгоритмами (3.22):

$$r = |pos_vect|;$$

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3};$$

$$\dot{\bar{X}} = delta_pos_vect + [\bar{\omega}_3 \times pos_vect] + 0.5 \cdot acs_vect,$$

где ω_3 — скорость вращения Земли, $\bar{\omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix};$

$$\dot{r} = \frac{\left(\dot{\bar{X}}\right)(delta_pos_vect)}{r};$$

$$\ddot{\bar{a}}_{\text{г}} = \omega_0^2 \left[3\frac{\left(\dot{\bar{X}}\right)^2}{r^2} - 2\omega_0^2 - \frac{15\dot{r}^2}{r^2} \right](pos_vect) + 6\omega_0^2 \frac{\dot{r}}{r}\dot{\bar{X}}.$$

3. Вычисление в системной шкале время окончания i-го такта t_i, заданного в шкале АСН (t_ASN):

$$t_i = t_ASN + tau_ASN + drift_ASN\,(t_ASN + tau_ASN - t_tau_ASN).$$

4. Вычисление времени τ_{i+1}, τ_i, τ_{i-1}, τ_{i-2} формирования векторов приращений кажущейся скорости $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i+1}$, $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i}$, $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i-1}$, $\Delta\bar{V}_{\text{ИСК}i-2}$ по системной шкале времени относительно времени окончания i такта t_i через их значения по шкале времени ЦВМ:

$$\tau_{i+1} = t_OCS_mes + tau_OCS +$$
$$+ drift_OCS\left(t_OCS_mes + tau_OCS - t_tau_OCS\right) - t_i;$$
$$\tau_i = t_OCS_mes1 + tau_OCS +$$
$$+ drift_OCS\left(t_OCS_mes1 + tau_OCS - t_tau_OCS\right) - t_i;$$
$$\tau_{i-1} = t_OCS_mes2 + tau_OCS +$$
$$+ drift_OCS\left(t_OCS_mes2 + tau_OCS - t_tau_OCS\right) - t_i;$$
$$\tau_{i-2} = t_OCS_mes3 + tau_OCS +$$
$$+ drift_OCS\left(t_OCS_mes3 + tau_OCS - t_tau_OCS\right) - t_i;$$

5. Формирование матриц H и ΔV:

$$H = \begin{pmatrix} \tau_{i-1} - \tau_{i-2} & \frac{1}{2}\left(\tau_{i-1}^2 - \tau_{i-2}^2\right) & \frac{1}{6}\left(\tau_{i-1}^3 - \tau_{i-2}^3\right) \\ \tau_i - \tau_{i-1} & \frac{1}{2}\left(\tau_i^2 - \tau_{i-1}^2\right) & \frac{1}{6}\left(\tau_i^3 - \tau_{i-1}^3\right) \\ \tau_{i+1} - \tau_i & \frac{1}{2}\left(\tau_{i+1}^2 - \tau_i^2\right) & \frac{1}{6}\left(\tau_{i+1}^3 - \tau_i^3\right) \end{pmatrix};$$

$$\Delta V = \left(\Delta\bar{V}_{i-1}, \Delta\bar{V}_i, \Delta\bar{V}_{i+1}\right),$$

где

$$\Delta\bar{V}_{i+1} = delta_V_I_mes;$$
$$\Delta\bar{V}_i = delta_V_I_mes1;$$
$$\Delta\bar{V}_{i-1} = delta_V_I_mes2.$$

6. Вычисление матрицы A:

$$A = \Delta V(H^{-1})^{\mathrm{T}},$$

где $A = \left(\bar{a}_{\text{ИСК}}, \dot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}, \ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\right)$.

7. Формирование шага интегрирования

$$\Delta t = \Delta t + drift_ASN.$$

8. Формирование вектора

$$\bar{a} = acs_vect\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{a}_{\text{г}}\Delta t^4 + matr_I_G\left(\bar{a}_{\text{ИСК}}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{ИСК}}\Delta t^4\right).$$

9. Формирование матрицы вращения Земли:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta\bar{X}_{Gi} = delta_pos_vect;$$
$$\bar{X}_{Gi} = pos_vect.$$

10. Формирование вектора приращения координат и вектора координат на следующий шаг:

$$delta_pos_vect = \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta\bar{X}_{Gi} - \left(E + \Omega\right)\Omega^2\bar{X}_{Gi} + \left(E + \Omega\right)\bar{a};$$

$$pos_vect = \bar{X}_{Gi} + delta_pos_vect.$$

11. Переприсвоение значения векторов приращений кажущейся скорости и соответствующих им времен для предыдущих шагов:

$$t_OCS_mes3 := t_OCS_mes2;$$
$$t_OCS_mes2 := t_OCS_mes1;$$
$$t_OCS_mes1 := t_OCS_mes;$$
$$delta_V_I_mes2 := delta_V_I_mes1;$$
$$delta_V_I_mes1 := delta_V_I_mes.$$

12. Конец.

3.8.5. Методы верификации программных функций f_BINS и f_INTEGR

Верификация ПО является важным этапом его разработки, часто этот этап наиболее сложный. Верификацию ПО удобно проводить путем сравнения выходных параметров, формируемых этим ПО с аналогичными параметрами, формируемыми другими, уже верифицированными программами.

Так, рассмотренные функции используются в бортовом ПО, обеспечивая прогноз движения КА в приращениях с учетом измерений БИНС. В процессе разработки данного ПО обычно параллельно разрабатывается модель реального движения КА. Она создается независимо от бортового ПО, а алгоритмы этой модели реализуют другие методы моделирования. В этом случае верификацию разрабатываемого ПО осуществляют путем сравнения выходных параметров с соответствующими параметрами модели. Их совпадение или близость являются одновременным подтверждением правильности разрабатываемого ПО и ПО модели.

Рассматриваемое здесь ПО разрабатывалось для решения задачи спуска, в которой бортовое ПО формирует оценку траектории КА по измерениям БИНС и прогноз его движения в гравитационном поле. Параллельно была создана модель движения КА, в которой моделировалось движение спускаемого аппарата с учетом воздействия аэродинамических и гравитационных сил. Интегрирование уравнений движения выполнялось методом Рунге — Кутты четвертого порядка. При этом задачей бортового ПО являлось формирование оценки траектории спускаемого аппарата, близкой к моделируемой реальной траектории. Результаты сравнения формируемой оценки траектории с учетом различных возмущающих факторов с реальной моделируемой траекторией будут приведены в гл. 10. Анализ этих результатов подтвердил правильность функционирования рассмотренных в настоящем разделе программных функций *f_BINS* и *f_INTEGR*.

Контрольные вопросы

1. Каковы алгоритмы интегрирования уравнения движения КА методом Эйлера и Рунге — Кутты четвертого порядка?
2. Какова точность метода интегрирования Эйлера? Какие методы повышения точности вы можете предложить?
3. Что такое вектор состояния КА в приращениях и метод интегрирования уравнения движения КА в приращениях?
4. Каковы алгоритмы интегрирования уравнений движения КА в ИСК БИНС с учетом измерений БИНС?
5. Каковы алгоритмы расчета приращений кажущейся скорости в БИНС?
6. Что такое рекуррентный алгоритм интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС?

Глава 4
Определение орбит. Глобальные спутниковые навигационные системы ГЛОНАСС и GPS, их основные характеристики

4.1. Определение орбит КА по наземным радиоизмерениям

До развертывания ГСНС GPS и ГЛОНАСС наиболее распространенным методом определения орбиты КА был метод траекторных радиоизмерений, для реализации которого в ряде наземных измерительных пунктов (НИП) устанавливали специальную радиоаппаратуру, которая при пролете КА над соответствующим НИП излучала в направлении на КА радиосигнал определенной частоты. Этот сигнал принимался на КА, усиливался и транслировался на Землю. На Земле после приема обратного сигнала определялась задержка между приемом и излучением сигнала, а также изменение частоты несущего сигнала. Задержка принятого сигнала соответствовала двойной дальности (деленной на скорость света c) от наземного излучателя до КА, а изменение частоты — двойной проекции скорости КА в направлении на излучатель.

Описанную схему измерений иллюстрирует рис. 4.1.

В результате измерений, выполненных несколькими НИП на двух-трех соседних витках, формировались массивы:

D_{ij} — дальности КА в моменты t_i до j-го НИП;

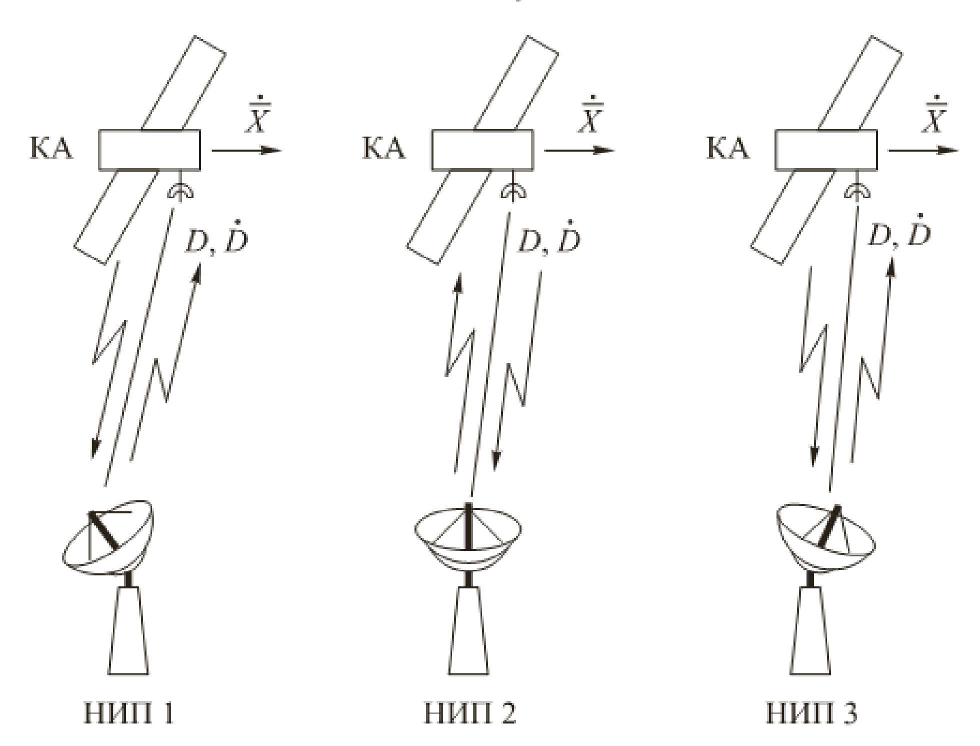


Рис. 4.1. Схема наземных навигационных измерений

$\dot{D}_{ij}$ — проекции скорости КА в направлении на излучатель в момент t_i относительно излучателя j-го НИП.

Дальность и скорость ее изменения являются функциями параметров движения КА, т. е. функциями его вектора состояния $\overline{\xi}(t)$. Для D_{ij} и $\dot{D}_{ij}$ можно записать следующие равенства:

$$\begin{aligned} D_{ij} &= F_{ij}\left(\overline{\xi}_i\right); \\ \dot{D}_{ij} &= f_{ij}\left(\overline{\xi}_i\right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где F_{ij}, f_{ij} — известные функции, связывающие измеряемые параметры с вектором состояния; $\overline{\xi}_i$ — вектор состояния КА в момент t_i.

Если траектория КА известна с некоторой точностью, то можно считать, что известно начальное приближение вектора состояния $\overline{\xi}_{0i}$ в каждый момент t_i. В этом случае задачей определения орбиты является определение погрешности начального приближения

$$\Delta\overline{\xi}_i = \overline{\xi}_i - \overline{\xi}_{0i}. \tag{4.2}$$

Для погрешности начального приближения уравнения (4.1) могут быть записаны в линеализированном виде:

$$\begin{aligned} D_{ij}\left(\overline{\xi}_i\right) - D_{ij}\left(\overline{\xi}_{0i}\right) &= \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial \overline{\xi}_i}\right)^{\mathrm{T}} \Delta\overline{\xi}_i; \\ \dot{D}_{ij}\left(\overline{\xi}_i\right) - \dot{D}_{ij}\left(\overline{\xi}_{0i}\right) &= \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial \overline{\xi}_i}\right)^{\mathrm{T}} \Delta\overline{\xi}_i, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\dfrac{\partial F_{ij}}{\partial \overline{\xi}_i}$, $\dfrac{\partial f_{ij}}{\partial \overline{\xi}_i}$ — известные векторы размерностью 6.

При серии из n измерений система уравнений (4.3) примет вид

$$\begin{aligned} D_{1j}\left(\overline{\xi}_1\right) - D_{1j}\left(\overline{\xi}_{01}\right) &= \left(\frac{\partial F_{1j}}{\partial \overline{\xi}_1}\right)^{\mathrm{T}} \Delta\overline{\xi}_1; \\ \dot{D}_{1j}\left(\overline{\xi}_1\right) - \dot{D}_{1j}\left(\overline{\xi}_{01}\right) &= \left(\frac{\partial f_{1j}}{\partial \overline{\xi}_1}\right)^{\mathrm{T}} \Delta\overline{\xi}_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{nj}\left(\overline{\xi}_n\right) - D_{nj}\left(\overline{\xi}_{0n}\right) &= \left(\frac{\partial F_{nj}}{\partial \overline{\xi}_n}\right)^{\mathrm{T}} \Delta\overline{\xi}_n; \\ \dot{D}_{nj}\left(\overline{\xi}_n\right) - \dot{D}_{nj}\left(\overline{\xi}_{0n}\right) &= \left(\frac{\partial f_{nj}}{\partial \overline{\xi}_n}\right)^{\mathrm{T}} \Delta\overline{\xi}_n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Система уравнений (4.4) состоит из $2n$ линейных уравнений, содержащих $6n$ неизвестных $\Delta\overline{\xi}_i$ компонент шестимерных векторов состояния. Казалось

бы, такая система не должна решаться ни при каких значениях *n*. Однако векторы $\Delta\overline{\xi}_i$ не являются независимыми: между ними существует взаимно однозначная связь, определяемая уравнениями движения. Если уравнения движения точные, то зная $\Delta\overline{\xi}_1$, можно однозначно определить все векторы $\Delta\overline{\xi}_i$ путем интегрирования уравнений движения. Поэтому в действительности система уравнений (4.4) содержит только шесть неизвестных $\Delta\overline{\xi}_i$, соответствующих вектору состояния на любой выбранный момент времени.

При абсолютно точных измерениях достаточно получить три значения дальности и три значения относительной скорости для однозначного определения орбиты КА. Однако при наличии ошибок измерений возникают ошибки в определении орбиты. Для того чтобы определить орбиту с требуемой точностью, необходимо проведение большого количества измерений на достаточно большой временной базе.

Так, для МКС, КА «Союз» и «Прогресс» сеанс измерений обычно длится 3 витка, на каждом из которых измерения выполняются на трех НИП, на каждом НИП измерения ведутся с частотой 1 Гц в течение всего времени пролета КА над ним (5…6 мин). Далее все измерения передаются в ЦУП, где в результате их математической обработки формируются параметры орбиты КА на конец сеанса измерений. Точность определения параметров орбиты указанным методом на конец сеанса измерений составляет 100…200 м по положению и 5..10 см/с по скорости. Далее определение положения КА на любой последующий момент времени осуществляется путем прогноза орбиты. При этом чем больше интервал прогноза, тем больше ошибка в определении положения КА. Так, точность прогноза орбиты МКС по радиоизмерениям ухудшается со скоростью 2…3 км/сут. Это ошибки, обусловленные как ошибками начального вектора состояния (после сеанса измерений), так и ошибками модели движения КА, используемой при прогнозировании.

В заключение следует сказать, что существенным недостатком рассмотренного метода определения орбиты (кроме низкой точности) является длительность решения задачи (3…5 ч), что недопустимо долго для решения многих практических задач. Существенное снижение этого времени и повышение точности решения навигационной задачи стало возможным с развертыванием ГСНС ГЛОНАСС и GPS.

4.2. Основные принципы решения навигационной задачи КА с использованием ГСНС

Предположим, что имеется *n* излучателей радиосигнала, расположенных в точках с известными координатами $\overline{X}_i$. Эти радиосигналы в момент времени *t* принимаются потребителем, координаты $\overline{X}$ которого неизвестны. Пусть радиосигналы от каждого излучателя определенным образом окрашены, т. е. потребитель понимает, какой сигнал от какого источника был послан, в какой

момент времени каждый сигнал был излучен соответствующим излучателем. Время распространения каждого сигнала от излучателя до потребителя

$$\Delta t_i = \frac{\left|\bar{X}_i - \bar{X}\right|}{c}, \tag{4.5}$$

где c — скорость света; $\bar{X}_i$ — координаты излучателя в момент излучения сигнала, принятого потребителем в момент времени t.

Пусть время распространения сигнала Δt_i определяется в аппаратуре потребителя, тогда для определения вектора $\bar{X}$ можно составить систему из n уравнений:

$$\begin{aligned} c\Delta t_1 &= \sqrt{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_1 - \bar{X}\right)}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c\Delta t_n &= \sqrt{\left(\bar{X}_n - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_n - \bar{X}\right)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

После возведения в квадрат левой и правой частей каждого из уравнений системы (4.6) и последовательного вычитания последующего уравнения из предыдущего систему (4.6) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} &\bar{X}_1^{\mathrm{T}}\bar{X}_1 - \bar{X}_2^{\mathrm{T}}\bar{X}_2 - c^2\left(\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2\right) = 2\left(\bar{X}_1^{\mathrm{T}} - \bar{X}_2^{\mathrm{T}}\right)\bar{X}; \\ &\bar{X}_2^{\mathrm{T}}\bar{X}_2 - \bar{X}_3^{\mathrm{T}}\bar{X}_3 - c^2\left(\Delta t_2^2 - \Delta t_3^2\right) = 2\left(\bar{X}_2^{\mathrm{T}} - \bar{X}_3^{\mathrm{T}}\right)\bar{X}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\bar{X}_n^{\mathrm{T}}\bar{X}_n - \bar{X}_1^{\mathrm{T}}\bar{X}_1 - c^2\left(\Delta t_n^2 - \Delta t_1^2\right) = 2\left(\bar{X}_n^{\mathrm{T}} - \bar{X}_1^{\mathrm{T}}\right)\bar{X}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Введем обозначения

$\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^{\mathrm{T}}\bar{X}_1 - \bar{X}_2^{\mathrm{T}}\bar{X}_2 - c^2\left(\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2\right) \\ \vdots \\ \bar{X}_n^{\mathrm{T}}\bar{X}_n - \bar{X}_1^{\mathrm{T}}\bar{X}_1 - c^2\left(\Delta t_n^2 - \Delta t_1^2\right) \end{pmatrix}$ — n-мерный вектор измерений, все компоненты которого известны;

$B = \begin{pmatrix} 2\left(\bar{X}_1^{\mathrm{T}} - \bar{X}_2^{\mathrm{T}}\right) \\ \vdots \\ 2\left(\bar{X}_n^{\mathrm{T}} - \bar{X}_1^{\mathrm{T}}\right) \end{pmatrix}$ — матрица размером $n\times 3$, все компоненты которой известны.

Тогда система уравнений (4.7) может быть представлена как

$$\bar{U} = B\bar{X}, \tag{4.8}$$

где неизвестным является только вектор координат потребителя $\bar{X}$, который получили из уравнения (4.8):

$$\bar{X} = \left(B^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{U}. \tag{4.9}$$

Условием существования решения $\bar{X}$ является обращаемость матрицы $B^{\mathrm{T}}B$, т. е.

$$\det(B^{\mathrm{T}}B) \neq 0. \tag{4.10}$$

Таким образом, при выполнении условия (4.10) координаты потребителя могут быть определены по формуле (4.9).

Предположим также, что каждый из излучателей формирует высокочастотный радиосигнал строго определенной известной частоты f_0, а потребитель, приняв сигнал, абсолютно точно меряет его частоту f_i, которая отличается от первоначальной вследствие эффекта Доплера, обусловленного движением потребителя и излучателей. Зная изменение частоты сигнала каждого излучателя Δf_i, можно составить систему уравнений для определения вектора скорости потребителя:

$$\begin{gathered}
\frac{\Delta f_1}{f_0}c = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}\right|}\left(\bar{V}_1 + \bar{V}\right); \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\Delta f_n}{f_0}c = \frac{\left(\bar{X}_n - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{\left|\bar{X}_n - \bar{X}\right|}\left(\bar{V}_n + \bar{V}\right),
\end{gathered} \tag{4.11}$$

где $\bar{V}_i$ — вектор скорости i-го НС; $\bar{V}$ — вектор скорости потребителя.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta f_1}{f_0}c - \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}\right|}\bar{V}_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\Delta f_n}{f_0}c - \dfrac{\left(\bar{X}_n - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{\left|\bar{X}_n - \bar{X}\right|}\bar{V}_n \end{pmatrix}$$ — n-мерный вектор измерений, все компоненты которого известны (вектор координат $\bar{X}$ определен по формуле (4.9));

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}\right|} \\ \vdots \\ \dfrac{\bar{X}_n - \bar{X}}{\left|\bar{X}_1 - \bar{X}\right|} \end{pmatrix}$$ — матрица размером $n\times 3$, все компоненты которой известны.

Тогда система уравнений (4.11) может быть представлена в виде

$$\bar{U} = B\bar{V}, \tag{4.12}$$

откуда искомый вектор $\bar{V}$ определяется по формуле

$$\bar{V} = \left(B^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{U}. \tag{4.13}$$

Условием существования решения V является обращаемость матрицы $B^{T}B$, т. е.

$$\det (B^{T}B) \neq 0. \qquad (4.14)$$

Таким образом, при выполнении условия (4.14) вектор скорости потребителя может быть определен по формуле (4.13).

Рассмотренный выше метод определения параметров движения потребителя лежит в основе функционирования ГСНС. Конечно, был рассмотрен идеальный случай, когда координаты и скорости излучателей известны абсолютно точно, шкалы времени излучателей и потребителя совпадают, среда распространения радиосигнала не вносит никаких возмущений в изменение частоты и скорости распространения сигнала, измерения задержек Δt_i и частоты f_i в аппаратуре потребителя осуществляются абсолютно точно. В реальности все перечисленные факторы вносят определенные погрешности в решение навигационной задачи, которые разработчики ГСНС стараются свести к минимуму. Тем не менее реальные ГСНС существенно отличаются от показанной идеальной системы.Ниже рассмотрим работу ГСНС на примере систем ГЛОНАСС и GPS, обращая внимание на их отличия, отмечая преимущества и недостатки этих отличий.

4.3. Идеология построения систем ГЛОНАСС и GPS, их основные характеристики и отличия. «Сырые» измерения в аппаратуре потребителя

В предыдущем разделе предполагалось, что потребитель одновременно принимает сигналы от n излучателей с известными координатами и скоростью движения. Каждый из таких излучателей может быть расположен на Земле. В этом случае существенно ограничена дальность от излучателей до потребителя, поскольку все излучатели (или их значительная часть) должны быть в зоне прямой видимости потребителей. По такому принципу строятся локальные навигационные системы, обслуживающие потребителей, находящихся в некотором ограниченном районе, например в аэропорту, морском порту и т. п.

Для построения глобальной навигационной системы при разумном общем числе излучателей они должны быть вынесены в космос на достаточно высокие орбиты. Именно так реализованы глобальные навигационные системы — российская ГЛОНАСС и американская GPS.

Выбор количества НС в группировке, параметров их орбит, распределения НС по орбитам определяется условиями покрытия всей поверхности Земли с обеспечением возможности решения потребителем навигационной задачи в любой момент времени с достаточно высокой точностью. Не останавливаясь на вопросах обоснования такого выбора для систем ГЛОНАСС и GPS, приведем основные характеристики космических группировок этих систем.

В первоначальном проекте предполагалось создание космической группировки системы GPS из 24 НС. Однако для повышения качества системы и обеспечения резервирования НС на орбите для возможности их оперативной замены в случае отказов, число НС постепенно увеличивалось, и в настоящее время составляет 32 спутника. Система ГЛОНАСС включает 24 НС.

Спутники GPS равномерно распределены в шести орбитальных плоскостях с наклонением 54° и равномерным распределением восходящих узлов орбит по экватору. В каждой плоскости устанавливается 5–6 НС. Высота орбиты спутников — 20 000 км, период обращения — 12 ч.

Спутники ГЛОНАСС равномерно распределены в трех орбитальных плоскостях с наклонением 64,8° и равномерным распределением восходящих узлов орбит по экватору. Высота орбиты спутников ~19 100 км, номинальный период — 11 ч 15 мин 44 с.

Благодаря большому наклонению орбит НС система ГЛОНАСС обеспечивает более плотное покрытие высоких широт Земли, по сравнению с GPS.

При рассмотрении основных принципов решения навигационной задачи, отмечалось, что координаты и скорость движения каждого излучателя, а также время излучения сигнала должны быть известны с высокой точностью. Это означает, что параметры орбит НС, а также бортовое время НС должно быть известно с еще более высокой точностью. Это требование накладывает существенное ограничение при построении ГСНС по сравнению с другими спутниковыми системами. ГСНС должна включать высокоточную наземную систему временного и навигационного обеспечения орбитальной группировки НС. Эту функцию выполняет командно-измерительный комплекс (КИК), который не только обеспечивает управление НС как КА, но и осуществляет определение параметров движения НС, проводит сверку и согласование бортовых шкал времени с наземной системной шкалой времени.

Координирует функционирование всех элементов ГСНС ЦУП, связанный информационными радиолиниями с КИК и управляющими радиолиниями с каждым НС.

Таким образом, информация о точном времени и координатах имеется на каждом НС и должна быть доведена до каждого потребителя. Для этого она включается в информационную часть радиосигнала, передаваемого в сторону Земли каждым НС. НС находятся в орбитальной ориентации, и центр диаграммы передающих антенн направлен в центр Земли. Мощность передаваемого радиосигнала зависит от угла между направлением на центр Земли и направлением на потребителя. Достаточно условно ширину диаграммы направленности передающей антенны НС можно принять равной 40°. Будем считать, что потребитель, находящийся в окрестности Земли в зоне диаграммы направленности, устойчиво принимает радиосигнал от НС. Область устойчивого приема радиосигнала НС в окрестности Земли показана на рис. 4.2.

Из рисунка видно, что потребитель, находящийся у Земли в зоне прямой видимости НС на высотах до 2500 км, устойчиво принимает радиосигнал НС. Приведенные цифры являются достаточно условными, так как они зависят и

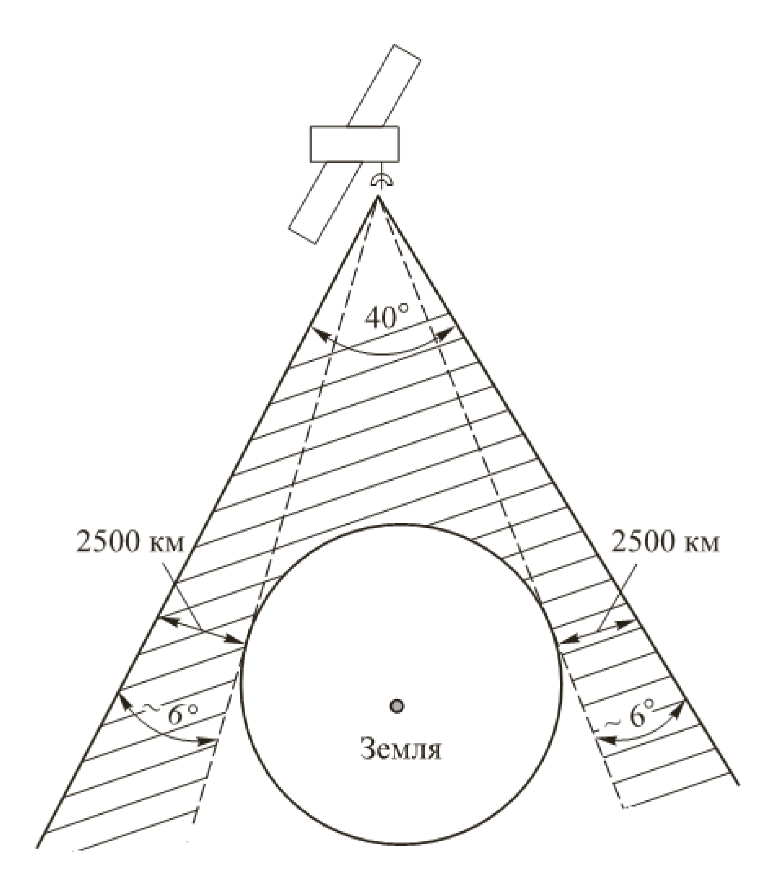


Рис. 4.2. Область устойчивого приема сигналов НС в окрестности Земли

от чувствительности приемного радиотракта потребителя, мощности и спектра радиопомех в окрестности потребителя и пр.

И спутники GPS, и спутники ГЛОНАСС формируют для потребителя сигналы на двух несущих частотах из диапазона L_1 (~1,5 ГГц) и L_2 (~1,2 ГГц). Сигнал L_1 — для гражданских потребителей, сигнал L_2 — для специальных потребителей. Учитывая, что для решения большинства задач навигации КА достаточно использовать одночастотные навигационные приемники, работающие на частоте L_1, далее будем рассматривать характеристики систем ГЛОНАСС и GPS в части, относящейся к информации, передаваемой потребителю в этом диапазоне частоты.

Для системы GPS частота несущего сигнала L_1 для всех НС одинакова и составляет 1575,42 МГц.

При рассмотрении принципов решения навигационной задачи с использованием ГСНС, отмечалось, что радиосигналы от каждого НС должны быть определенным образом «окрашены» для того, чтобы потребитель понимал, принадлежностью какого НС является принятый сигнал, — это так называемое *разделение сигналов*. В системе GPS используется метод кодового разделения, в системе ГЛОНАСС — частотного разделения. При кодовом разделении несущий сигнал модулируется некоторой кодовой последовательностью, уникальной для каждого источника сигнала. При частотном разделении несущий сигнал каждого источника имеет собственную уникальную частоту.

Для понимания принципа кодового разделения рассмотрим структуру сигнала GPS, который может быть представлен в виде

$$U_{GPSi} = A_i \sin(\omega_0 t + \varphi_i)\, ПСП_i\, D_i, \quad (4.15)$$

где i — номер НС; ω_0 — номинальная частота несущего сигнала L_1 GPS; φ_i — фаза сигналов i-го НС; A_i — амплитуда сигнала; $ПСП_i$ — сигнал псевдослучайной последовательности i-го НС; D_i — массив данных i-го НС.

Первый сомножитель правой части выражения (4.15) ($A_i \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$) представляет собой несущий сигнал, второй — массив псевдослучайной последовательности, обеспечивающий реализацию функций разделения сигналов и дальномерных измерений, третий — код данных, обеспечивающий передачу потребителю данных о параметрах системы, необходимых для проведения навигационных расчетов.

Код $ПСП_i$ представляет собой определенную последовательность «+1» и «–1», на которые умножается несущий сигнал, т. е. выполняется фазовая манипуляция несущего сигнала — при умножении на –1 фаза несущего сигнала поворачивается на 180°. Пример фрагмента $ПСП_i$ во времени приведен на рис. 4.3.

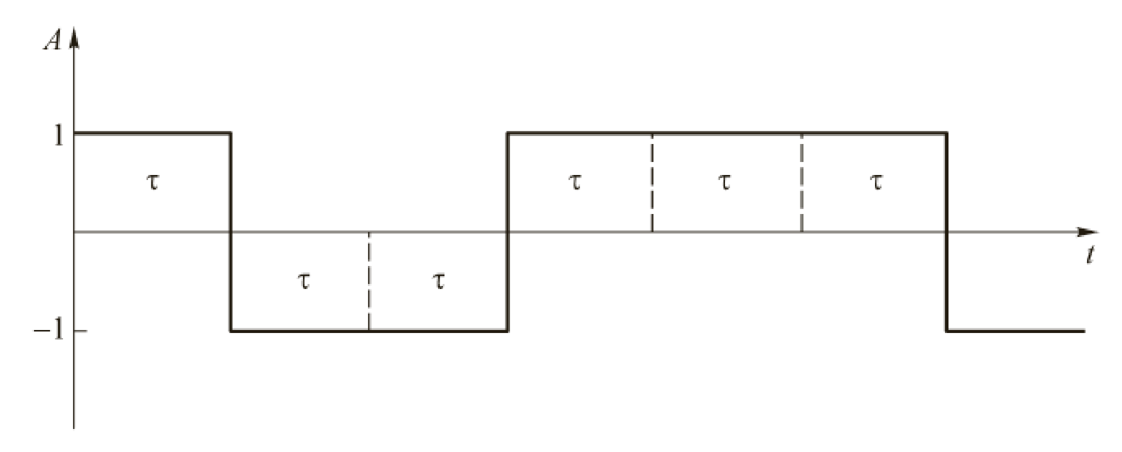


Рис. 4.3. Фрагмент $ПСП_i$ GPS

Для всех НС период $ПСП_i$ GPS T = 1мс. В этот период укладывается 1023 минимальных тактов τ $ПСП_i$, т. е. период каждого i-го ПСП может быть представлен в виде двоичного кода размерностью 1023 Бит. Для каждого $ПСП_i$ очевидно соотношение

$$\int_t^{t+T} ПСП_i(t+\Delta t)\, ПСП_i(t+\Delta t)\, dt = 1023 = U_{max}. \quad (4.16)$$

Кроме того, $ПСП_i$ GPS обладает удивительными свойствами: для каждого i справедливы неравенства

$$\left| \int_t^{t+T} ПСП_i(t)\, ПСП_i(t+\Delta t)\, dt \right| << U_{max} \quad (4.17)$$

для любого Δt из диапазона $\tau < |\Delta t| < T - \tau$,

$$\left| \int_{t}^{t+T} \text{ПСП}_i(t)\text{ПСП}_j(t+\Delta t)dt \right| << U_{\max} \tag{4.18}$$

для любого Δt и $i \neq j$.

Выполнение соотношений (4.16), (4.17) определяет возможность измерения дальности между НС и потребителем, а (4.18) обеспечивает разделение сигналов от разных НС.

В системе ГЛОНАСС реализовано частотное разделение сигналов, т. е. НС и ГЛОНАСС работают на разных частотах. Номинальные значения несущих частот навигационных сигналов в диапазоне L_1 определяются следующим выражением:

$$f_K = f_0 + K\Delta f, \tag{4.19}$$

где K — номер несущей частоты навигационного радиосигнала; Δf = = 562,5 КГц.

Распределение номинальных значений несущих частот f_K по номерам K приведено в табл. 4.1. Распределение номеров K между НС отображается в альманахе системы, передаваемом в составе данных.

Таблица 4.1

Распределение номинальных значений несущих частот по номерам

№ частоты	Номинал частоты в диапазоне L_1	№ частоты	Номинал частоты в диапазоне L_1
13	1609,3125	02	1603,125
12	1608,75	01	1602,5625
11	1608,1875	00	1602,0
10	1607,625	–01	1601,4375
09	1607,0625	–02	1600,8750
08	1606,5	–03	1600,3125
07	1605,9375	–04	1599,7500
06	1605,375	–05	1599,1875
05	1604,8125	–06	1598,6250
04	1604,25	–07	1598,0625
03	1603,6875		

Изменение частотного диапазона ГЛОНАСС осуществлялось поэтапно.

На первом этапе (1998–2005) находящиеся в эксплуатации спутники ГЛОНАСС использовали без ограничений номера частот K = 0…12. Номера частот K = 0, 13 использовались как технологические.

С 2005 г. все находящиеся в эксплуатации спутники ГЛОНАСС используют номера частот K = –7…+6, причем номера K = +5 и K = +6 как техноло-

гические — в ограниченные периоды времени (например, при восполнении орбитальной подсистемы).

Таким образом, для работы 24 НС ГЛОНАСС отведено только 12 частот. На одной и той же частоте работают два НС, находящихся в диаметрально противоположных точках орбиты. В этом случае для наземного потребителя не возникает ситуация, когда антенна приемника может одновременно принимать сигналы от двух НС. Однако, к сожалению, для КА такие ситуации могут возникать. Для защиты от них требуется предусмотреть специальные меры.

Для обеспечения дальномерных измерений на несущий сигнал ГЛОНАСС также накладывается сигнал ПСП, код которого является общим для всех НС. Период ПСП ГЛОНАСС также как и для GPS составляет 1 мс, однако длина кода ПСП состоит из 511 минимальных тактов τ.

Код данных D_i также представляет собой последовательность «+1» и «–1», на которую умножается несущий сигнал, как и при умножении на код ПСП$_i$ выполняется фазовая манипуляция несущего сигнала. Длительность одного такта τ_D составляет 20 мс.

Моменты фазовых манипуляций от ПСП$_i$ и D_i строго синхронизированы — момент фазовой манипуляции от ПСП$_i$ может либо совпадать с моментом фазовой манипуляции от D_i, либо отстоять от него на время, кратное τ. Период передачи данных GPS составляет 12,5 мин, ГЛОНАСС — 2,5 мин.

Здесь рассмотрим только принцип этой работы для общего понимания идеологии работы с сигналом какого-либо НС систем ГЛОНАСС и GPS.

Если в зоне прямой видимости антенны GPS имеется n спутников, то их суммарный сигнал на входе антенны

$$U_{\text{GPS}\,\Sigma} = \sum_{1}^{n} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)\,\text{ПСП}_i D_i. \tag{4.20}$$

При этом частота несущего сигнала ω_i каждого НС в данном случае разная из-за эффекта Доплера.

В современных навигационных приемниках имеется несколько каналов, каждый из которых может организовать работу с сигналом одного из НС. Принцип работы с j-м НС заключается в формировании сигнала $\sin \omega_j t$ ПСП$_j$, совпадающего соответственно по частоте и фазе несущего сигнала и по фазе ПСП входного сигнала j-го НС. Предположим, такой сигнал сформирован. Умножим на него суммарный входной сигнал, определяемый равенством (4.20), и проинтегрируем на интервале от t до $t + T$. Если на этом интервале нет смены знака D_i, то с учетом равенств (4.16) и (4.18) получим

$$\int_{t}^{t+T} \sin \omega_j t\ \text{ПСП}_j\ U_{\text{GPS}\,\Sigma} dt = \frac{A_i}{2} \cdot 1023. \tag{4.21}$$

Здесь, с учетом равенства (4.18), составляющими от сигналов НС$_i$ при $i \neq j$ мы пренебрегли.

Равенство (4.21) получено для $D_i = 1$. При смене знака D_i знак интеграла (4.21) меняется на противоположный. Осуществляя контроль за сменой знака, соответствующим образом читается массив данных D_i.

Ранее мы предположили, что синхронизация сигналов по фазе несущей и по фазе ПСП$_i$ на соответствующем канале выполнена. Процесс синхронизации называется *поиском сигнала*. Поиск осуществляется путем сканирования по частоте и коду ПСП сигнала, формируемого в приемнике, с определенным шагом. Шаг по частоте должен быть в 3–5 раз меньше 1 кГц (что определяет период ПСП 1 мс), а шаг по коду — не более 0,5τ. Диапазон сканирования определяется возможным диапазоном доплеровского смещения частоты для данного потребителя, априорным знанием времени, координат и скорости потребителя, а также альманахов и эфемерид КА. Диапазон сканирования определяет время поиска сигнала. Время выхода на режим навигационных определений, когда найдены сигналы как минимум четырех НС, называется *временем старта приемника*. Различают три вида старта:

– холодный;

– теплый;

– горячий.

При холодном старте в приемнике полностью отсутствует какая-либо информация о времени, параметрах движения и альманахах НС. В этом случае при поиске сигналов НС сканирование выполняется по всему возможному диапазону частот и по всему коду ПСП. Для наземного потребителя доплеровское смещение частоты лежит в диапазоне ±5 кГц, для космического ±50 кГц. Обычно время холодного старта составляет 5…20 мин.

При теплом старте в приемнике имеется альманах и с определенной точностью известно время и параметры движения потребителя. В этом случае время старта составляет 1…2 мин, из которых 30 с занимает время приема эфемерид НС.

При горячем старте в приемнике имеются эфемериды НС, а время и параметры движения известны с достаточно высокой точностью. Время горячего старта составляет 5…20 с. После завершения поиска сигналов НС идет их отслеживание.

В этом случае по смещению кода ПСП$_j$ и по частоте ω_i определяются так называемые псевдодальности и псевдоскорости (или доплеровское смещение) НС$_j$.

Под псевдодальностью понимается величина PR:

$$PR_j = c\Delta t_j, \tag{4.22}$$

где c — скорость света; Δt_j — время распространения сигнала от НС в момент его излучения до момента получения этого сигнала антенной потребителя.

При этом время в момент излучения считается в шкале времени j-го НС, а время приема — в шкале времени аппаратуры потребителя.

Доплеровское смещение — проекция относительной скорости антенны потребителя и НС на направление от потребителя в момент приема сигнала t на НС в момент излучения сигнала, принятого потребителем в момент t:

$$d_j = \frac{f - f_0}{f_0} c, \tag{4.23}$$

где f — частота принятого сигнала в частотной шкале приемника; f_0 — номинальная частота несущего сигнала GPS.

В некоторых навигационных приемниках в качестве измеренных параметров формируются набег фазы за секунду и полная интегральная фаза (от момента формирования достоверного сигнала). Набег фазы за секунду (м) составляет

$$\varphi_j = \lambda_0 \int_{t-1}^{t} (f_j - f_0)\, dt, \tag{4.24}$$

где λ_0 — номинальная длина волны несущего сигнала, $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$.

Полная интегральная фаза

$$CP_j = \lambda_0 \left(\varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (f_j - f_0)\, dt \right), \tag{4.25}$$

где φ_0 — разность фаз несущих входного сигнала на входе в приемник и компенсирующего сигнала, формируемого в приемнике в момент t_0.

К интегральной фазе, соответствующей равенству (4.24), иногда для удобства добавляют начальную константу, кратную числу λ_0. Такой константой может быть значение псевдодальности на момент t_0, округленное до ближайшего целого по λ_0. В этом случае формируемые в приемнике полные интегральные фазы по значению близки к соответствующим псевдодальностям.

4.4. Время в системах ГЛОНАСС и GPS

4.4.1. Шкалы времени в системах ГЛОНАСС и GPS, форматы их представления

Основной шкалой времени системы GPS является шкала системного времени GPS (UTC GPS). Основой для формирования системного времени GPS является водородный стандарт частоты центрального синхронизатора системы, суточная нестабильность которого $\sim 10^{-14}$. Расхождение между UTC GPS и координированным Всемирным временем (UTC) не должно превышать 1 мс (без учета *leap_sec*). Данные для обеспечения привязки передаются потребителю в составе альманаха GPS. Погрешность привязки не должна быть более 1 мкс.

Формат времени GPS — номер недели, отсчитываемый от 06 января 1980 г. (начало нулевой недели), и время в секундах от начала недели. Первый день недели — воскресенье. Так как в системе GPS для передачи потребителю номера недели используется 10 бит, то после 1023-й недели идет нулевая неделя.

Время GPS в отличие от времени UTC идет непрерывно, и при коррекциях времени UTC на 1 с время GPS не корректируется. Поэтому между временем GPS и UTC существует сдвиг на целое число секунд, соответствующее суммарному числу секундных коррекций (так называемых *leap_sec*), начиная с 6 января 1980 года. В 2016 году сдвиг составил 17 с.

Работа каждого спутника GPS осуществляется в собственной шкале времени. Шкалы времени каждого НС периодически сверяются со шкалой времени GPS. Поправки к шкалам времени закладываются на борт каждого спутника. Погрешности сверки времени не превышают 10 нс на момент проведения измерений. Данные для обеспечения привязки времени НС к времени GPS передаются потребителю в составе оперативной информации.

Аппаратура потребителя формирует выходные данные с привязкой либо к времени GPS, либо к времени UTC. Выбор желаемой шкалы определяет потребитель.

Основной шкалой времени системы ГЛОНАСС является шкала системного времени ГЛОНАСС, основой для формирования которого является водородный стандарт частоты центрального синхронизатора системы, его суточная нестабильность составляет $5 \cdot 10^{-14}$. Расхождение между шкалой системного времени ГЛОНАСС и шкалой Госэталона Координированного Всемирного Времени UTC (SU) не должно превышать 1 мс. Погрешность привязки системного времени ГЛОНАСС к шкале UTC (SU) не должна превышать 1 мкс.

Формат времени ГЛОНАСС — номер суток, отсчитываемый внутри четырехлетнего интервала, начиная с первого января последнего високосного года и время в секундах от начала суток.

Шкалы времени каждого НС ГЛОНАСС периодически сверяют с системной шкалой времени, а поправки к шкале времени каждого НС дважды в сутки закладывают на борт каждого спутника. Погрешность сверки времени не превышает 10 нс на момент проведения измерений.

Шкалу системного времени ГЛОНАСС корректируют одновременно с плановой коррекцией Всемирного времени UTC на целое число секунд. Коррекция проводится, как правило, раз в год (в полтора года) в конце одного из кварталов в 00 ч 00 мин 00 с (с 31 декабря на 1 января, с 31 марта на 1 апреля, с 30 июня на 1 июля, с 30 сентября на 1 октября) и осуществляется одновременно всеми пользователями, воспроизводящими или использующими шкалу UTC. Предупреждение о моменте и значении коррекции UTC заблаговременно сообщается пользователям в соответствующих бюллетенях, извещениях и другими способами.

В результате периодического проведения плановой секундной коррекции между системным временем ГЛОНАСС и UTC (SU) не существует сдвига на

целое число секунд. Однако существует постоянный сдвиг на целое число часов, обусловленный особенностями функционирования ГЛОНАСС:

$$t_{\text{ГЛОНАСС}} = \text{UTC(SU)} + 03 \text{ ч } 00 \text{ мин.} \qquad (4.26)$$

Аппаратура потребителя, работающая по сигналам НС ГЛОНАСС, формирует выходные данные с привязкой либо к системному времени ГЛОНАСС, либо к UTC (SU). Выбор желаемой шкалы определяет потребитель. Аппаратура потребителя, работающая по двум системам — ГЛОНАСС и GPS, может формировать выходные данные с привязкой к любой из четырех шкал времени: UTC, UTC (SU), GPS, ГЛОНАСС. В процессе работы она автоматически определяет сдвиг между системными шкалами времени ГЛОНАСС и GPS. Этот сдвиг может также передаваться потребителю.

В 1.3 данного курса лекций были рассмотрены основные системы координат, используемые в космической навигации, в том числе ГСК и ИСК. Отмечалось, что для обеспечения точного перехода между этими системами необходимо знать поправку dUT1, определяющую разность времени между шкалами UTC и UT1 (см. 1.1). Эта поправка выставляется в Интернете. Следует отметить, что после запуска новой модификации НС ГЛОНАСС (ГЛОНАСС-М) в составе неоперативной информации навигационного сообщения ГЛОНАСС передаются данные, позволяющие вычислить эту поправку на любой момент времени. Для этого в составе неоперативной информации сообщений ГЛОНАСС передаются следующие параметры:

N^A — номер суток, к которым относятся передаваемые данные;

B_1 — dUT1 на начало суток N^A;

B_2 — скорость изменения dUT1 за средние солнечные сутки.

Поправка dUT1 в течение текущих суток $N_\text{Т}$ определяется по формуле

$$d\text{UT1} = B_1 + B_2(N_T - N_A). \qquad (4.27)$$

Наличие на борту КА поправки dUT1 позволяет автономно рассчитывают матрицу перехода из ГСК в ИСК J2000 с точностью до ошибок, обусловленных смещением полюса Земли. Более точный расчет требует периодической передачи на борт КА параметров смещения полюса Земли от оси Z ГСК.

4.4.2. Временные параметры, передаваемые в информационных сообщениях. Алгоритмы связи между различными шкалами времени систем ГЛОНАСС и GPS

В информационных сообщениях ГЛОНАСС и GPS передается целый ряд параметров, связывающих между собой различные шкалы времени. Рассмотрим эти параметры и приведем алгоритмы, позволяющие выполнять переход от одной шкалы времени к другой, а также от одного формата представления времени к другому.

В системе GPS время формируется в следующем формате:

N — номер текущей недели, начиная с 06.01.1980;

t — текущее время в секундах от начала текущей недели, за которое принимается воскресенье.

Отсчет недель осуществляется от 0 до 1023, после чего начинается опять нулевая неделя. Период обновления недель называется эпохой GPS и составляет ~19,6 лет. Первая смена эпохи с нулевой на первую произошла в августе 1999 г. Номер эпохи GPS не передается в информационных сообщениях от НС, поэтому для корректной работы навигационного приемника необходимо, чтобы этот номер, а также алгоритм смены номера эпохи были в памяти вычислителя приемника.

Для упрощения алгоритмов связи между различными шкалами удобно в навигационном приемнике ввести общее для двух систем время — так называемое Большое время GPS, выраженное в секундах от начала нулевой эпохи GPS. Переход от текущего времени GPS к Большому времени GPS осуществляется по алгоритму

$$T_{\text{GPS}} = (1024\, N_э + N)\cdot 604\,800 + t_{\text{GPS}}, \tag{4.28}$$

где $N_э$ — номер эпохи GPS; N — номер текущей недели; t_{GPS} — время в секундах от начала текущей недели.

В системе ГЛОНАСС время формируется в формате:

N_T — текущая дата, календарный номер суток внутри четырехлетнего периода, начиная с 1 января последнего високосного года; N_4 — номер четырехлетнего периода, первый год первого четырехлетия соответствует 1996 г.; t — время в секундах от начала суток.

Шкала времени ГЛОНАСС сдвигается на секунду синхронно с временем UTC (SU).

Время в системе ГЛОНАСС соответствует московскому, т. е. если не учитывать доли секунд между временем UTC (SU), то

$$T_{\text{ГЛОНАСС}} = T_{\text{UTC (SU)}} + 3\text{ ч } 00\text{ мин.} \tag{4.29}$$

Между временем UTC (SU) и временем ГЛОНАСС также имеется сдвиг на дробную часть секунды τ_c, значение которого передается в составе неоперативной информации. С учетом этого сдвига связь времени в шкале UTC и ГЛОНАСС определяется соотношением

$$T_{\text{UTC (SU)}} = T_{\text{ГЛОНАСС}} - 03\text{ ч } 00\text{ мин} + \tau_c. \tag{4.30}$$

В составе неоперативной информации передается также слово τ_{GPS} — поправка на расхождение системных шкал времени GPS (T_{GPS}) и ГЛОНАСС ($T_{\text{ГЛОНАСС}}$) в соответствии с выражением

$$T_{\text{GPS}} - T_{\text{ГЛОНАСС}} = \Delta T + \tau_{\text{GPS}}, \tag{4.31}$$

где ΔT — целая часть секунд расхождения шкал времени ГЛОНАСС и GPS.

По аналогии с Большим временем GPS можно ввести понятие Большое время ГЛОНАСС — время в секундах от начала 1996 г., которое определяется по формуле

$$T_{\text{ГЛОНАСС}} = (N_4 - 1)\cdot 1{,}2623\cdot 10^8 + (N_T - 1)\cdot 86\,400 + t_{\text{ГЛОНАСС}}, \tag{4.32}$$

где $t_{\text{ГЛОНАСС}}$ — время в секундах от начала текущих суток.

Время ГЛОНАСС также, как и время UTC периодически корректируется для того, чтобы разность со временем UT1 не превышала 0,9 с. Коррекция может выполняться первого числа любого квартала любого года. О предстоящей коррекции сообщается заблаговременно, в том числе в составе неоперативной информации сообщений ГЛОНАСС: передается двухбитовое слово КР со следующими значениями:

– 00 — в конце текущего квартала коррекции UTC не будет;
– 01 — в конце текущего квартала будет коррекция на + 1 с;
– 11 — в конце текущего квартала будет коррекция на –1 с;
– 10 — решение еще не принято.

В результате коррекции времени UTC накапливается расхождение между временем UTC и временем GPS, называемое *leap_sec*. Значение *leap_sec* передается в составе неоперативной информации сообщений GPS вместе с датой и новым значением *leap_sec* после изменения. С учетом всех поправок связь между Большим временем GPS T_{GPS} и Большим временем ГЛОНАСС $T_{\text{ГЛОНАСС}}$ определяется соотношением:

$$T_{\text{GPS}} = T_{\text{ГЛОНАСС}} + 504\,478\,800 - leap_sec + \tau_{\text{GPS}}. \qquad (4.33)$$

Время UTC и UTC (SU) также удобно передавать в формате Большого времени GPS.

Между временем GPS и временем UTC так же, как и между временем ГЛОНАСС и временем UTC (SU) существует сдвиг на дробную часть секунды. В составе неоперативной информации сообщений GPS передаются параметры, позволяющие рассчитать этот сдвиг в любой момент времени:

– t_{0t} — эталонное время;
– WN_t — номер эталонной недели;
– A_0 — константа полинома;
– A_1 — член 1-го порядка полинома.

На текущий момент времени t текущей недели WN дробная часть смещения шкал GPS и UTC ($t_{\text{GPS}} - t_{\text{UTC}}$) определяется по формуле

$$\tau_{\text{UTC}} = A_0 + A_1\,[t - t_{0t} - (WN - WN_t)\cdot 604\,800]. \qquad (4.34)$$

С использованием поправок τ_{GPS}, τ_{c}, τ_{UTC} можно определить сдвиг между шкалами UTC и UTC (SU):

$$t_{\text{UTC}} - t_{\text{UTC (SU)}} = \tau_{\text{GPS}} - \tau_{\text{UTC}} - \tau_{\text{c}}. \qquad (4.35)$$

Передача сигнала каждым НС осуществляется в собственной шкале времени НС, которая имеет незначительный сдвиг относительно системной шкалы времени (GPS или ГЛОНАСС). Параметры, позволяющие определить этот сдвиг, передаются в составе как оперативной, так и неоперативной информации. Параметры, передаваемые в составе неоперативной информации, позволяют грубо оценить этот сдвиг. Такая оценка используется для обеспечения более быстрого поиска сигналов НС (теплого старта). Параметры, передаваемые в составе оперативной информации, позволяют определить сдвиг шкалы времени НС с высокой точностью. Эта оценка используется для обеспечения

измерений, а также для обеспечения мгновенного поиска сигнала (горячего старта).

В составе неоперативной информации сообщений ГЛОНАСС передается параметр τ_n — представляющий собой сдвиг шкалы времени n-го НС относительно шкалы времени ГЛОНАСС на момент $t_{\lambda n}$ — времени прохождения первого НС внутри суток с номером N^A восходящего узла орбиты с номером n:

$$\tau_{\lambda n} = t_{n\,\text{НС}} - t_{\text{ГЛОНАСС}}. \tag{4.36}$$

В составе оперативной информации сообщений ГЛОНАСС передаются следующие параметры:

t_b — время, к которому относится передаваемая оперативная информация;

τ_n — сдвиг шкалы времени n-го НС относительно шкалы времени ГЛОНАСС на момент t_b;

γ_n — относительное отклонение прогнозируемого значения несущей частоты излучаемого навигационного радиосигнала n-го НС от номинального значения на момент t_b.

Сдвиг шкалы времени n-го НС относительно шкалы времени ГЛОНАСС определяется по формуле

$$\tau_{\lambda n} = \tau_n(t_b) + \gamma_n(t_b)\,(t - t_b), \tag{4.37}$$

где t — текущее время ГЛОНАСС.

В составе неоперативной информации сообщений GPS i-го НС передаются параметры:

– t_{0a} — время, к которому относятся передаваемые данные;

– a_{f0} — смещение часов НС на момент t_{0a};

– a_{f1} — дрейф часов НС на момент t_{0a}.

Смещение часов НС от шкалы времени GPS определяется по формуле

$$\Delta t_{i\text{НС}}(t) = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{0a}), \tag{4.38}$$

где t — текущее время GPS.

В составе оперативной информации сообщений GPS i-го НС передаются параметры:

– t_{0c} — время, к которому относятся передаваемые параметры;

– a_{f0} — смещение часов в момент t_{0c};

– a_{f1} — дрейф часов в момент t_{0c};

– a_{f2} — производная дрейфа часов в момент t_{0c}.

Смещение часов НС от шкалы времени GPS определяется по формуле

$$\Delta t_{i\text{НС}}(t) = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{0c}) + a_{f2}(t - t_{0c})^2, \tag{4.39}$$

где t — текущее время GPS.

На уход бортовых часов НС влияет также релятивистский эффект: изменение высоты полета НС приводит к изменению бортового времени. В системе ГЛОНАСС это изменение учитывается на борту НС, и передаваемый сиг-

нал уже включает необходимую поправку на релятивистский эффект. В системе GPS эта поправка должна формироваться в навигационном приемнике и может быть определена по формуле

$$\Delta t_r = -\frac{2\bar{X} \cdot \bar{V}}{c^2}, \qquad (4.40)$$

где $\bar{X}$ — вектор НС в ГСК; $\bar{V}$ — вектор скорости НС в ГСК; c — скорость света.

Векторы $\bar{X}$ и $\bar{V}$ находятся в процессе решения навигационной задачи. Для вычисления релятивистской поправки Δt_r по формуле (4.40) можно использовать векторы $\bar{X}$ и $\bar{V}$, вычисленные на предыдущей секунде.

После формирования поправок к времени НС пользователь должен корректировать время НС по формуле

$$t = t_{\text{НС}} - \Delta t_{\text{НС}}, \qquad (4.41)$$

где $\Delta t_{\text{НС}}$ — суммарная поправка времени НС, учитывающая все рассмотренные выше составляющие.

Приведенные формулы взаимного преобразования форматов времени GPS, ГЛОНАСС, Большого времени GPS, Большого времени ГЛОНАСС, календарного времени UTC и GPS, календарного времени ГЛОНАСС, а также формулы формирования поправок, позволяющих осуществлять переход между разными шкалами времени: UTC, UTC (SU), GPS, ГЛОНАСС, НС_{GPS} $\text{НС}_{\text{ГЛОНАСС}}$, не являются сложными, однако множество различных вариантов задач и их решений приводит к значительным проблемам при отладке соответствующих программ, обеспечивающих решение этих задач. Поэтому рекомендуется использовать уже готовое и верифицированное программное обеспечение.

4.4.3. Формирование собственной шкалы времени в навигационном приемнике. Начальная оцифровка шкалы времени

Принцип работы ГСНС основан на измерении времени распространения навигационного сигнала от НС до антенны навигационного приемника. Для выполнения таких измерений в самом приемнике должны быть реализованы достаточно точные часы, формирующие внутреннее аппаратное время. Для этого в состав приемника должен входить генератор частоты, стабильность работы которого обычно составляет $10^{-6}…10^{-7}$ с/с. Однако в момент включения в аппаратуре нет никакой информации о времени. Внутренние часы после включения могут отсчитывать время, например, в секундах от момента включения. Для нормальной работы аппаратуры с системами GPS или ГЛОНАСС требуется оцифровка секунд этого времени в соответствии с системным временем ГЛОНАСС или GPS и более или менее точная синхронизация внутренних часов приемника с системным временем. Не вдаваясь в де-

тали процесса синхронизации аппаратного времени с системным, рассмотрим принцип решения этой задачи.

После включения навигационный приемник путем сканирования по частоте и коду выполняет поиск сигналов НС на разных каналах. При захвате сигнала НС на каком-либо из каналов начинается процесс чтения данных, передаваемых от НС. Реализация этого процесса связана с достаточно точной привязкой 20 миллисекундных тактов принимаемых данных к шкале внутренних часов приемника. Точность такой привязки должна быть выше 1 мс.

В системе GPS информация передается в виде кадров, состоящих из 1500 бит. Длительность передачи кадра — 30 с. Каждый кадр состоит из 5 строк, состоящих из 300 бит. Длительность передачи строки — 6 с. Передача данных строго синхронизирована со шкалой времени GPS. Начало первого кадра и, соответственно, первой строки первого кадра совпадает с началом недели. В каждой из передаваемых строк одно из слов (называемое «ключ») содержит номер текущей недели (10 разрядов) и число полных 6-секундных интервалов, прошедших с начала текущей недели. Так как слово «ключ» расположено в конкретном месте строки, время от начала чтения строки до момента чтения в приемнике этого слова строго известно. Если в приемнике также есть значение текущей эпохи GPS, то имеющейся информации достаточно, чтобы выполнить оцифровку часов приемника и их привязку к времени GPS. При этом если бы было известно время распространения сигнала от НС до приемника, то привязка часов могла быть выполнена с точностью выше 1 мс. Однако время распространения сигнала от НС до Земли составляет ~0,08±0,01 с в зависимости от конкретного расстояния между НС и потребителем, составляющего 24 000±3000 км. Среднее время распространения 0,08 с может быть учтено при выставке часов. А неопределенность дальности ±3000 км приводит к неопределенности начальной установки часов по сигналу 1 НС равной ±10 мс. Более точная установка выполняется после решения в приемнике навигационной задачи.

В системе ГЛОНАСС, как и в GPS, информация передается в виде навигационных кадров, состоящих из 1500 бит. Каждый кадр имеет 15 строк, состоящих из 100 бит каждая, его длительность 2 с. В каждом кадре передается информация о номере текущих суток N_T от начала текущего четырехлетия и о времени t_K начала текущего кадра внутри текущих суток, включающем количество целых часов и целых минут от начала суток, а также количество 30-секундных интервалов, прошедших с начала текущей минуты. Зная расположение параметра t_K в кадре, легко привязать момент чтения этого параметра к началу суток. Зная номер текущего четырехлетия, передаваемый в составе неоперативной информации, легко определить текущую дату. Как и в системе GPS, точность начальной привязки внутренних часов приемника к системному времени по информации от одного НС составляет ±10 мс. Точная привязка внутренних часов приемника к системному времени выполняется после решения навигационной задачи.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные характеристики и параметры системы ГЛОНАСС?
2. Каковы основные характеристики и параметры системы GPS?
3. Что такое «сырые» измерения в аппаратуре потребителя?
4. Что такое шкала времени ГЛОНАСС и каков формат ее представления?
5. Что такое шкала времени GPS и каков формат ее представления?
6. Как формируется шкала времени в навигационном приемнике?

Глава 5
Альманахи и эфемериды ГЛОНАСС и GPS. Алгоритмы расчета координат и скорости навигационного спутника по альманахам и эфемеридам. Точностные характеристики и «время жизни» альманахов и эфемерид систем ГЛОНАСС и GPS

5.1. Общие сведения

После определения псевдодальности и псевдоскорости можно выполнять определение координат и скорости антенны приемника по формулам, аналогичным (4.9) и (4.13), полученным в 4.2. Однако для этого необходимо знать координаты и скорость НС. Кроме того, измерения в аппаратуре потребителя проводятся в собственной шкале времени аппаратуры, а момент излучения принятого сигнала известен в шкале времени каждого НС. Все эти времена отличаются друг от друга. Для проведения потребителями навигационных определений, привязки к точному времени и для планирования навигационных сеансов предусмотрены навигационные сообщения, передаваемые от НС потребителю в массивах данных.

По содержанию навигационное сообщение разделяется на оперативную и неоперативную информацию. Оперативная информация относится к тому НС, с борта которого передается данный навигационный радиосигнал, содержащий:

– оцифровку меток времени НС;

– сдвиг шкалы времени НС относительно шкалы времени системы ГЛОНАСС или GPS;

– отличие несущей частоты излучаемого навигационного радиосигнала от номинального значения;

– эфемериды НС (параметры орбиты, позволяющие определить с высокой точностью координаты и скорость НС в любой момент времени).

Неоперативная информация содержит альманах системы, включающий:

– данные о состоянии всех НС системы (альманах состояния);

– сдвиг шкалы времени каждого НС относительно шкалы времени системы ГЛОНАСС или GPS;

– параметры орбит всех НС системы (альманах орбит);

– сдвиг шкалы времени системы ГЛОНАСС или GPS относительно всемирной шкалы UTC.

В системе ГЛОНАСС вся передаваемая информация имеет длительность 2,5 мин и состоит из пяти кадров длительностью 30 с. Каждый кадр состоит из 15 строк длительностью 2 с. В пределах каждого кадра передается полный объем оперативной информации для данного НС и часть неоперативной информации. Оперативная информация содержится в первых четырех строках кадра, неоперативная — с пятой по пятнадцатую.

В системе GPS формат основного сообщения представляет собой кадр, состоящий из 1500 бит, который скомпонован из пяти субкадров, называемых строками, по 300 бит. Строки передаются 6 с. Оперативный период повторения информации, содержащейся в кадре, $T_K = 30$ с.

В строке 1 с периодом T_K информация передается для коррекции бортовых часов НС. Строки 2, 3 содержат оперативную эфемеридную информацию о данном НС, передаваемую также с периодом T_K. Строка 4 предназначена для передачи параметров задержки распространения радиоволн в ионосфере, параметры согласования системного времени GPS со всемирным временем UTC и некоторых специальных сообщений. Строка 5 содержит информацию о конфигурации, состоянии всех НС системы и их альманахов.

Строки 4 и 5 имеют другие периоды повторения. Они составляют 1/25 часть полного объема, поэтому полное сообщение требует передачи 25 кадров, а период передачи неоперативной информации составляет 12,5 мин.

5.2. Алгоритм расчета координат и скорости НС по данным альманаха GPS. Точность формируемых координат

Альманах GPS, передаваемый потребителю для каждого НС в информационных сообщениях содержит следующие параметры:

N_{0a} — номер недели, на которую передаются данные альманаха;

t_{0a} — опорное время альманаха — время внутри недели N, на которое передаются данные альманаха;

e — эксцентриситет НС;

Δi — поправка к наклонению $i_0 = 54°$;

Ω_0 — угол восходящего узла на момент начала недели N;

$\dot{\Omega}$ — скорость прецессии орбиты;

$\sqrt{a}$ — корень из большой полуоси;

ω — аргумент перигея;

M_0 — средняя аномалия на эпоху t_{0a}.

Приведем алгоритм расчета координат и скорости НС в момент времени t недели N, рекомендуемый основным контрольным интерфейсным документом GPS — *ICD*-200:

1) $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ — формирование большой полуоси;

2) $n_0 = \sqrt{\mu / a^3}$ — формирование среднего движения, где μ — константа гравитационного поля Земли, $\mu = 398\,600{,}44$ км^3/с^2;

3) $t_k = (N - N_{0a})604\,800 + t - t_{0a}$ — время от момента t_{0a};

4) $M_k = M_0 + n_0 t_k$ — средняя аномалия на момент t_k;

5) $M_k = E_k - e \sin E_k$ — уравнение Кеплера для эксцентрической аномалии E_k на момент t_k;

6) $\sin \vartheta_k = \dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{1 - e\cos E_k}$; $\cos \vartheta_k = \dfrac{\cos E_k - e}{1 - e\cos E_k}$ — формирование истинной аномалии ϑ_k;

7) $\rho_k = a(1 - e \cos E_k)$ — формирование текущего радиуса орбиты;

8) $i_k = i_0 + \Delta i$, $i_0 = 54°$ — формирование наклонения;

9) $\Omega_k = \Omega_0 + \left(\dot{\Omega} - \Omega_3\right) t_k - \Omega_3 t_{0a}$ — формирование долготы восходящего узла;

10) $p = a\,(1 - e^2)$ — формирование параметра орбиты:

- $V_r = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\, e \sin \vartheta$ — формирование радиальной составляющей скорости;
- $V_n = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}(1 + e\cos\vartheta)$ — формирование нормальной составляющей скорости;
- $u_k = \omega + \vartheta_k$ — формирование аргумента широты;
- формирование текущих координат и вектора абсолютной скорости НС в ГСК:

$$
\begin{aligned}
&X = r\,(\cos u_k \cos \Omega - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k);\\
&Y = r\,(\cos u_k \sin \Omega k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i_k);\\
&Z = r \sin u_k \sin i_k;\\
&V_{0x} = V_r\,(\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k) -\\
&- V_n\,(\sin u_k \cos \Omega_k + \cos u_k \sin \Omega_k \cos i_k);\\
&V_{0y} = V_r(\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i_k) -\\
&- V_n\,(\sin u_k \sin \Omega_k - \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k);\\
&V_{0z} = V_r \sin u_k \sin i_k + V_n \cos u_k \sin i_k;
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

- формирование вектора скорости НС в ГСК:

$$
\begin{aligned}
&\bar{V}_x = \bar{V}_{0x} + \Omega_3 Y;\\
&\bar{V}_y = \bar{V}_{0y} - \Omega_3 X;\\
&\bar{V}_z = \bar{V}_{0z}.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Приведенный алгоритм является упрощенным. Из всех возмущений, действующих на НС, учитывается только сжатие Земли, обусловливающее прецессию орбиты $\dot{\Omega}$, однако предполагается, что НС движется в равномерно прецессирующей плоскости. Отклонениями НС из этой плоскости приведенный алгоритм пренебрегает. Не учитывается также прецессия перицентра, так как во-первых, для наклонений ~55° значение этой прецессии на порядок меньше скорости прецессии плоскости орбиты, во-вторых, при малых эксцентриситетах прецессия перицентра слабо влияет на изменение координат НС. При таком существенном упрощении алгоритмов прогноза параметров орбиты спутников GPS по данным альманаха представляют интерес точность прогноза и ее зависимость от времени. На рис. 5.1 и 5.2 приведены графики ошибок прогноза орбит GPS по данным альманаха для разных интервалов времени. На рис. 5.1 показаны графики для интервала 2 месяца, на рис. 5.2 — те же графики в более крупном масштабе для интервала 1 неделя. Прогноз выполнен по данным альманаха GPS. Выбранные на произвольную дату ошибки прогноза получены путем сравнения спрогнозированных по этому альманаху координат НС с данными прецизионных эфемерид этих же НС для

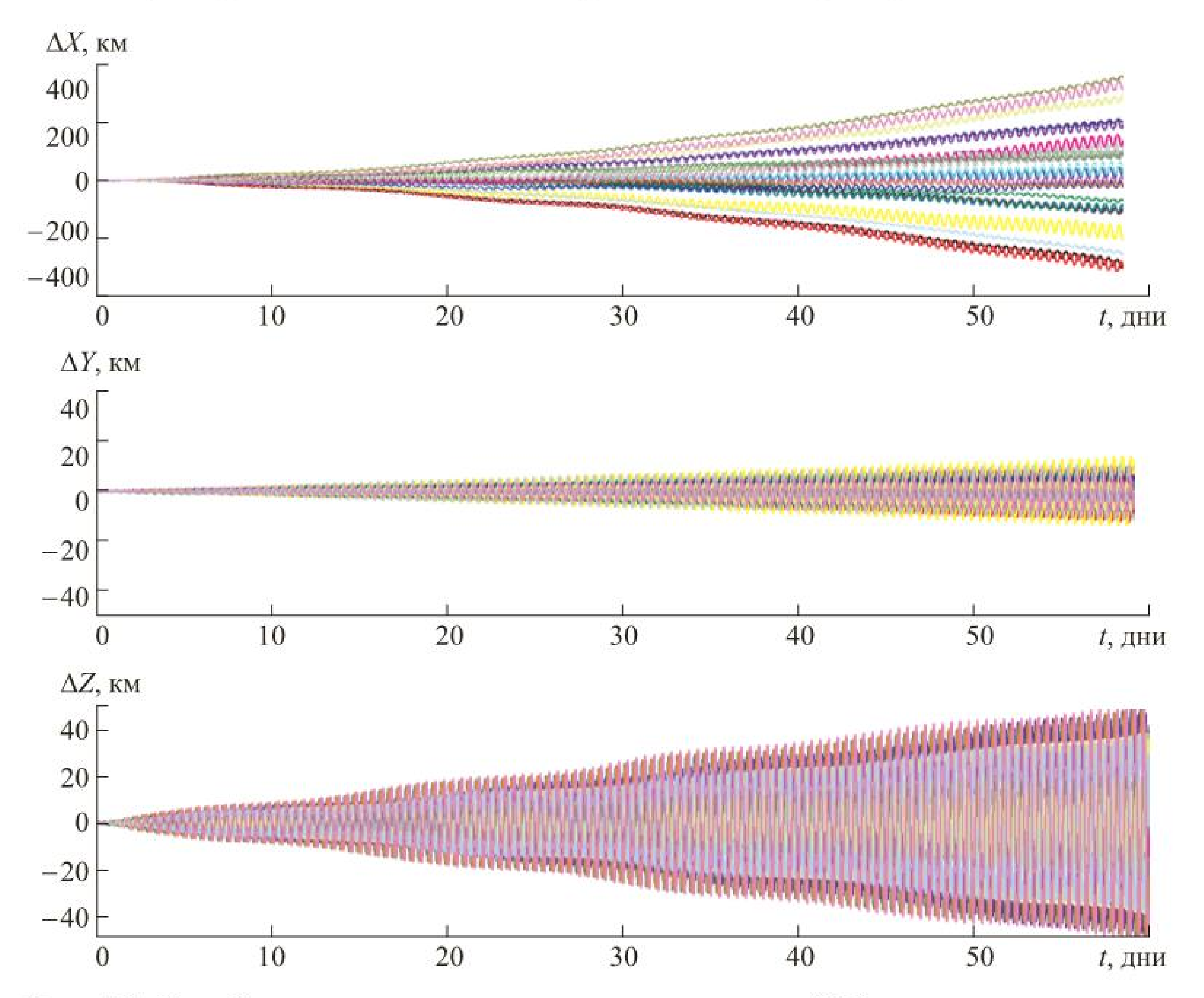


Рис. 5.1. Ошибки двухмесячного прогноза альманахов GPS для разных интервалов времени

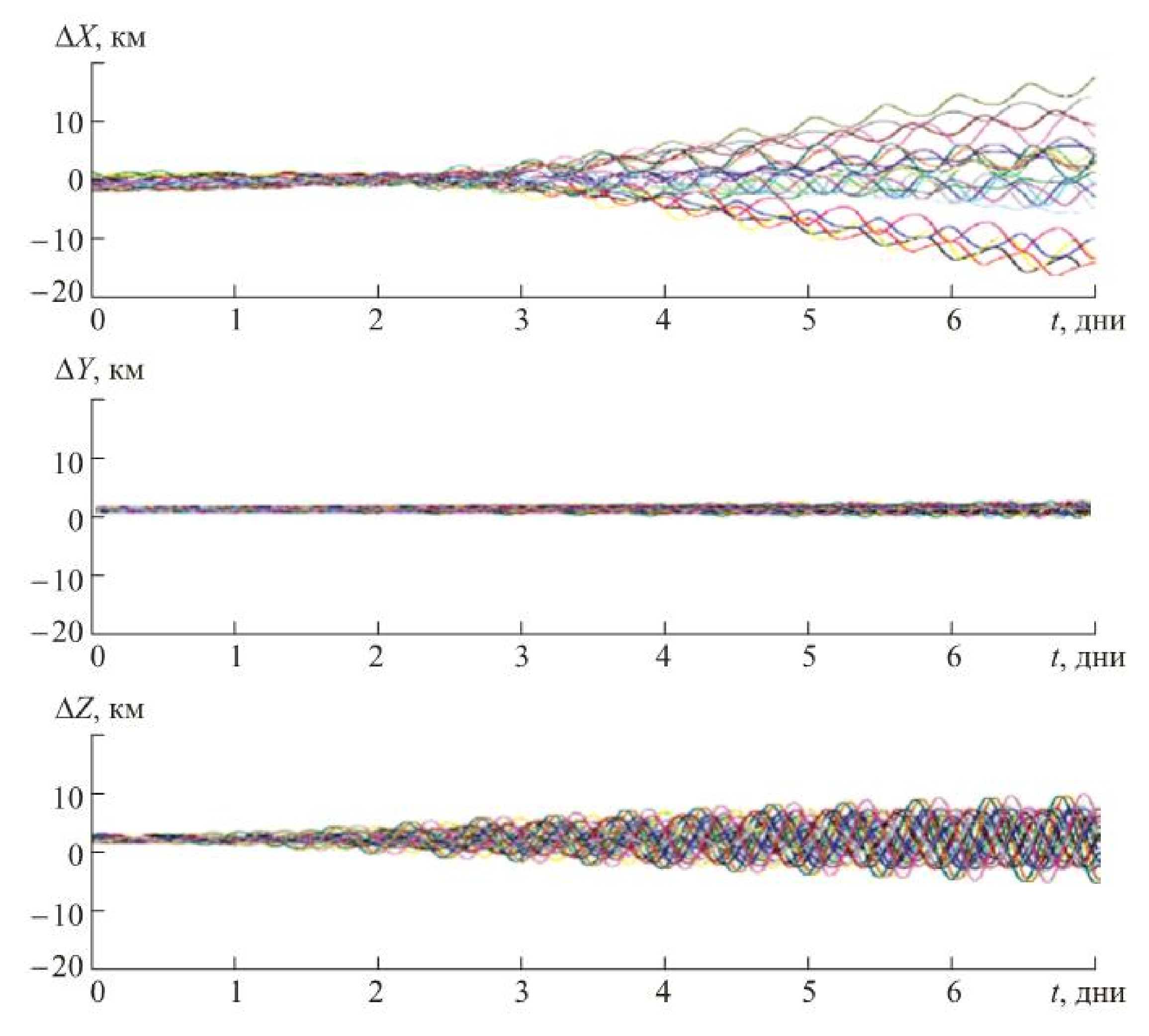


Рис. 5.2. Ошибки недельного прогноза альманахов GPS для разных интервалов времени

этого же интервала времени, представленных в *Internet International GNSS SERVISE* — Международной службе глобальных навигационных спутниковых систем (*IGS*). Эфемериды получены в результате постобработки высокоточных лазерных измерений. Декларируемая точность эфемерид по координатам — 3 см. Поэтому можно считать, что приведенные на рис. 5.1, 5.2 графики соответствуют ошибкам прогноза координат по данным альманаха.

Ошибки, приведенные на указанных графиках, представлены в ОСК. Из графиков следует, что ошибки прогнозируемых координат по осям *X*, *Y*, *Z* ОСК в течение первых двух дней от $T_{0\,e}$ не превышают 2 км. К концу первой недели от $T_{0\,e}$ ошибка возрастает по продольной дальности до 18 км, по боковой дальности до 8 км. К концу первого месяца ошибки возрастают до 100 км по продольной дальности и 30 км по боковой дальности. Ошибка по высоте не превышает 7 км. К концу второго месяца ошибки возрастают до 350 км по продольной дальности, до 50 км по боковой дальности и до 15 км по высоте. Пять спутников из 30 в течение двух месяцев выполняли коррекцию орбиты. Из-за коррекции точность прогноза для этих спутников заметно ухудшилась и составляет до 1…2 тыс. км. Графики ошибок прогноза для этих НС исключены из рис. 5.1. Таким образом можно считать, что «время жизни» альманахов GPS, в течение которого точность прогноза координат НС составляет 1…2 км,

не превышает двух дней. Вне «времени жизни» начинается достаточно резкий рост ошибок прогноза, хотя в течение недели ошибки по координатам не превышают 20 км.

Графики, приведенные на рис. 5.1, 5.2, позволяют оценить возможность применения эфемерид разного возраста для решения тех или иных функциональных задач. Например, альманах, заложенный в АСН на Земле за 2 месяца до старта КА может использоваться для оценки видимости НС и организации «теплого» старта АСН. Двухдневный альманах может использоваться для решения задач высокоточной относительной навигации и ориентации.

Рассмотренный выше прогноз орбит НС по данным альманаха выполняется по простым алгоритмам, не требующим высокого быстродействия вычислителя. Этот алгоритм вполне может быть реализован на бортовых вычислительных средствах, имеющих существенные ограничения по быстродействию.

5.3. Алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным эфемерид GPS. Точность формируемых координат и скорости

Эфемериды GPS, представляющие собой оперативную информацию о параметрах движения НС, содержат аналогичные по составу параметры, как и альманах GPS. Кроме того, в состав параметров эфемерид входит ряд поправок, обеспечивающих возможность прогноза орбиты НС с метровыми точностями на время около 2 ч. Состав эфемерид следующий:

M_0 — средняя аномалия на время эфемерид t_{0e};

Δn — поправка к вычисляемому среднему движению;

e — эксцентриситет;

$\sqrt{a}$ — корень из большой полуоси;

Ω_0 — долгота восходящего узла на начало текущей недели;

i_0 — угол наклонения на момент t_{0e};

ω — аргумент перигея;

$\dot{\Omega}$ — скорость восходящего узла;

IDOT — скорость угла наклонения;

C_{uc} — косинусная поправка аргумента широты;

C_{us} — синусная поправка аргумента широты;

C_{rc} — косинусная поправка радиуса орбиты;

C_{rs} — синусная поправка радиуса орбиты;

C_{ic} — косинусная поправка наклонения;

C_{is} — синусная поправка наклонения;

t_{0e} — эфемеридное время, на которое даны параметры орбиты;

IODE — выпуск данных (смена номера *IODE* означает обновление эфемерид в передаваемом сообщении).

По отношению к данным альманаха в данных эфемерид имеются следующие изменения:

• дополнительно введена поправка Δn к вычисляемому среднему движению;

• в эфемеридах передается значение угла наклонения i_0 на момент t_{0e}, тогда как в альманахе передается поправка Δi к среднему значению наклонения 54°;

• дополнительно введена скорость угла наклонения *IDOT*, тогда как в альманахе изменением наклонения пренебрегают;

• в эфемеридах не передается номер недели. Предполагается, что текущее время t и t_{0e} относятся к одной текущей неделе;

• дополнительно введены шесть косинусно-синусных поправок: C_{uc}, C_{us}, C_{rc}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is}, уточняющих значения аргумента широты, радиуса и наклонения.

Приведем алгоритм расчета координат и скорости НС в момент времени t, рекомендуемый основным контрольным интерфейсным документом IS-GPS-200:

1) $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$ — формирование большой полуоси;

2) $n_0 = \sqrt{\mu/a^3}$ — формирование вычисленного среднего движения;

3) $n = n_0 + \Delta n$ — формирование среднего движения с учетом поправки;

4) $t_k = t - t_{0e}$ — формирование интервала прогноза от t_{0e};

5) $M_k = M_0 + nt_k$ — средняя аномалия на момент t_k;

6) $M_k = E_k - e\sin E_k$ — решается уравнение Кеплера для эксцентрической аномалии E_k на момент t_k;

7) $\sin\vartheta_k = \dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{1-e\cos E_k}$; $\cos\vartheta_k = \dfrac{\cos E_k - e}{1-e\cos E_k}$ — формирование истинной аномалии ϑ_k по значениям $\sin\vartheta_k$ и $\cos\vartheta_k$;

8) $\Phi_k = \vartheta_k + \omega$ — формирование аргумента широты;

9) $\rho_k = a(1-e\cos E_k)$ — формирование текущего радиуса орбиты;

10) $i_k = i_0 + IDOT\ t_k$ — формирование текущего наклонения;

11) $\Omega_k = \Omega_0 + \left(\dot{\Omega} - \Omega_з\right)t_k - \Omega_з t_{0e}$ — формирование долготы восходящего узла;

12) $\delta u_k = C_{uc}\cos 2\Phi_k + C_{us}\sin 2\Phi_k$ — поправка аргумента широты;

13) $\delta\rho_k = C_{pc}\cos 2\Phi_k + C_{ps}\sin 2\Phi_k$ — поправка радиуса орбиты;

14) $\delta i_k = C_{ic}\cos 2\Phi_k + C_{is}\sin 2\Phi_k$ — поправка к наклонению;

15) $u_k = \Phi_k + \delta u_k$ — коррекция аргумента широты;

16) $\rho_k = \rho_k + \delta\rho_k$ — коррекция радиуса орбиты;

17) $i_k = i_k + \delta i_k$ — коррекция наклонения.

Расчет координат *X*, *Y*, *Z* НС в ГСК:

1) $X_k = \rho_k (\cos U_k \cos\Omega_k - \sin U_k \sin\Omega_k \cos i_k)$;

2) $Y_k = \rho_k (\cos U_k \sin\Omega_k + \sin U_k \cos\Omega_k \cos i_k)$;

3) $Z_k = \rho_k \sin U_k \sin i_k$.

В контрольном документе IS-GPS-200 не приведены рекомендуемые формулы для вычисления скорости НС в ГСК. С высокой точностью можно определять скорость НС по разности координат:

$$\bar{V}_k = \frac{\bar{X}_{k+1} - \bar{X}_{k-1}}{2}. \qquad (5.3)$$

Для нахождения вектора скорости по алгоритму (5.3) в момент времени t_k необходимо вычислять координаты НС в предшествующую и последующую секунды по отношению к времени t_k, что требует дополнительных расчетов. Однако поиск вектора скорости может быть выполнен и по следующему алгоритму, аналогичному алгоритму вычисления скорости по данным альманаха:

1) формирование параметров Кеплера для скорости:

$$\Phi_v = n\sqrt{1-e^2}/(1-e\cos E)^2;$$

$$u_v = \Phi_v [1 + 2(C_{us} \cos 2\Phi_k - C_{us} \sin 2\Phi_k)];$$

$$\rho_v = a \sin E \cdot n\, e / [1 - e\cos E + 2\Phi_v (C_{rs} \cos 2\Phi_k - C_{rc} \sin 2\Phi_k)];$$

$$i_v = IDOT + 2\Phi_v (C_{is} \cos 2\Phi_k - C_{ic} \sin 2\Phi_k);$$

$$\Omega_{0v} = \dot{\Omega} - \Omega_З;$$

2) положение и скорость в орбитальной плоскости:

$$x_p = \rho_k \cos u_k;$$

$$y_p = \rho_k \sin u_k;$$

$$x_{pv} = \rho_v \cos u_k - \rho_k \sin u_k\, u_v;$$

$$y_{pv} = \rho_v \sin u_k + \rho_k \cos u_k\, u_v;$$

3) положение и скорость в WGS_{84}:

$$X = x_0 \cos\Omega_k - y_p \sin\Omega_k \cos i_k;$$

$$Y = x_p \sin\Omega_k + y_p \cos\Omega_k \cos i_k;$$

$$Z = y_p \sin i_k;$$

$$V_x = x_{pv} \cos\Omega_k - y_{p_v} \cos i_k \sin\Omega_k - x_p \sin\Omega_k\, \Omega_{0v} -$$
$$- y_p (-\sin i_k \sin\Omega_k\, i_v + \cos i_k \cos\Omega_k\, \Omega_{0v});$$

$$V_y = x_{p_v} \sin\Omega_k + y_{pv} \cos i_k \cos\Omega_k + x_p \cos\Omega_k \, \Omega_{0v} +$$
$$+ y_p (-\sin i_k \cos\Omega_k \, i_v - \cos i_k \sin\Omega_k \, \Omega_{0v});$$

$$V_z = u_{pv} \sin i_k + y_p \cos i_k \, i_v .$$

На рис. 5.3 приведены типовые графики ошибок проекций скорости ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z для спутников GPS в ГСК, полученные сравнением вектора скорости, найденного по приведенным выше алгоритмам, с опорными высокоточными значениями скорости, вычисленными путем постобработки лазерных измерений и представленных на сайте IGS. Ошибки опорных векторов скорости оцениваются погрешностью порядка сотых долей миллиметра в секунду. Из приведенных графиков видно, что ошибки скорости на интервале ~1,5 ч от t_{0e} составляют 0,1…0,3 мм/с, после чего резко возрастают. Через ~5 ч от t_{0e} ошибки уже достигают 1 см/с.

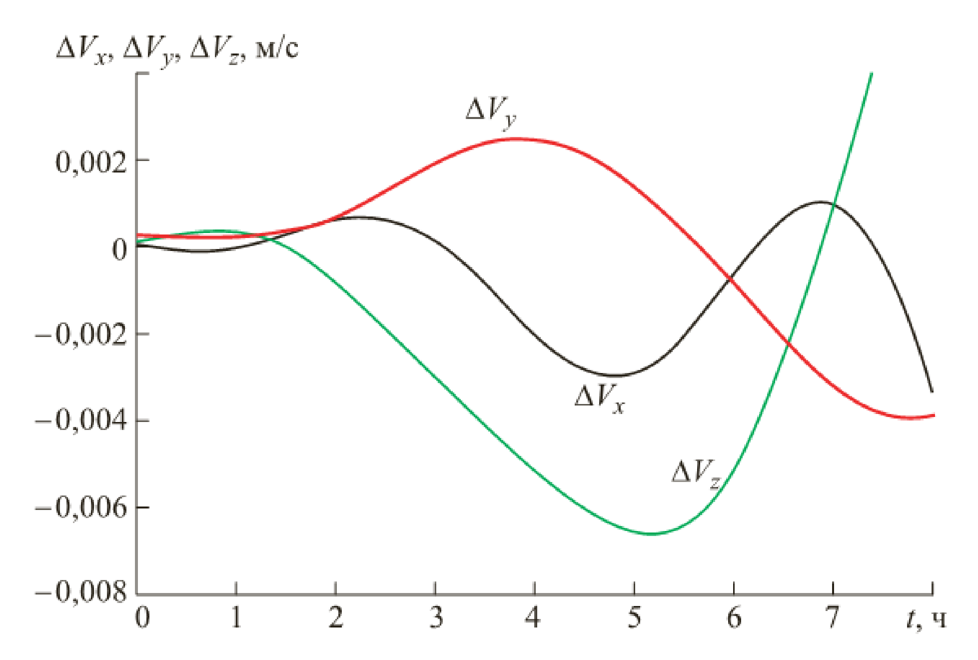


Рис. 5.3. Ошибки прогноза эфемерид GPS по скорости на интервале 8 ч

Оценим точность координат спутников GPS в зависимости от времени. На рис. 5.4, 5.5 приведены графики ошибок прогноза орбит GPS по данным эфемерид для разных интервалов времени: на рис. 5.4 — для интервала сутки, на рис. 5.5 — для интервала 3 ч. Прогноз выполнен по эфемеридам, выбранным на произвольную дату. Ошибки прогноза получены путем сравнения спрогнозированных по эфемеридам координат НС с данными прецизионных эфемерид тех же НС для тех же интервалов времени. Эфемериды получены в результате постобработки высокоточных лазерных измерений. Декларируемая точность по координатам — 3 см. Поэтому можно считать, что приведенные на рис. 5.4, 5.5 графики соответствуют ошибкам прогноза координат по данным эфемерид, если прогноз реализуется по рекомендуемым официальным алгоритмам.

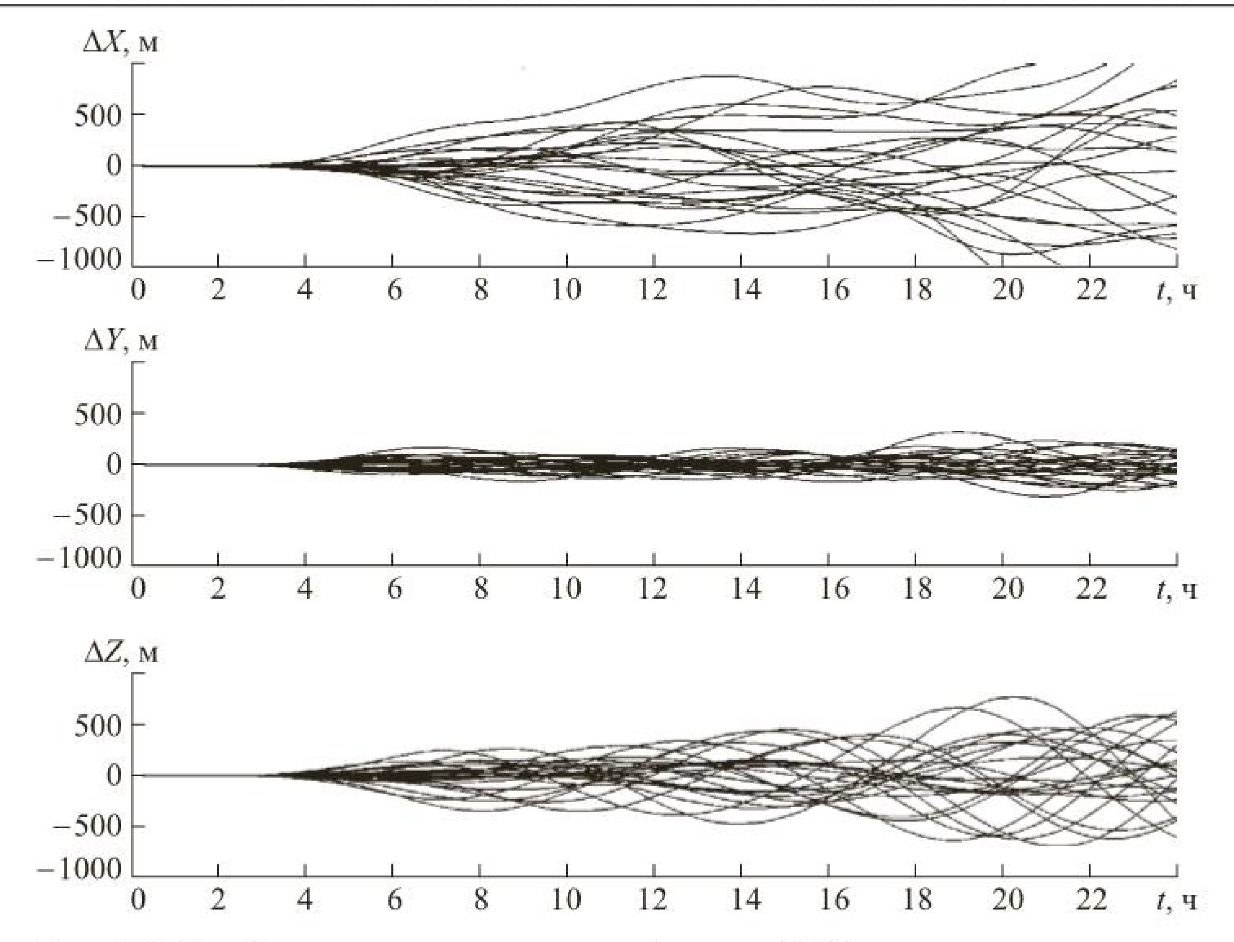


Рис. 5.4. Ошибки суточного прогноза эфемерид GPS

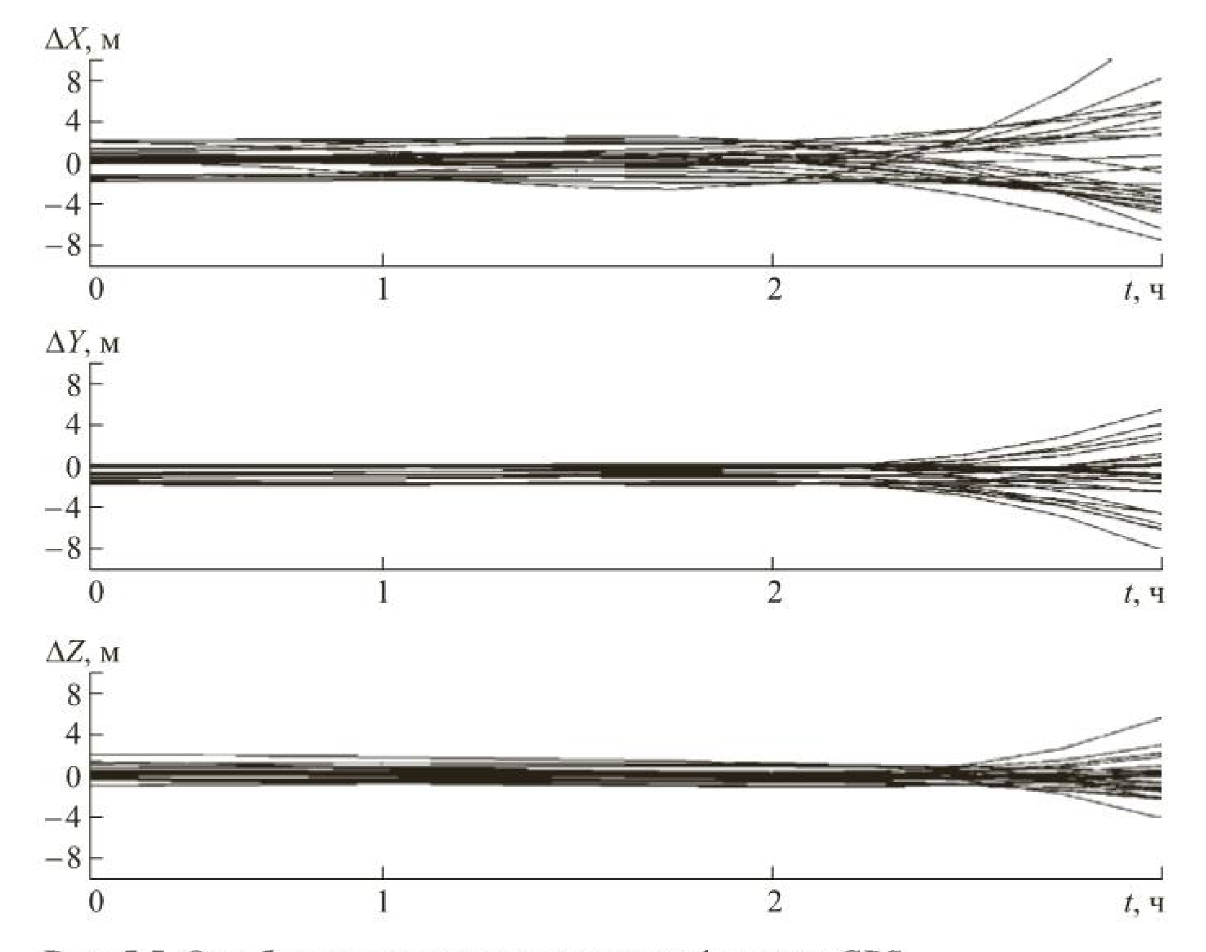


Рис. 5.5. Ошибки трехчасового прогноза эфемерид GPS

Ошибки, приведенные на указанных графиках, представлены в ОСК. Из графиков следует, что ошибки прогнозируемых координат X, Y, Z по осям ОСК в течение первых двух часов от t_{0e} лежат в диапазоне ±2 м. Затем начинается быстрый «разлет», и к концу суток ошибки по продольной и боковой дальности достигают 1 км, по высоте — 300 м.

5.4. Алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным альманаха ГЛОНАСС. Точность формируемых координат

Альманах ГЛОНАСС, передаваемый потребителю, для каждого НС в информационных сообщениях содержит следующие параметры:

N_A — номер суток, на которые дан альманах;

t_A — московское декретное время прохождения восходящего узла, ближайшего к началу суток N_A;

λ — долгота восходящего узла на момент t_A;

Δi — поправка к наклонению $i_{\text{ср}} = 63°$;

ΔT_A — поправка к среднему драконическому периоду $T_{\text{ср}} = 43\,200$ на момент t_A;

T' — скорость изменения периода обращения;

e — эксцентриситет;

ω — аргумент перигея на момент t_A.

Рекомендуемые алгоритмы вычисления векторов координат и скорости НС на любой заданный момент времени по данным альманаха приведены в ИКД ГЛОНАСС. По сравнению с рекомендуемыми алгоритмами для альманаха GPS, где рассматривается кеплерово движение НС в прецессирующей плоскости орбиты, в рекомендуемых алгоритмах для альманаха ГЛОНАСС рассматривается движение НС вне прецессирующей плоскости, учитываются вековые и периодические возмущения от второй зональной гармоники C_{20} в разложении геопотенциала, характеризующей полярное сжатие Земли.

В результате рекомендуемые алгоритмы являются необоснованно громоздкими. При этом не достигается какое-либо повышение точности алгоритма, так как не учитываются основные возмущения — гравитационное влияние Луны и Солнца, обусловливающее значительно бóльшую ошибку прогноза орбиты по сравнению с учитываемыми в алгоритме поправками. Поэтому здесь приводятся значительно более простые алгоритмы расчета векторов координат и скорости НС, которые обеспечивают практически такую же точность прогноза, но требуют для своей реализации в несколько раз меньший объем вычислений:

$i = i_{\text{ср}} + \Delta i$ — наклонение $i_{\text{ср}} = 63°$;

$T_{\text{др}} = T_{\text{ср}} + \Delta T$ — начальный драконический период, $T_{\text{ср}} = 43\,200$;

$n = 2\pi/T_{\text{др}}$ — среднее движение;

$a = \sqrt[3]{\mu / n^2}$ — большая полуось, $\mu = 398\,600{,}44$ км^3/с^2;

$\Delta t_п = 86\,400(N_{тек} - N_A) + t_{тек} - t_A$ — время от прохождения экватора в момент t_A до текущего момента;

$N_{тек}$ — текущая неделя;

$t_{тек}$ — текущее время в текущую неделю;

$\dot{\lambda} = -10\left(\dfrac{a_e}{a}\right)^{7/2} \cos i \dfrac{\pi}{180 \cdot 86\,400}$ — скорость прецессии орбиты, $a_e = 6\,378\,136$ м — экваториальный радиус Земли;

$\dot{\omega} = 5\left(\dfrac{a_e}{a}\right)^{7/2} \left(5\cos^2 i - 1\right) \dfrac{\pi}{180 \cdot 86\,400}$ — скорость прецессии перигея;

$E_п = -2\mathrm{arctg}\ \mathrm{tg}\left(\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\right)$ — эксцентрическая аномалия в момент прохождения экватора;

$M_п = E_п - e\sin E_п$ — средняя аномалия в момент прохождения экватора;

$\delta T_п = -\dfrac{M_п}{n} + \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \pi; \\ T_{др} & \text{при } \omega > \pi \end{cases}$ — время пролета от экватора до перигея;

$M_k = n(\Delta t_п - \delta T_п) - \dfrac{\pi}{T_{др}^3} T' (\Delta t_п - \delta T_п)^2$ — средняя аномалия в текущий момент;

$M_k = E_k - e\sin E_k$ — уравнение Кеплера для вычисления эксцентрической аномалии E_k на текущий момент;

$\sin \vartheta_k = \dfrac{\sqrt{1-e^2} \sin E_k}{1 - e\cos E_k}$, $\cos \vartheta_k = \dfrac{\cos E_k - e}{1 - e\cos E_k}$ — соотношения для вычисления истинной аномалии на текущий момент;

$\omega_k = \omega + \omega \Delta t_п$ — аргумент перигея на текущий момент;

$\Omega_k = \lambda + \left(\dot{\lambda} - \omega_з\right)\Delta t_п$ — угол восходящего узла на текущий момент;

$u_k = \vartheta_k + \omega_k$ — аргумент широты на текущий момент;

$\rho_k = a(1 - e\cos E_k)$ — радиус орбиты на текущий момент;

$V_r = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}} \dfrac{e \sin \vartheta_k}{\sqrt{1-e^2}}$ — радиальная составляющая скорости на текущий момент;

$V_u = \sqrt{\dfrac{\mu}{a}} \dfrac{1 + e\cos \vartheta_k}{\sqrt{1-e^2}}$ — нормальная составляющая скорости на текущий момент;

$X_k = \rho_k (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i)$, $Y_k = \rho_k (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \times$ $\times \cos \Omega_k \cos i)$, $Z_k = \rho_k \sin u_k \sin i$ — текущие координаты НС в ГСК;

V_{xk0}, V_{yk0}, V_{zk0} — компоненты абсолютной скорости НС в ГСК,

$$V_{xk0} = V_r\left(\cos u_k \cos\Omega_k - \sin u_k \sin\Omega_k \cos i\right) -$$
$$- V_u\left(\sin u_k \cos\Omega_k + \cos u_k \sin\Omega_k \cos i\right),$$
$$V_{yk0} = V_r\left(\cos u_k \sin\Omega_k + \sin u_k \cos\Omega_k \cos i\right) -$$
$$- V_u\left(\sin u_k \sin\Omega_k - \cos u_k \cos\Omega_k \cos i\right),$$
$$V_{zk0} = V_r \sin u_k \sin i + V_u \cos u_k \sin i;$$

$V_{xk} = V_{xk0} + \omega_3 Y_k$, $V_{yk} = V_{yk0} - \omega_3 X_k$, $V_{zk} = V_{zk0}$ — компоненты скорости НС в ГСК.

Данный алгоритм может использоваться в АСН для вычисления координат и скорости НС ГЛОНАСС вместо официально рекомендуемых алгоритмов. Точность координат НС, формируемых по данным альманаха ГЛОНАСС с использованием данного алгоритма, демонстрируют графики на рис. 5.6 и 5.7.

На рис. 5.6 приведены графики ошибок прогнозируемых координат группировки ГЛОНАСС по данным альманаха для произвольно выбранного времени t_A для интервала 60 дней. Верхний график относится к ошибкам по продольной дальности, средний — по высоте, нижний — по боковой дальности относительно ОСК.

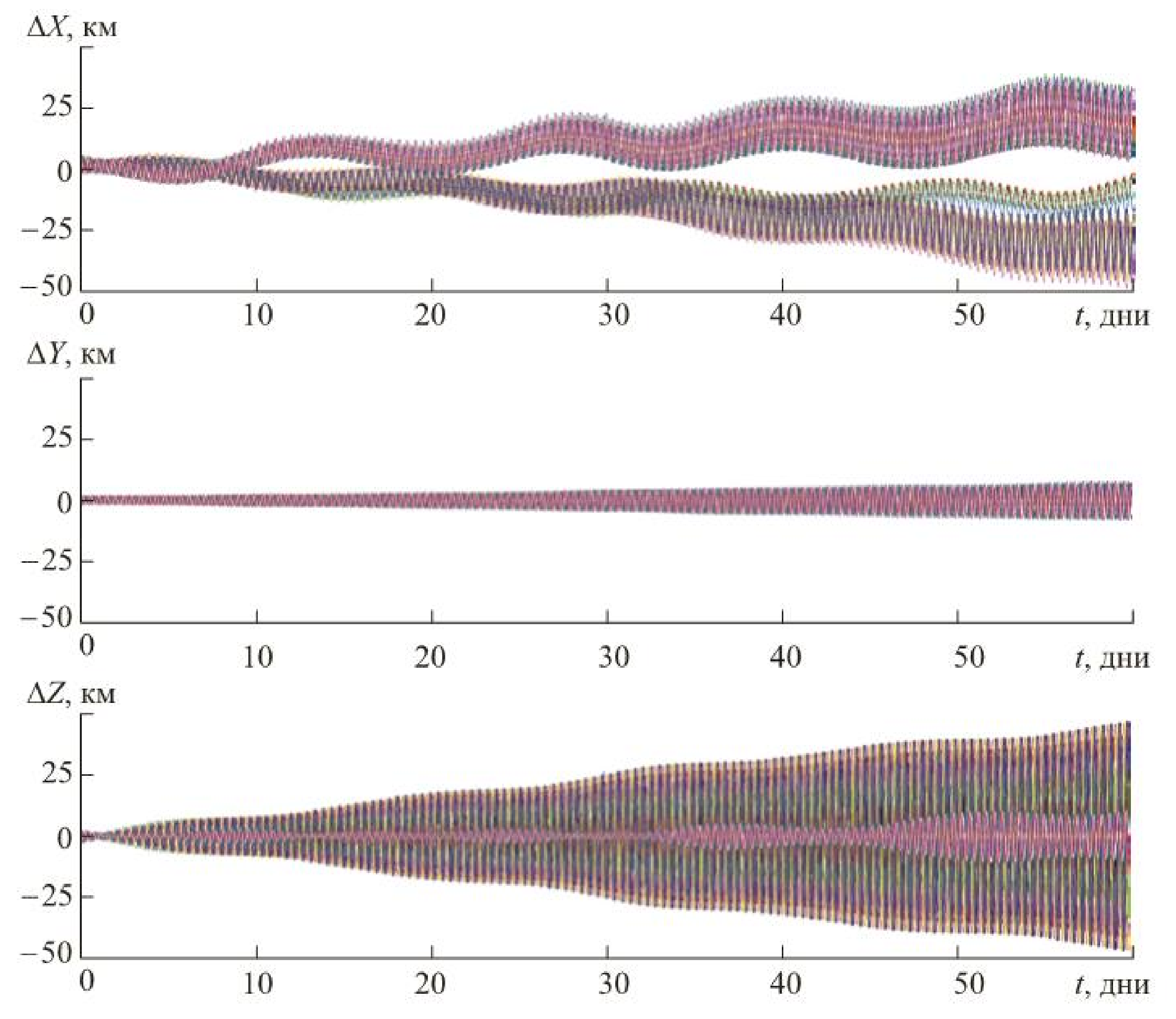


Рис. 5.6. Ошибки двухмесячного прогноза альманаха ГЛОНАСС

На рис. 5.7 показаны эти же графики в более крупном масштабе для недельного интервала. Ошибки прогноза выявлены путем сравнения полученных по приведенному алгоритму координат НС с данными прецизионных эфемерид этих же НС для этого же интервала времени, представленные в Интернете Международной службой Глобальных навигационных спутниковых систем. Декларируемая точность прецизионных эфемерид по координатам — 5 см. Поэтому можно считать, что приведенные на рис. 5.6, 5.7 графики соответствуют ошибкам прогноза координат по данным альманаха ГЛОНАСС с использованием рассмотренного алгоритма. Из рисунков следует, что ошибки прогнозируемых координат по осям Y, Z ОСК в течение первых двух дней от t_A не превышают 2,5 км, по продольной оси X — 4 км. К концу первой недели ошибка возрастает по продольной и боковой дальностям до 7 км, по вертикали — до 3 км. К концу первого месяца ошибки возрастают по продольной и боковой дальности — до 25 км, по вертикали — до 5 км. К концу второго месяца — по продольной и боковой дальности — 50 км, по вертикали — 8 км.

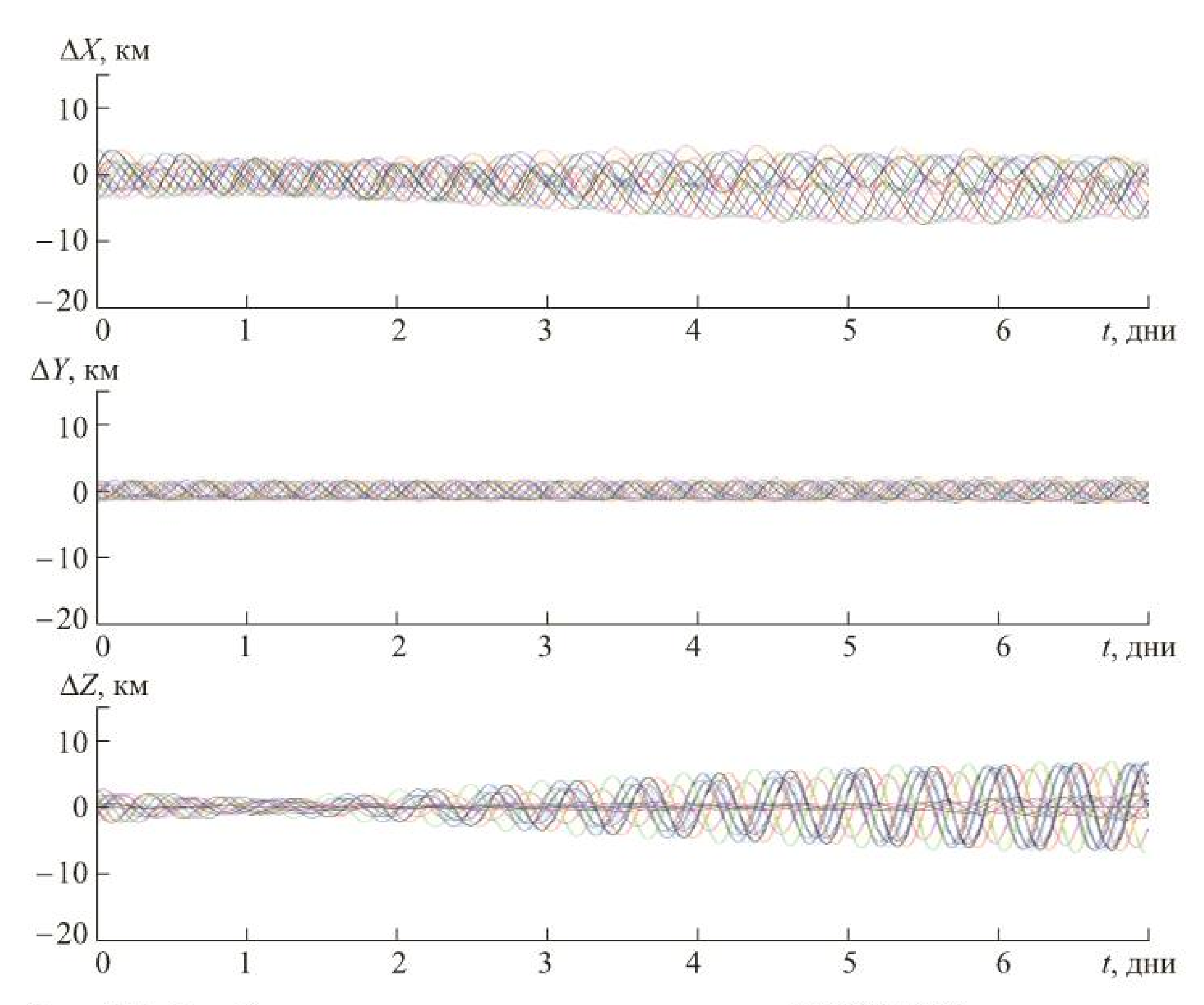


Рис. 5.7. Ошибки недельного прогноза альманаха ГЛОНАСС

Сравнение приведенных графиков ошибок прогноза координат ГЛОНАСС по данным альманаха с аналогичными графиками для спутников GPS (см. рис. 5.1, 5.2) показывает, что в целом графики аналогичны с той лишь

разницей, что точность прогнозируемых координат ГЛОНАСС на длительный срок значительно выше, чем для GPS. Для интервала 60 дней ошибки прогноза по продольной дальности GPS составляют ~400 км, а ГЛОНАСС — 50 км. Поэтому для решения многих навигационных задач данные альманаха ГЛОНАСС могут использоваться в течение 1–2 месяцев при условии отсутствия коррекции орбиты НС.

5.5. Алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным эфемерид ГЛОНАСС. Точность формируемого вектора состояния

В состав оперативной информации навигационного сообщения ГЛОНАСС входят следующие параметры, позволяющие определить векторы координат и скорости НС для любого момента времени:

t_b — время, к которому относятся передаваемые данные;

X, Y, Z — координаты НС в ГСК на момент t_b;

$\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$ — скорость НС в ГСК на момент t_b;

$\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}$ — возмущающие ускорения от Луны и Солнца в момент t_b.

Передаваемые с НС эфемериды, как правило, обновляются каждые 30 мин через 15 мин после очередного значения t_b. Расчет эфемерид на заданный момент t заключается в интегрировании уравнений движения КА в диапазоне ±15 мин от времени t_b.

Существуют два алгоритма расчета координат НС, первый из которых, называемый упрощенным, заключается в интегрировании методом Рунге — Кутты четвертого порядка приближенных уравнений движения НС в ГСК:

$$
\begin{aligned}
&\dot{X} = V;\\
&\dot{Y} = V_y;\\
&\dot{Z} = V_z;\\
&\dot{V}_x = -\frac{\mu}{r^3}X + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}X\left(1-\frac{5Z}{r^2}\right) + \omega_3^2 X + 2\omega V_y + \ddot{X};\\
&\dot{V}_y = -\frac{\mu}{r^3}Y + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}Y\left(1-\frac{5Z}{r^2}\right) + \omega_3^2 Y - 2\omega V_x + \ddot{Y};\\
&\dot{V}_z = -\frac{\mu}{r^3}Z + \frac{3}{2}C_{20}\frac{\mu a_e^2}{r^5}Z\left(3-\frac{5Z}{r^2}\right) + \ddot{Z},
\end{aligned}
\qquad (5.4)
$$

где $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$; μ — константа гравитационного поля Земли, $\mu = 398\,600{,}4418 \cdot 10^9$ м^3/с^2; a_e — экваториальный радиус Земли, $a_e = 6\,378\,136$ м; C_{20} — вторая зональная гармоника разложения геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям, $C_{20} = -1\,082\,625{,}75 \cdot 10^{-9}$; ω — угловая скорость вра-

щения Земли, $\omega = 7{,}292115 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$; $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$, $\ddot{Z}$ — гравитационные возмущения от Луны и Солнца, передаваемые с НС в составе эфемерид.

Начальными условиями интегрирования системы уравнений (5.4) являются векторы координат X, Y, Z и скорости V_x, V_y, V_z НС на момент времени t_b, передаваемые в составе эфемерид.

Алгоритм формирования векторов координат и скорости путем интегрирования уравнений движения (5.4) является простым и удобным. Учитывая, что шаг интегрирования, как показано в 2.5, может быть выбран в несколько сотен секунд, на решение задачи тратится минимальное время даже при использовании бортовых вычислителей. Оценим точность формируемых координат НС.

Ранее было отмечено, что уравнения (5.4) — приближенные, поэтому, даже если на момент t_b от НС были получены абсолютно точные координаты НС, при интегрировании уравнений (5.4) возникли бы ошибки, обусловленные неучетом в этих уравнениях ряда возмущающих факторов. Рассмотрим эти факторы в порядке степени их влияния на точность формируемых координат.

Основным источником ошибок, прогнозируемых с использованием данного алгоритма координат, является некорректность учета гравитационного воздействия Луны и Солнца. Значения этих возмущений передаются НС потребителю в виде констант на весь 30-минутный интервал прогнозирования с дискретностью 10^{-6} м/с^2.

Вторым по значимости возмущением, как ни странно, является смещение оси вращения Земли относительно оси Z ГСК, третьим — неучет аномальной части гравитационного поля Земли, четвертым — неучет влияния сил солнечного давления.

Точность координат НС, формируемых по данным эфемерид ГЛОНАСС с использованием рассмотренного алгоритма, демонстрируют рис. 5.8, 5.9.

На рис. 5.8 приведены графики ошибок прогнозируемых координат группировки ГЛОНАСС по данным эфемерид для произвольно выбранного времени t_b на интервале ±12 ч относительно t_b. Ошибки представлены в ОСК. Верхние графики представляют собой ошибки по продольной дальности, средние — по высоте, нижние — по боковой дальности.

На рис. 5.9 показаны эти же графики в более крупном масштабе для трехчасового интервала относительно времени t_b. Ошибки прогноза получены путем сравнения спрогнозированных по приведенному алгоритму координат НС с данными прецизионных эфемерид этих же НС, для этого же интервала времени, представленных в Интернете Международной службой глобальных навигационных спутниковых систем. Декларируемая точность прецизионных эфемерид по координатам — 5 см. Поэтому можно считать, что приведенные на рис. 5.8, 5.9 графики соответствуют ошибкам прогноза координат по данным эфемерид ГЛОНАСС с использованием рассмотренного алгоритма.

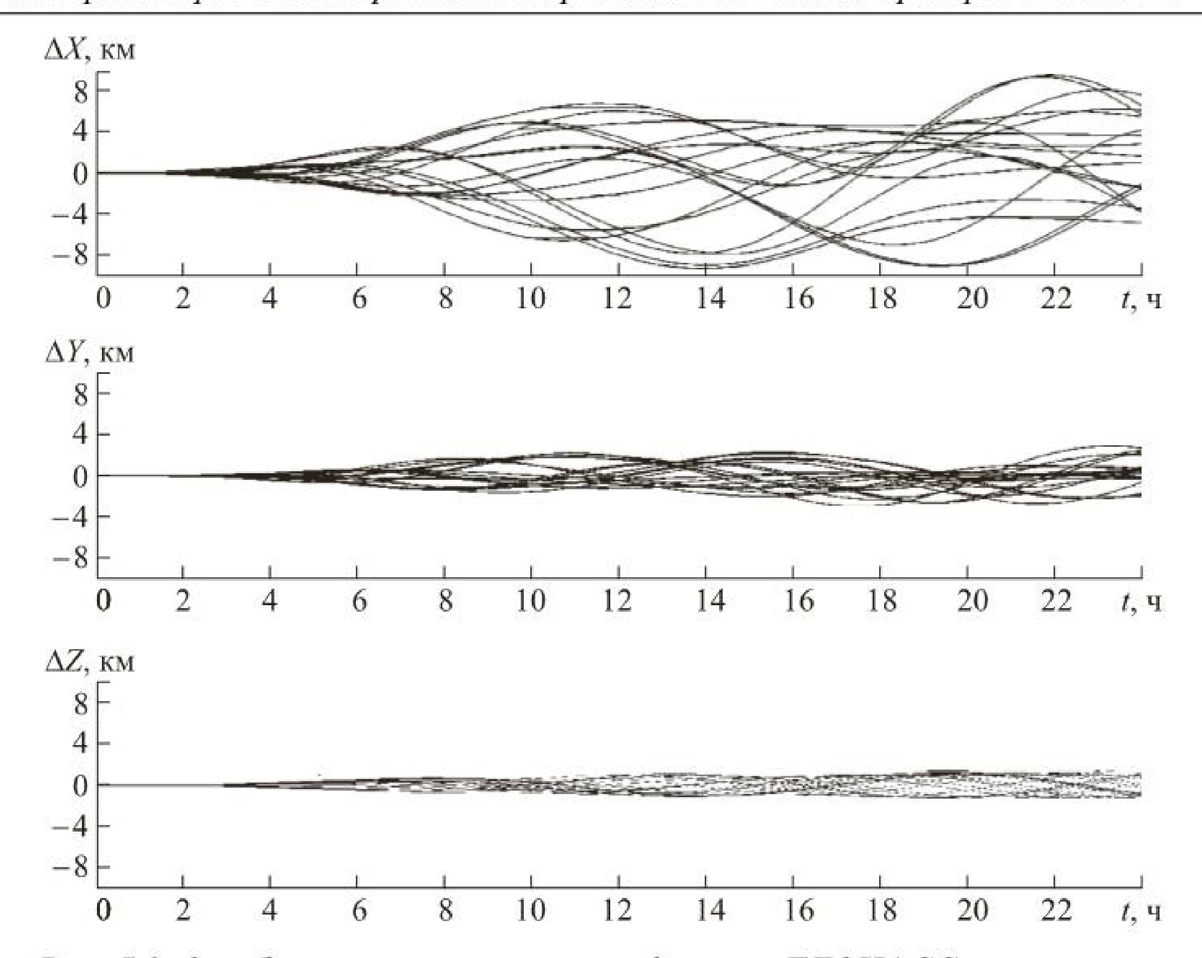


Рис. 5.8. Ошибки суточного прогноза эфемерид ГЛОНАСС

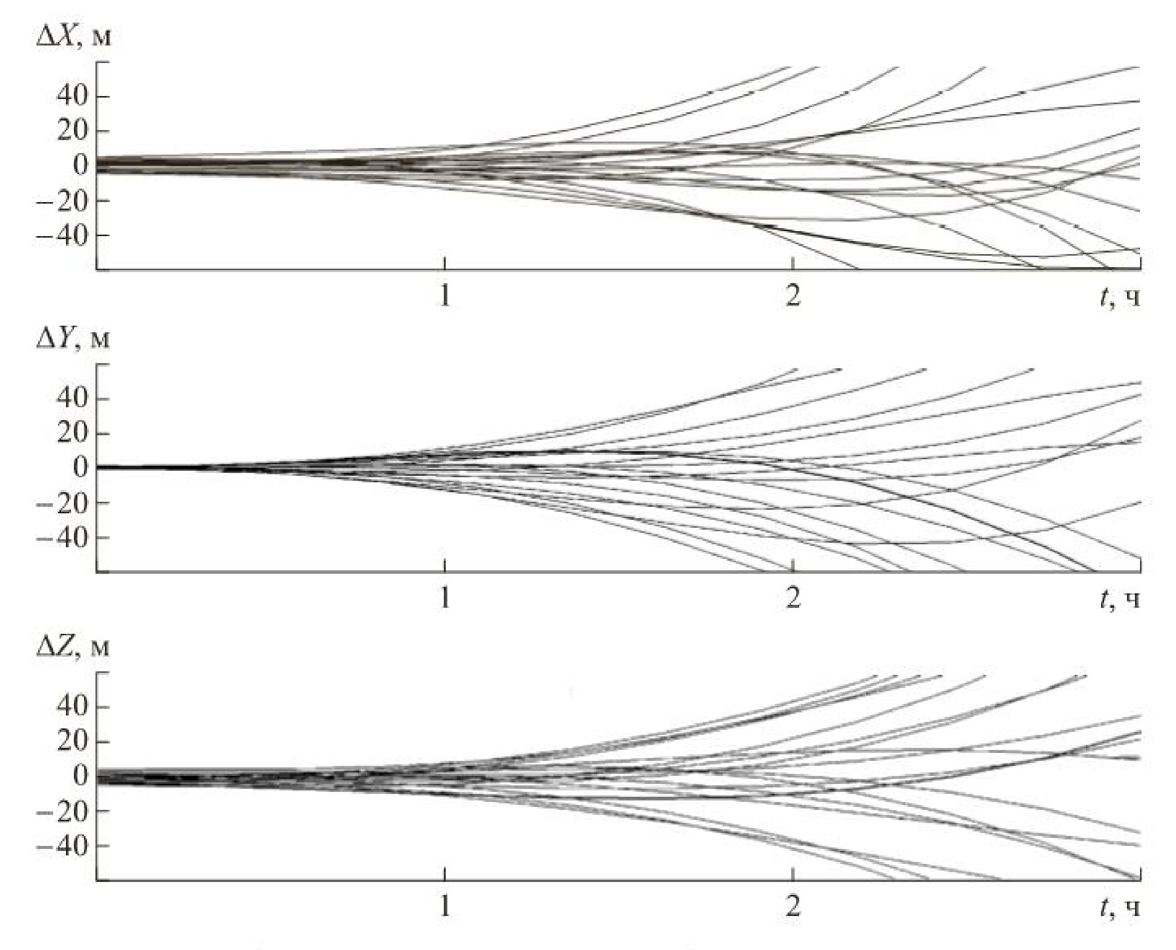


Рис. 5.9. Ошибки трехчасового прогноза эфемерид ГЛОНАСС

Из графиков следует, что в течение 0,5 мин от t_b ошибки прогнозируемых координат по трем осям X, Y, Z составляют 3…6 м. При $|t - t_b| > 1$ ч ошибки начинают превышать уровень 5…8 м, а при $|t - t_b| > 1{,}5$ ч ошибки составляют 20…30 м. Можно сделать вывод, что интервал времени, на котором прогнозируемые ошибки остаются на уровне ошибок координат в момент t_b (3…5 м), для НС ГЛОНАСС составляет всего 30 мин от времени t_b. Этот интервал можно назвать «временем жизни» эфемерид, на котором обеспечивается максимальная точность прогноза координат. Вне интервала «времени жизни» ошибки прогнозируемых координат резко возрастают.

Интересно сравнить точность прогнозируемых эфемерид ГЛОНАСС с ошибками прогноза эфемерид GPS (см. рис. 5.4, 5.5). Ошибки эфемерид GPS в момент t_{0e} составляют ~2 м по трем координатам, т. е. точность эфемерид GPS несколько выше точности эфемерид ГЛОНАСС в момент t_b, хотя и имеют одинаковый порядок. Однако точность эфемерид GPS на этом же уровне сохраняется в течение ±2 ч от t_{0e}, т. е. «время жизни» эфемерид GPS составляет ±2 ч, что в 4 раза дольше «времени жизни» ГЛОНАСС (объяснение этому см. в 5.2). Передаваемые в составе данных эфемерид GPS поправки C_{ij} учитывают кроме сжатия Земли влияние аномальной части гравитационного поля Земли, гравитационное влияние Луны и Солнца, модель сил солнечного давления и реальное смещение полюса Земли.

В течение суток «разлет» орбит GPS составляет ~0,5 км (см. рис. 5.4), а «разлет» орбит ГЛОНАСС ~10 км. Различие объясняется тем, что приближенные алгоритмы прогноза орбит ГЛОНАСС не предназначены для прогноза на интервал более чем 30…60 мин, так как передаваемые для расчета прогноза гравитационные возмущения от Луны и Солнца даны в виде приближенных констант, ошибки которых на интервале прогноза более одного часа существенно ухудшают точность прогноза. Некоторое повышение точности прогноза на суточном интервале обеспечивает второй алгоритм прогноза эфемерид ГЛОНАСС, рекомендуемый потребителям, начиная с пятой редакции этого документа.

По этому алгоритму выполняется перевод вектора состояния НС с ИСК (для ИСК приводятся алгоритмы формирования гравитационных возмущений от Луны и Солнца), в ИСК осуществляется интегрирование уравнений движения КА с учетом второй зональной гармоники разложения геопотенциала Земли по сферическим функциям. Сформированные в результате интегрирования векторы координат и скорости НС вновь переводятся в ГСК.

На рис. 5.10 приведены графики «разлета» координат ГЛОНАСС, прогнозируемых по данному алгоритму. Из графиков видно, что точность прогноза на суточный интервал для этого алгоритма такая же, как и для прогноза эфемерид GPS: ~1,5 км по продольной дальности, ~200 км по вертикали и 300…500 м по боковой дальности. На коротком интервале (±30 мин) точность прогноза ГЛОНАСС, обеспечиваемого обоими алгоритмами, практически одинакова.

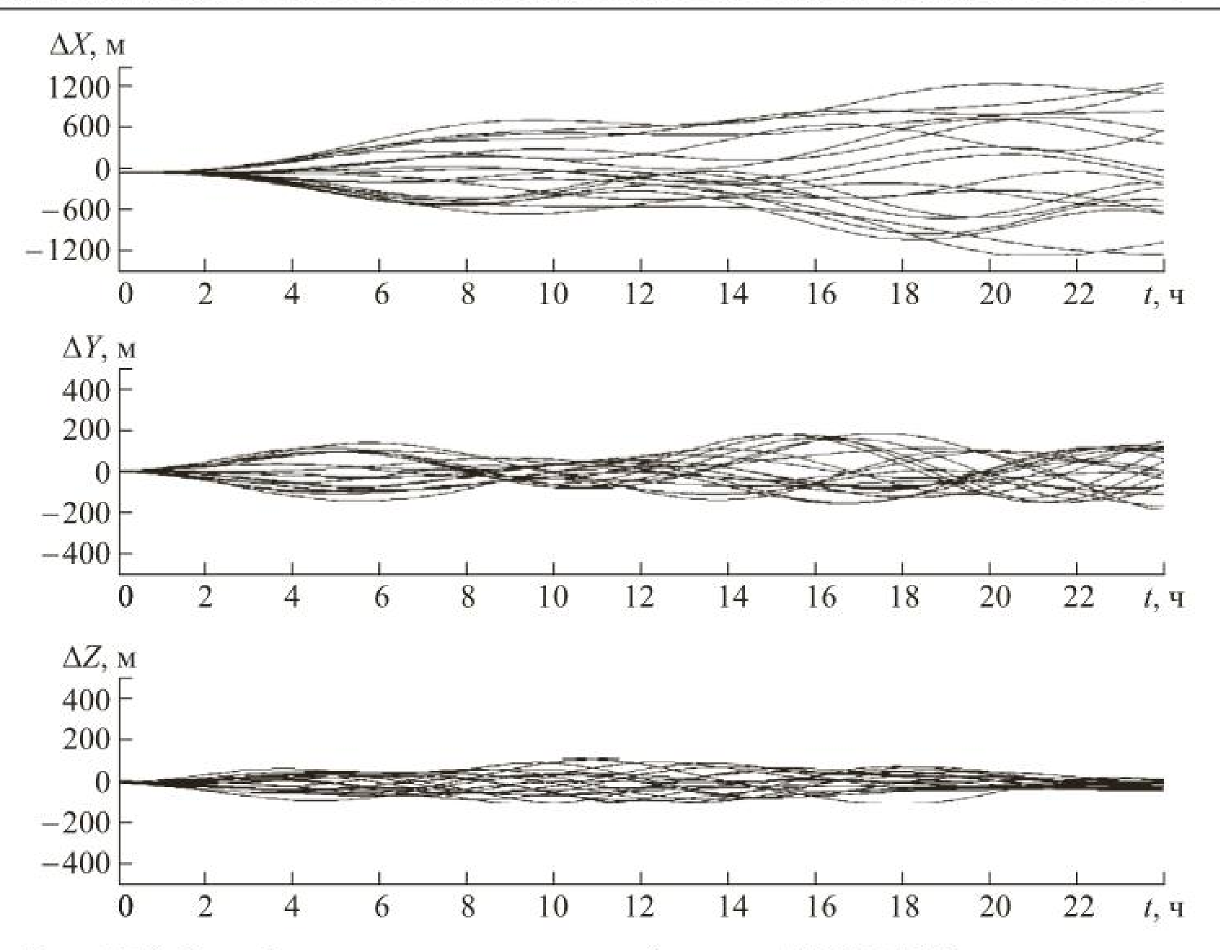


Рис. 5.10. Ошибки суточного прогноза эфемерид ГЛОНАСС

По объему вычислений основной рекомендуемый алгоритм прогноза эфемерид в ~10 раз превосходит рассмотренный выше приближенный алгоритм. Однако, по сути, между двумя алгоритмами нет никакой разницы: в обоих алгоритмах на всем интервале прогноза гравитационные возмущения от Луны и Солнца рассматриваются как константы, в обоих алгоритмах не учитывается смещение полюса и аномальная часть гравитационного поля Земли, а также не учитываются силы солнечного давления. Единственное отличие заключается в том, что в приближенном алгоритме возмущения от Луны и Солнца передаются потребителю с дискретностью 10^{-6} м/с^2, а во втором алгоритме они рассчитываются более точно, хотя и рассматриваются далее как константы на всем интервале прогноза.

Принимая во внимание, что в обоих алгоритмах при интегрировании уравнений движения НС не учитываются одни и те же возмущающие факторы, оба алгоритма имеют практически одну и ту же точность. Но с учетом того, что приближенный алгоритм существенно проще основного рекомендуемого, целесообразно (по крайней мере, в бортовых навигационных приемниках) использовать приближенный алгоритм прогноза координат НС по данным эфемерид ГЛОНАСС.

5.6. Возможные пути повышения точности прогноза и увеличения «времени жизни» эфемерид ГЛОНАСС и GPS

В предыдущем разделе проведен анализ точности прогнозирования эфемерид ГЛОНАСС и GPS по официально рекомендуемым алгоритмам прогноза, представленным в соответствующих ИКД. Анализ показал, что на момент задания эфемерид их точность составляет по координатам для GPS ~2 м по трем осям, для ГЛОНАСС — по продольной и боковой дальности ~6 м, по высоте ~4 м. Эта точность незначительно снижается в течение «времени жизни» эфемерид, которая для GPS составляет ±2 ч; для ГЛОНАСС — ±0,5 ч. По истечении «времени жизни» происходит резкое снижение точности. Через 5–6 ч после соответствующего эфемеридного времени ошибки по координатам составляют сотни метров, через сутки — превышают километр.

Чем можно объяснить такое короткое «время жизни» эфемерид и такую низкую точность прогноза на время, превышающее «время жизни»? Прежде всего, сложностью точных алгоритмов прогноза и большим объемом вычислений и необходимой памяти вычислительных средств, реализующих эти алгоритмы. Тем не менее система GPS рассчитывает и передает потребителю поправки C_{ij}, учитывающие влияние большинства основных возмущающих факторов, хотя и на ограниченный интервал времени (2 ч). В результате в системе GPS обеспечивается высокая точность прогноза эфемерид. Система ГЛОНАСС ничем не помогает потребителю в плане прогноза эфемерид, если не считать грубый расчет (с точностью 20 %) гравитационных возмущений от Луны и Солнца, передаваемых потребителю в виде констант на весь интервал прогноза. В итоге в системе ГЛОНАСС потребителю требуется обновлять эфемериды каждые 30 мин.

Для повышения точности прогноза необходимо использовать более точную модель движения КА, учитывающую возмущения, заметно влияющие на орбиту НС на интервале прогноза. Например, если требуется обеспечить суточный интервал прогноза и точность прогноза на этом интервале несколько метров, то в модели движения КА следует учитывать все возмущения, которые на интервале прогноза вносят ошибку по координатам более метра. В гл. 2 проведено детальное исследование влияния различных возмущающих факторов на орбиты спутников ГЛОНАСС и GPS. Перечислим все возмущающие факторы, вносящие на суточном интервале возмущение орбиты, превышающее 1 м, с указанием порядка возмущения орбиты для каждого из перечисленных возмущений:

– сжатие Земли — 30 км/сут;

– аномальная часть гравитационного поля Земли для гармоник порядка 8×8 включительно — 400 м/сут;

– гравитационное возмущение от Луны — 1500 м/сут;

– гравитационное возмущение от Солнца — 400 м/сут;

– смещение полюсов Земли — 300 м/сут;

– солнечное давление — 150 м/сут;

– прецессия и нутация Земной оси — 12 м/сут;

– неравномерность вращения Земли — 4 м/сут.

Шаг интегрирования уравнений движения КА методом Рунге — Кутты четвертого порядка при этом не должен превышать 150 с.

Для всех перечисленных возмущений в настоящее время разработаны модели, которые легко могут быть реализованы на вычислительных средствах современных навигационных приемников, включая вычислительные средства бортовой АСН, предназначенной для работы в космосе. Например, в АСН-М МКС реализована модель аномальной части гравитационного поля Земли порядка 72×72, требующая для своей реализации на каждой секунде в ~300 раз меньше вычислительных операций по сравнению с классической моделью на базе разложения геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям.

Разработаны также программные функции, моделирующие возмущающие ускорения от Луны и Солнца. При более высокой точности моделирования они требуют в ~5 раз меньше вычислительных операций.

Для спутников ГЛОНАСС и GPS разработана самонастраивающаяся модель солнечного давления, автоматически определяющая текущее возмущение по данным *broadcast*-эфемерид, даже если оно переменное во времени. Как показали исследования, приведенные в гл. 4, точность рассмотренной самонастраивающейся модели не хуже 1 % от номинального возмущения.

Разработаны также точные модели, описывающие смещения полюсов Земли, прецессию и нутацию земной оси и неравномерность вращения Земли. Единственным неудобством использования этих моделей является необходимость знания дополнительной внешней информации: о текущем смещении полюса и о текущей поправке к времени *d*UT1. Текущая поправка к времени *d*UT1, а также ее производная сегодня передаются в составе неоперативной информации НС ГЛОНАСС. Для реализации точных моделей движения КА было бы полезно также передавать потребителю текущие значения смещения полюса Земли. Как альтернативный вариант, эти данные можно получать через Интернет. В аппаратуре потребителя вполне может быть реализована точная модель движения спутников ГЛОНАСС и GPS, обеспечивающая существенное повышение точности прогноза орбиты на время, значительно превышающее время жизни эфемерид ГЛОНАСС и GPS. На рис. 5.11 и 5.12 приведены графики ошибок суточного прогноза координат ΔX, ΔY, ΔZ в ОСК для созвездия спутников ГЛОНАСС и GPS. В качестве начального вектора состояния взяты *broadcast*-эфемериды соответствующих спутников на моменты времени t_{0e} (для GPS) и t_b (для ГЛОНАСС). Из представленных графиков видно, что ошибки прогноза GPS на сутки с использованием предложенных моделей не превышают 160 м по продольной дальности, 20 м по высоте и 3 м по боковой дальности, а ошибки прогноза

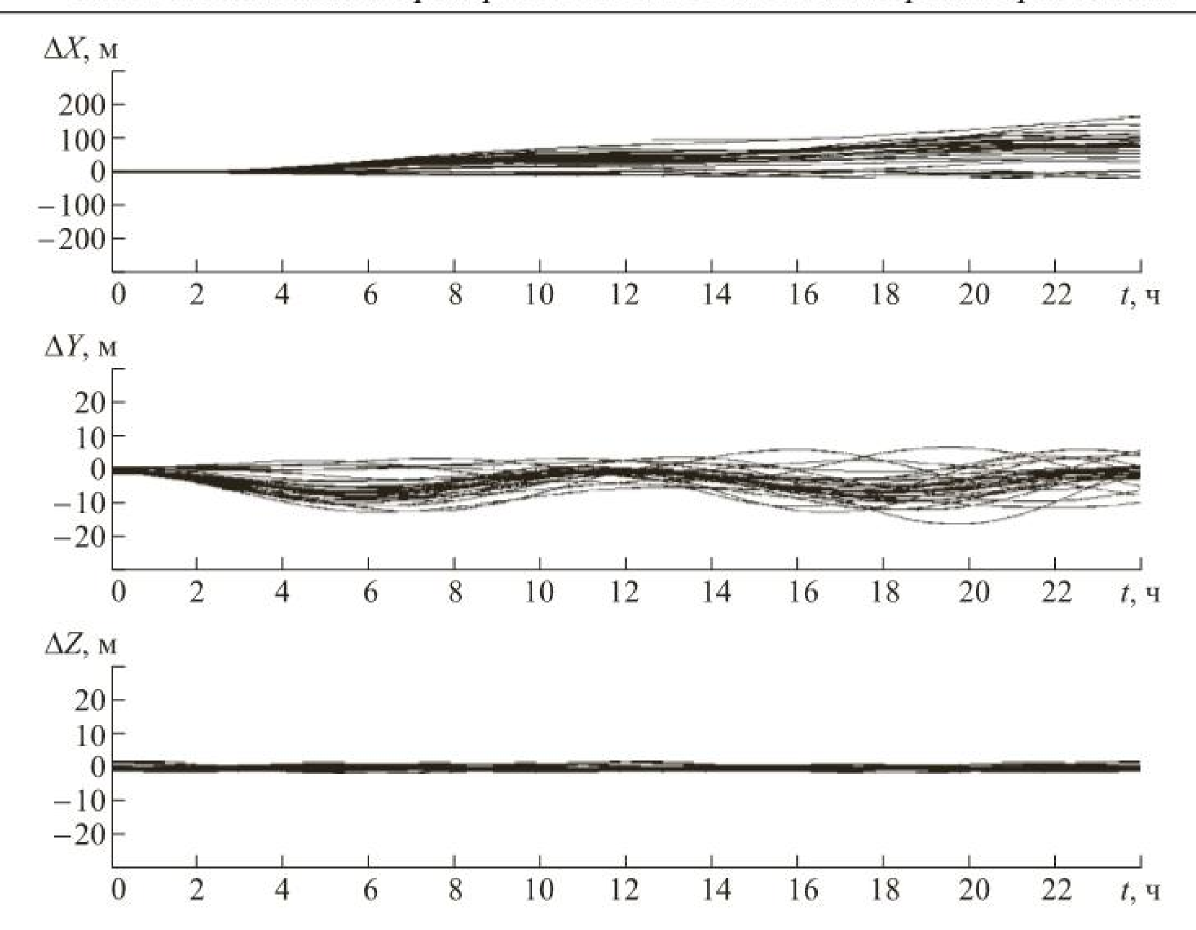


Рис. 5.11. Ошибки суточного прогноза эфемерид GPS с использованием точной модели движения КА

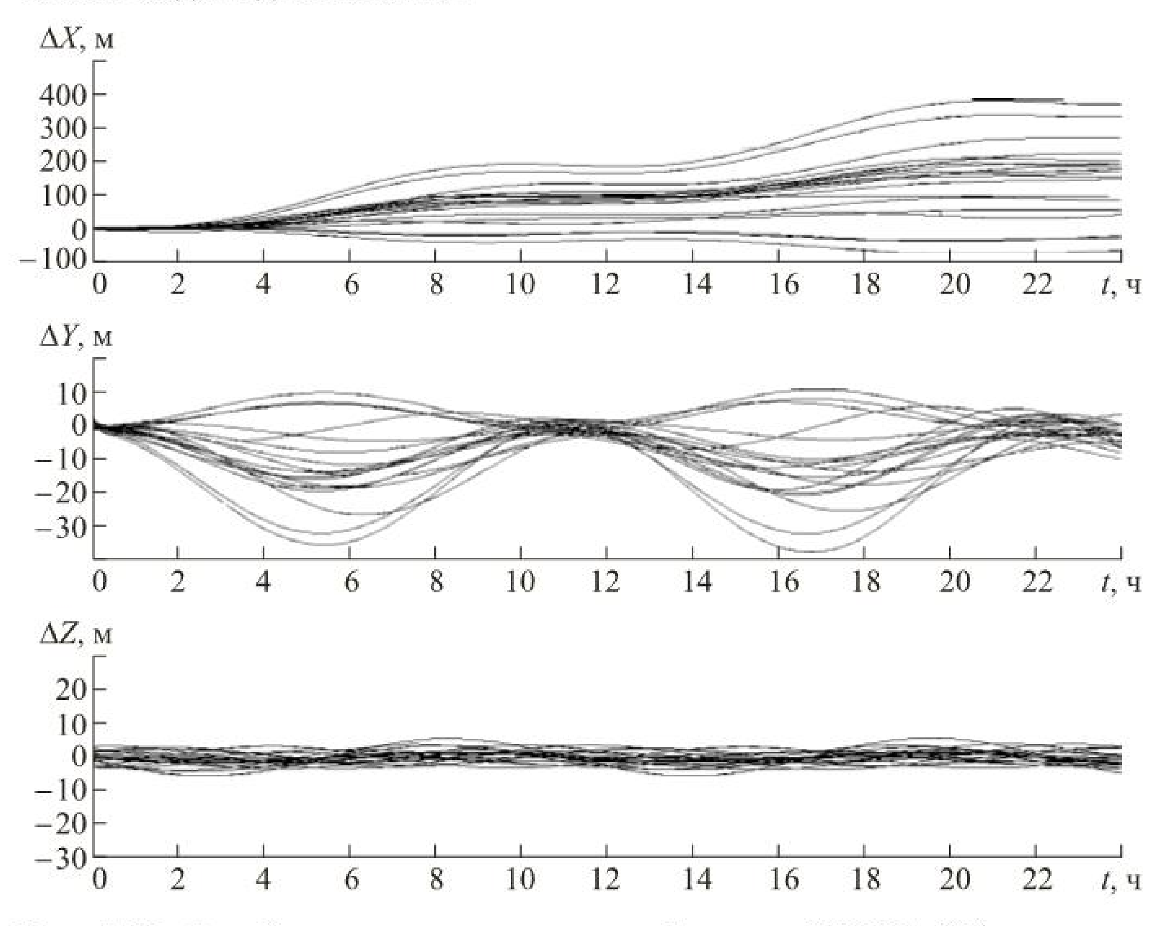


Рис. 5.12. Ошибки суточного прогноза эфемерид ГЛОНАСС с использованием точной модели движения КА

дальности, 20 м по высоте и 3 м по боковой дальности, а ошибки прогноза ГЛОНАСС по продольной дальности — 400 м, по высоте — 40 м, по боковой дальности — 5 м соответственно.

Сравнение полученного прогноза с прогнозом, выполненным с использованием официально рекомендуемых алгоритмов (в соответствии с ИКД), показывает (см. рис. 5.4 и 5.10), что для GPS по продольной дальности и высоте точность увеличилась в 10 раз, по боковой дальности — в 300 раз. Для ГЛОНАСС — по продольной дальности точность увеличилась в 4 раза, по вертикали — в 5 раз, по боковой дальности — в 20 раз.

Многократное повышение точности прогноза обеспечено благодаря использованию более точной модели движения КА. Тем не менее по некоторым компонентам, например, по продольной дальности наблюдаются достаточно большие ошибки прогноза — до 400 м для ГЛОНАСС и 160 м для GPS. Причиной таких ошибок являются ошибки начального вектора состояния КА, за который принимались *broadcast*-эфемериды. Для повышения точности начального вектора состояния был предложен метод динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид, заключающийся в том, что орбита НС с начальным вектором состояния, полученным по данным *broadcast*-эфемерид, прогнозируется с использованием рассмотренной точной модели движения КА, а в моменты формирования очередных *broadcast*-эфемерид по определенным алгоритмам корректируется по этим новым эфемеридам.

Предложенный метод динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид будет рассмотрен в следующей главе. Здесь отметим, что выполнение динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид в течение суток, предшествующих точке начала прогноза, позволило заметно повысить точность орбиты НС, что в свою очередь обеспечило значительное повышение точности прогноза эфемерид на последующие сутки. На рис. 5.13 и 5.14 приведены графики ошибок суточного прогноза эфемерид GPS и ГЛОНАСС для созвездия НС. В качестве начального вектора состояния использовалась оценка орбиты КА, полученная в результате динамической фильтрации соответствующих *broadcast*-эфемерид. Суточная динамическая фильтрация и последующий суточный прогноз орбиты выполнялся с использованием рассмотренных высокоточных моделей движения НС. Из представленных графиков видно значительное повышение точности прогноза НС по продольной дальности и высоте по сравнению с прогнозом, выполненным без предварительной динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид. Для GPS точность по продольной дальности повысилась со 160 до 30 м, по вертикали — с 15 до 10 м. Для ГЛОНАСС по продольной дальности точность повысилась с 400 до 25 м, по вертикали — с 40 до 10 м.

Для удобства сравнения точности суточного прогноза с использованием разных методов прогнозирования в табл. 5.1 приведены ошибки прогноза по продольной дальности (ΔX), по вертикали (ΔY) и боковой дальности (ΔZ) для трех рассмотренных выше методов прогноза.

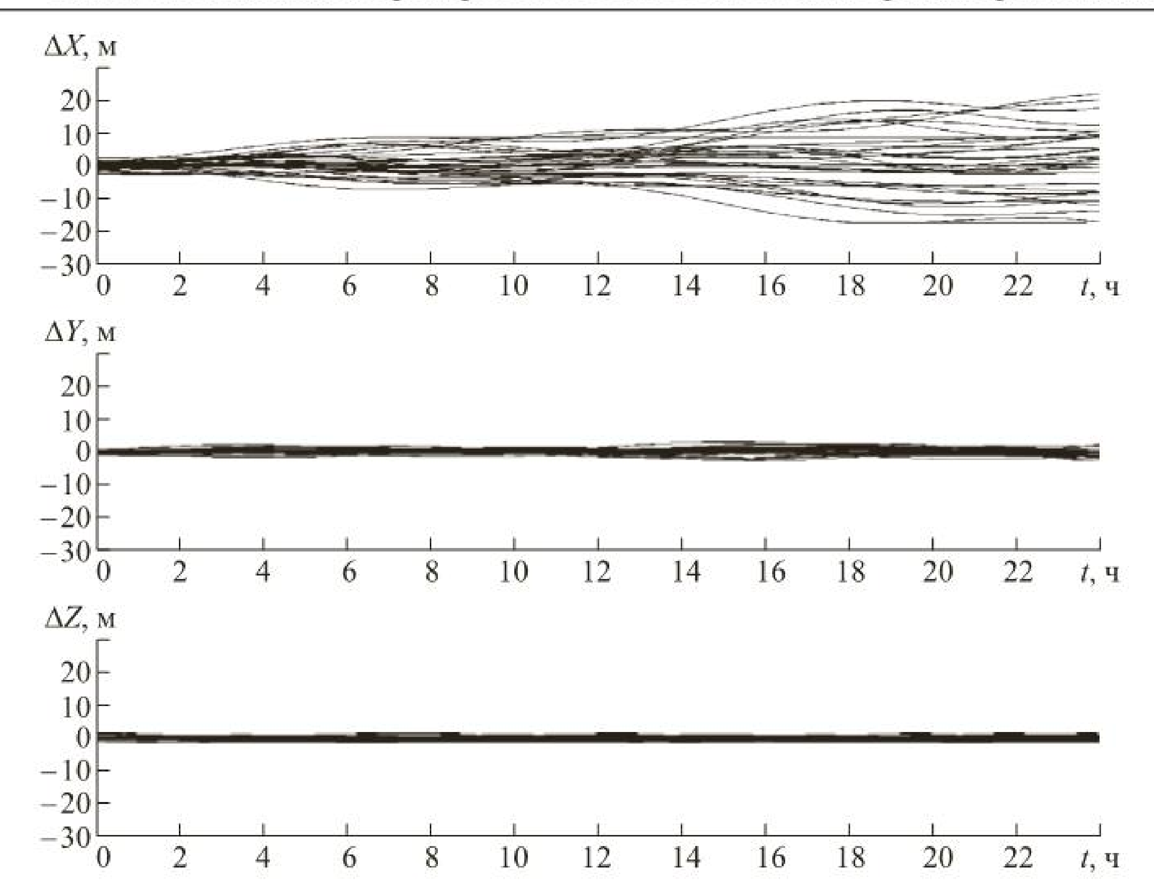


Рис. 5.13. Суточный прогноз эфемерид GPS с использованием точной модели движения КА и с предварительной фильтрацией *broadcast*-эфемерид

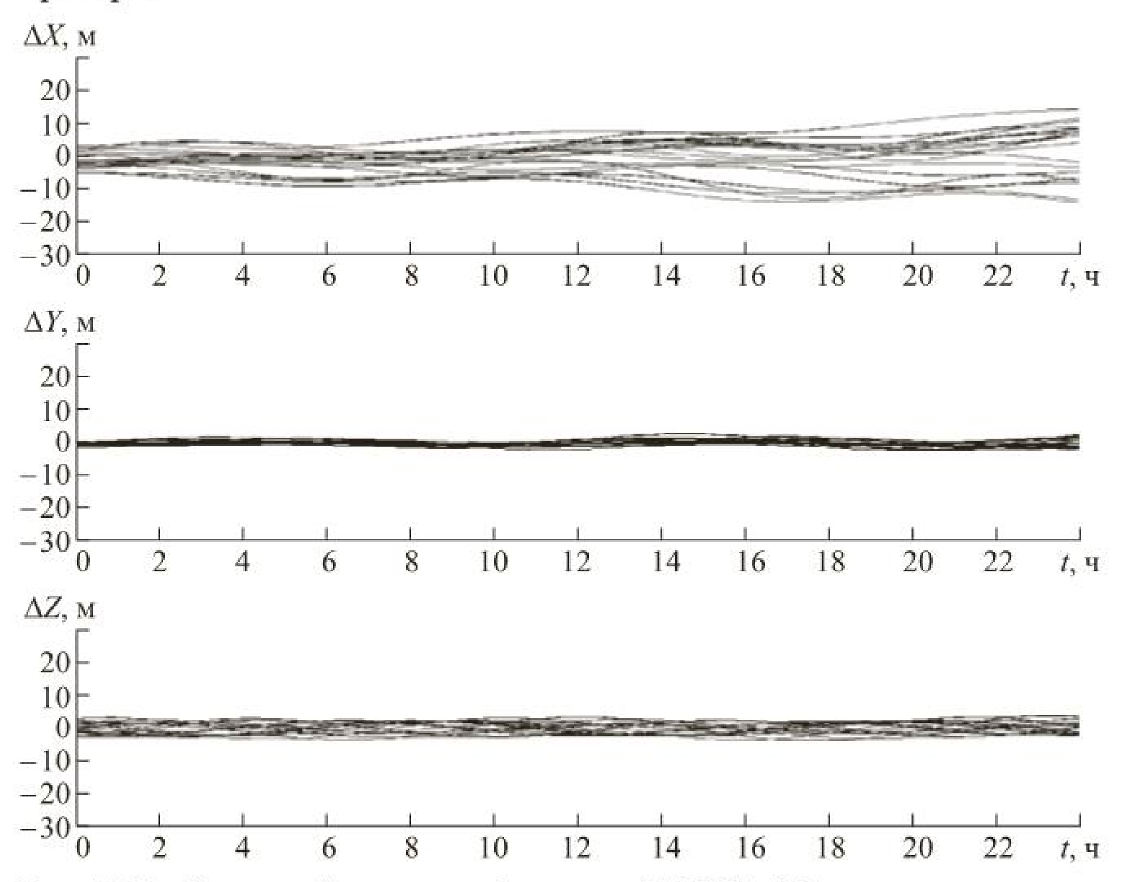


Рис. 5.14. Суточный прогноз эфемерид ГЛОНАСС с использованием точной модели движения КА и с предварительной фильтрацией *broadcast*-эфемерид

Таблица 5.1

Ошибки прогноза по продольной дальности, вертикали и боковой дальности, м

Прогноз	GPS			ГЛОНАСС		
	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ
На сутки по официально рекомендуемым алгоритмам	1500	300	700	1500	150	130
На сутки с использованием разработанной модели движения НС	160	20	15	400	40	7
На сутки с использованием разработанной модели движения НС и предварительной динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид	25	4	3	15	3	4

Из табл. 5.1 видно, что предложенные методы обеспечили повышение точности суточного прогноза и позволили сформировать *PVt* (координаты, скорость, время) без обновления эфемерид. Например, точность суточного прогноза смещения часов спутников ГЛОНАСС составляет $0{,}3\ldots0{,}6\cdot10^{-8}$ с, для GPS $0{,}1\ldots0{,}3\cdot10^{-8}$ с, что соответствует ошибкам определения псевдодальностей 1…2 м для ГЛОНАСС и 0,5…1 м для GPS. Понятно, что такие ошибки не могут оказывать существенное влияние на ошибки *PVt*. Отметим, что ошибки продольной дальности НС, в несколько раз превосходящие ошибки по вертикали и боковой дальности, приводят к значительно меньшим ошибкам псевдодальностей, чем ошибки по вертикали. Это объясняется тем, что угол между вектором скорости НС и направлением от НС на потребителя, как правило, больше 70°. Соответственно, проекция ошибки по вертикали на направление от НС на потребителя близка к единице, а проекция ошибки продольной дальности на это направление обычно не превышает 1/3 ошибки продольной дальности. Поэтому повышенные ошибки эфемерид НС по продольной дальности не приводят к большим ошибкам *PVt*.

На рис. 5.15 приведены графики ошибок *PVt* по координатам в ГСК, полученные путем моделирования работы АСН на МКС. Из всего возможного бюджета ошибок измерений АСН учитывались только эфемеридные ошибки,

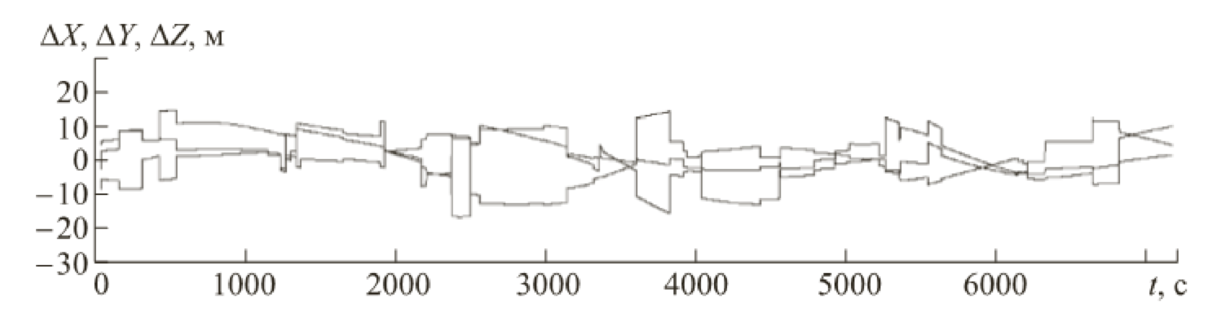


Рис. 5.15. Ошибки *PVt* при использовании спрогнозированных на сутки эфемерид

соответствовавшие спрогнозированным эфемеридным ошибкам GPS в течение последнего двухчасового интервала прогноза (см. рис. 5.13). Полученный на графиках результат подтверждает сказанное выше: при ошибках эфемерид НС по продольной дальности до 25 м и ошибках эфемерид по вертикали до 10 м ошибки *PVt* по координатам в среднем составляют ~8 м, а максимальные ошибки не превышают 16 м. Такая точность соответствует обычной работе АСН.

Установленная на КА АСН часто имеет и значительно большие ошибки. Например, на рис. 5.16 приведены графики ошибок *PVt*, полученных на МКС при работе АСН-М. Из графиков видно, что ошибки *PVt* по координатам иногда достигают 30...40 м. Из всего следует, что спрогнозированные предложенным методом на суточный интервал эфемериды вполне могут использоваться для формирования *PVt*, а это означает, что предложенный метод повышения точности прогноза *broadcast*-эфемерид позволяет увеличить время жизни эфемерид ГЛОНАСС с получаса до суток, а эфемерид GPS с двух часов до суток.

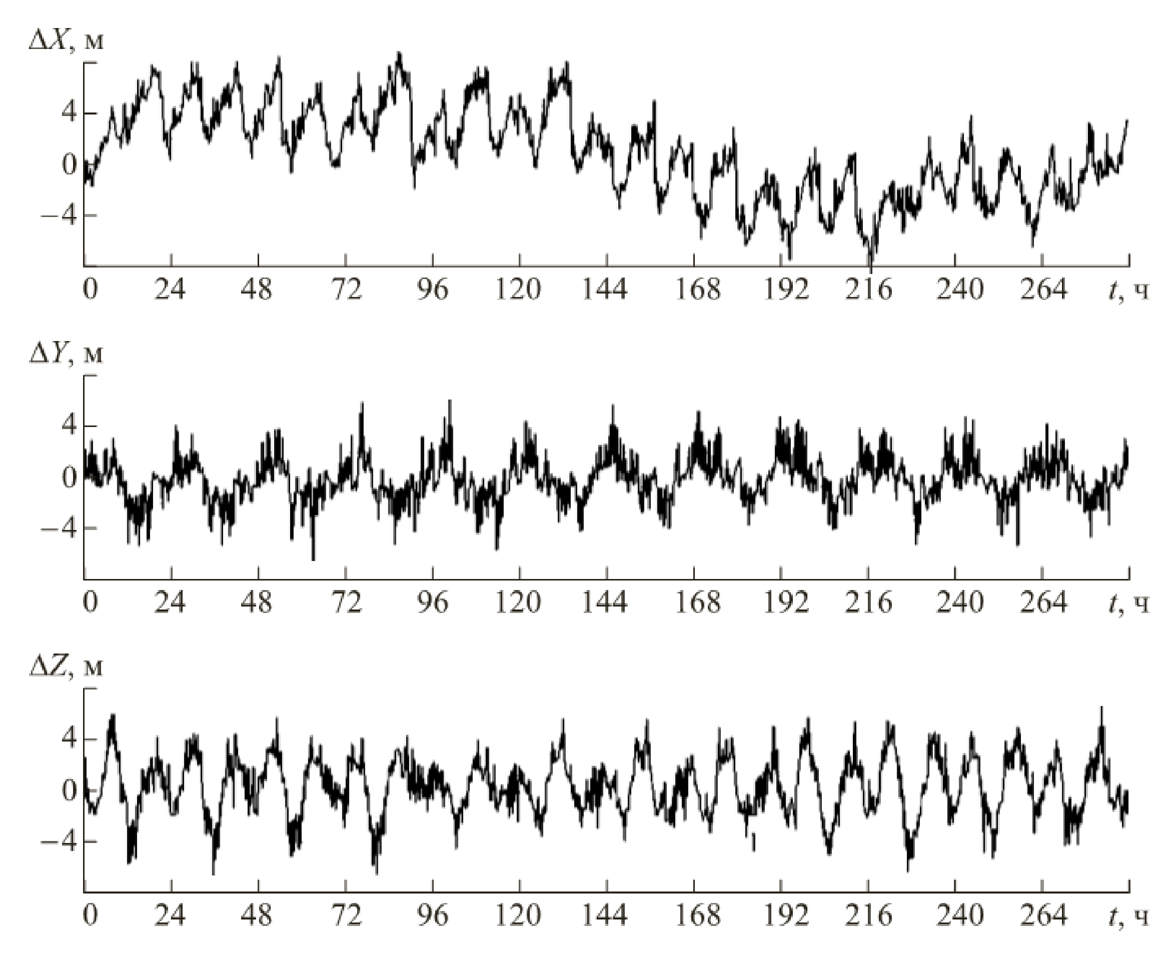


Рис. 5.16. Ошибки *broadcast*-эфемерид ГЛОНАСС по координатам в ОСК одного из НС в моменты t_b

Предложенный метод обработки *broadcast*-эфемерид путем динамической фильтрации обеспечивает не только увеличение «времени жизни» эфемерид, но и повышает точность эфемерид в начальный момент времени. На

рис. 5.17 приведены графики ошибок по координатам ΔX, ΔY, ΔZ в ОСК *broadcast*-эфемерид в момент t_b одного из НС ГЛОНАСС на интервале две недели. На приведенных графиках отчетливо видны периодические и шумовые составляющие ошибок. Периодические составляющие имеют период ~11 ч (один виток) и 24 ч (сутки). Максимальные ошибки по продольной дальности составляют 7 м, по высоте — 7 м, по боковой дальности — 5 м. На рис. 5.17 приведены графики ошибок по скорости ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z в ГСК *broadcast*-эфемерид в момент t_b НС ГЛОНАСС на интервале 10 дней. Здесь также видны периодические и шумовые составляющие. Максимальные ошибки по продольной скорости и вертикали достигают ~0,005 м/с, по боковой скорости — 0,003 м/с.

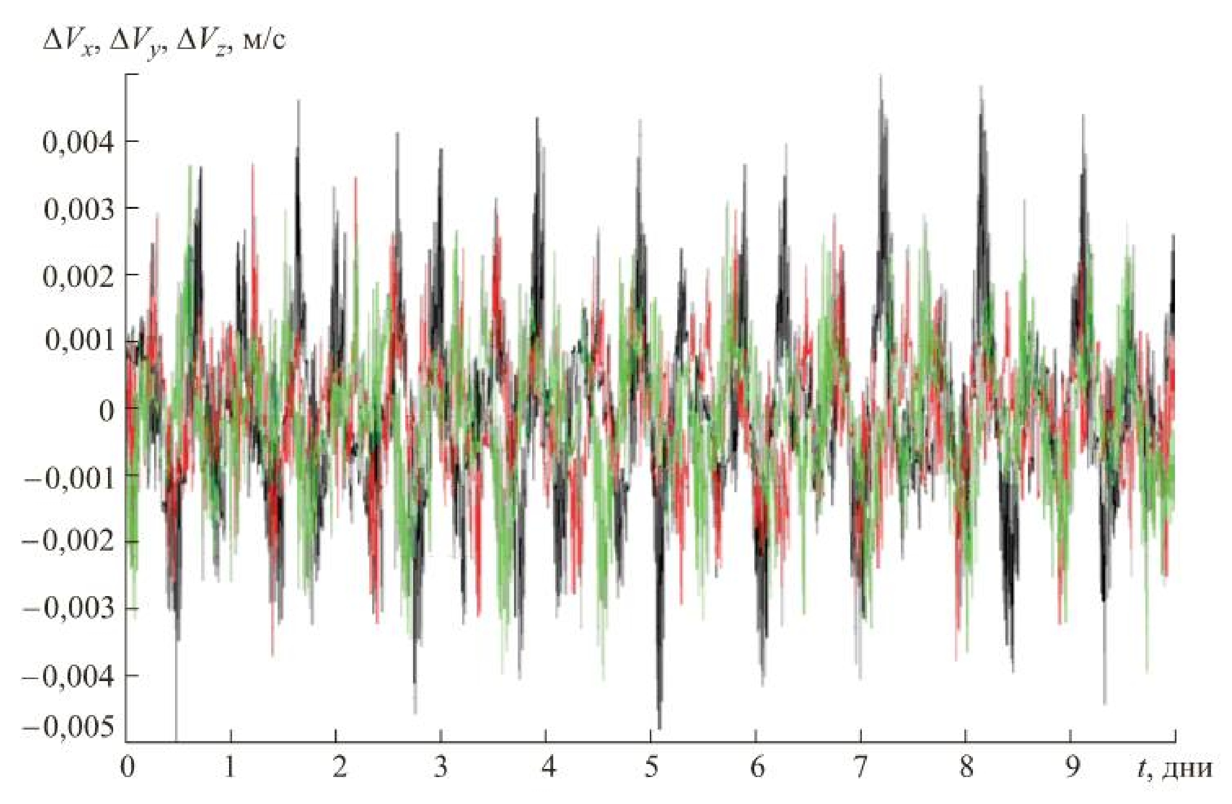


Рис. 5.17. Ошибки *broadcast*-эфемерид ГЛОНАСС по скорости в моменты t_b

На рис. 5.18, 5.19 приведены графики ошибок оценки орбиты НС, формируемой в результате динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид.

Из рисунков понятно, что шумовая составляющая ошибок практически исчезла. Периодическая составляющая имеет орбитальную частоту. Существенно уменьшились амплитуды периодических составляющих ошибок по вертикали и боковой дальности. Ошибка по вертикали стала составлять 1...1,5 м, по боковой дальности — ±2 м. Ошибка по продольной дальности лежит в диапазоне ±6 м. Значительно уменьшились ошибки по скорости. Они стали соизмеримы с ошибками скорости эталонных эфемерид, относительно которых оцениваются полученные результаты.

Напомним, что декларируемая точность эталонных эфемерид по координатам составляет 3…5 см, по скорости — 0,1…0,2 мм/с. Таким образом, пред-

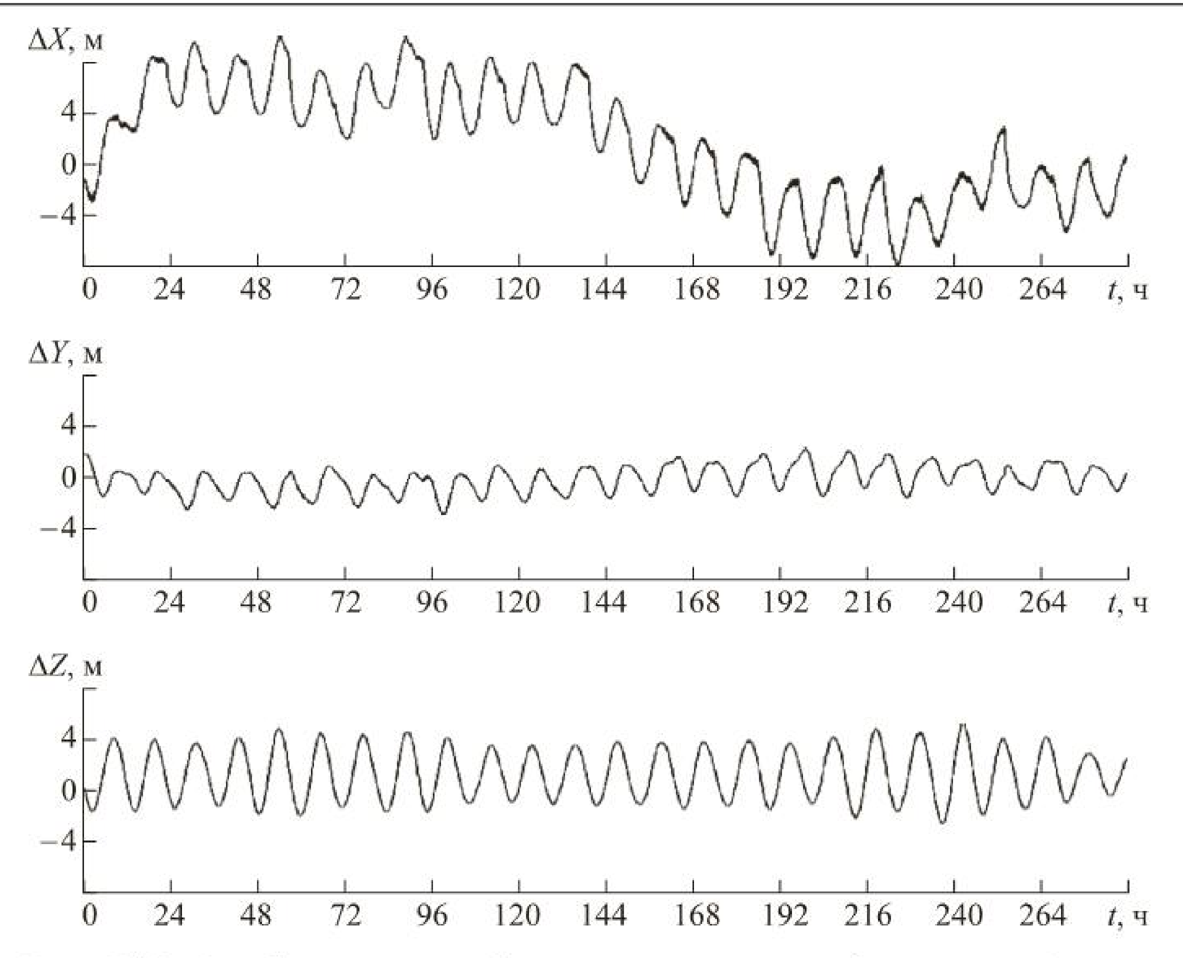


Рис. 5.18. Ошибки оценки орбиты по координатам, формируемой в результате динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид

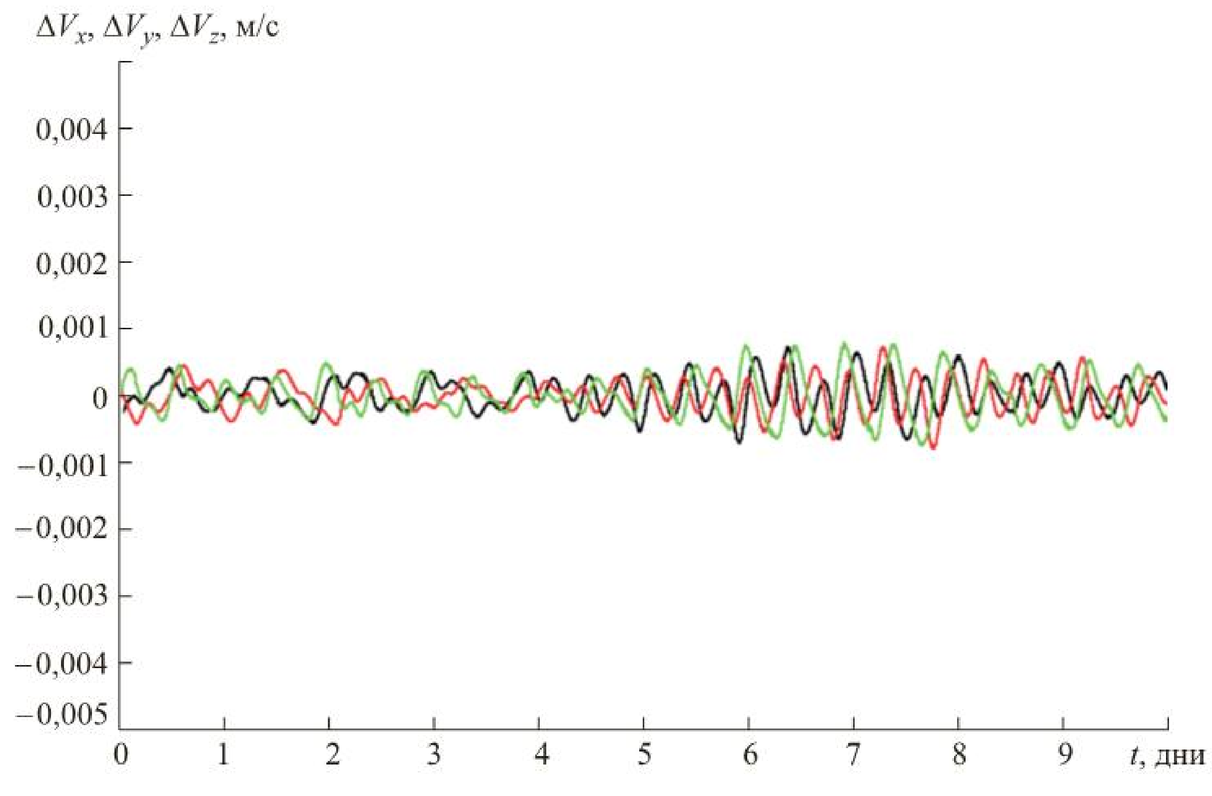


Рис. 5.19. Ошибки оценки орбиты по скорости, формируемой в результате динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид

ложенный метод динамической фильтрации *broadcast*-эфемерид использования какой-либо дополнительной информации, а только за счет математической обработки передаваемых потребителю НС ГЛОНАСС *broadcast*-эфемерид, позволил существенно повысить точность передаваемых эфемерид на момент t_b. Так, основная составляющая ошибки координат НС по вертикали уменьшилась более чем в 4 раза, а остальные — в 1,5–2 раза. Можно предположить, что в этом случае составляющая ошибок *PVt*, обусловленная ошибками эфемерид ГЛОНАСС, уменьшится в ~3 раза, а составляющая ошибок *PVt*, обусловленная ошибками скорости НС, уменьшится в ~10 раз.

Контрольные вопросы

1. Каковы алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным альманаха ГЛОНАСС?
2. Каковы алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным альманаха GPS?
3. Каковы алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным эфемерид ГЛОНАСС?
4. Каковы алгоритмы расчета координат и скорости НС по данным эфемерид GPS?
5. Каковы точности формируемых векторов состояния по данным альманаха и эфемерид ГЛОНАСС?
6. Каковы точности формируемых векторов состояния по данным альманаха и эфемерид GPS?
7. Каковы возможности повышения точности прогноза и «времени жизни» эфемерид ГЛОНАСС и GPS?

Глава 6
Алгоритмы формирования навигационных определений в аппаратуре спутниковой навигации

6.1. Расчет поправок к измерениям псевдодальностей

После формирования «сырых» измерений, векторов координат и скорости НС, а также поправок к «сырым» измерениям по оперативной информации, поступающей от НС, можно приступить к решению навигационной задачи, заключающейся в определении векторов положения и скорости антенны АСН потребителя.

В навигационных приемниках может формироваться разный состав «сырых» измерений, может быть реализована различная временная привязка измерений к внутренним или системным часам. Все эти особенности должны быть учтены при реализации алгоритмов решения навигационных задач, которые также могут отличаться.

В первую очередь рассмотрим алгоритмы компенсации различного рода возмущений псевдодальностей, по которым определяется вектор координат потребителя.

Вектор координат потребителя определяется по значениям всех достоверных псевдодальностей PR_i, сформированных на данной секунде, при наличии достоверных эфемерид, соответствующих НС. В первую очередь составляют список таких НС, для каждого из которых формируют поправки, соответствующие ошибкам часов НС относительно системного времени (для GPS — по формуле (4.39), для ГЛОНАСС — по формуле (4.37)), для GPS также формируют релятивистские поправки по формуле (4.40), для ГЛОНАСС в режиме GPS+ГЛОНАСС поправки на расхождение системных шкал времени GPS и ГЛОНАСС по формуле (4.36).

Следующим этапом расчета поправок псевдодальностей является расчет векторов перемещения НС за время распространения сигнала от НС потребителю. Вычисляют координаты НС на момент приема сигнала в АСН и проведения измерения. Допустим, измерение выполнено в целую секунду внутренних часов приемника. В процессе измерений определяется смещение $\tau_п$ шкалы приемника относительно системной шкалы. Если в начальный момент это смещение неизвестно, то его можно считать равным нулю. С учетом знания $\tau_п$ определяется момент приема сигнала в системном времени $t_с$, а также координаты $\bar{X}_с(t_с)$ соответственно для ГЛОНАСС и GPS.

При проведении измерений АСН обычно положение потребителя известно с какой-либо точностью, например, вектор предыдущего решения, который может использоваться для расчета времени распространения. Если этот

вектор неизвестен, то время распространения принимается равным 0,08 с, иначе определяется по формуле

$$\tau_p = \frac{\left|\bar{X}_{\text{п}}(t_{\text{с}}) - \bar{X}_{\text{с}}(t_{\text{с}})\right|}{c}, \tag{6.1}$$

где $\bar{X}_{\text{п}}(t_{\text{с}})$ — оценка координат потребителя.

Координаты НС в момент излучения сигнала определяются по формуле

$$\bar{X}_{\text{с}}(t_{\text{с}} - \tau_{\text{п}}) = \bar{X}_{\text{с}}(t_{\text{с}}) - \tau\bar{V}_{\text{ИСК}}(t_{\text{с}}), \tag{6.2}$$

где $\bar{V}_{\text{ИСК}}(t_{\text{с}}) = \bar{V}_{\text{с}}(t_{\text{с}}) + \left[\bar{\omega}_{\text{З}} + \bar{X}_{\text{с}}\right]$; $\bar{V}_{\text{с}}(t_{\text{с}})$ — скорость НС в ГСК, полученная по алгоритмам, приведенным в разд. 3.5; $\bar{V}_{\text{ИСК}}(t_{\text{с}})$ — скорость НС относительно ИСК в проекциях на оси ГСК.

Сформированные векторы координат НС $\bar{X}_{\text{с}}(t_{\text{с}} - \tau_{\text{п}})$ с учетом поправок на время распространения сигнала должны использоваться для расчета координат потребителя.

Существенное возмущение в псевдодальность вносит ионосфера Земли. Ошибки, вносимые ионосферой Земли, составляют от нескольких метров до нескольких десятков метров. Ионосферное возмущение зависит от состояния ионосферы, координат потребителя и координат НС. Для компенсации ионосферной погрешности в системе GPS разработана модель влияния ионосферы на «сырые» измерения. В этой модели параметры, характеризующие текущее состояние ионосферы, передаются в составе неоперативной информации сообщений GPS, включающей в себя восемь параметров, каждый из которых передается восьмью битами информации:

$$\alpha_0(\text{sec});\alpha_1(\text{sec}/\,semi-circle);\alpha_2(\text{sec}/\,semi-circle)^2;\alpha_3(\text{sec}/\,semi-circle)^3;$$

$$\beta_0(\text{sec});\beta_1(\text{sec}/\,semi-circle);\beta_2(\text{sec}/\,semi-circle)^2;\beta_3(\text{sec}/\,semi-circle)^3.$$

Алгоритм расчета ионосферной поправки с использованием коэффициентов α_i, β_i приведен в документе IS-GPS-200.

Для расчета ионосферной поправки входной информацией кроме перечисленных параметров являются:

$\bar{X}$ — вектор координат потребителя;

$\bar{X}_i$ — вектор координат НС.

Алгоритм расчета ионосферной поправки выполняется в приведенной далее последовательности.

1. По вектору координат потребителя $\bar{X}$ вычисляются географические долгота L, широта B и высота H над геоидом Земли с помощью алгоритмов, приведенных в разд. 1.3. Размерность формируемых углов L, B — полуциклы (π рад).

2. По вектору координат потребителя $\bar{X}$ и НС $\bar{X}_i$ с использованием географических координат потребителя определяется азимут A и угол E восхождения НС:

$$\Delta\bar{r} = \bar{X}_i - \bar{X} = (dX, dY, dZ);$$

$$dN = -\sin B \cos L\, dX - \sin B \sin L\, dY + \cos B\, dZ;$$

$$dE = -\sin L\, dX + \cos L\, dY;$$

$$dU_p = \cos B \cos L\, dX + \cos B \sin L\, dY + \sin B\, dZ;$$

$$A = a\tan\left(\frac{dE}{dN}\right) \text{ — азимут;}$$

$$E = a\tan\frac{dUp}{\sqrt{dN^2 + dE^2}} \text{ — угол восхождения.}$$

Размерность углов A и E — полуциклы (π рад);

$t = 4{,}32 \cdot 10^4 \lambda_i$ + GPS time (с) — местное время, где $0 \le t < 86\,400$. Поэтому, если $t \ge 86\,400$, $t = t - 86\,400$, если $t < 0$, то $t = t + 86\,400$ (с);

$$\psi = \frac{0{,}0137}{E + 0{,}11} - 0{,}022 \text{ — полуциклы;}$$

$$\varphi_i = \begin{cases} B + \psi\cos A, \text{ если } |\varphi_i| \le 0{,}416; \\ 0{,}416, \text{ если } \varphi_i > 0{,}416; \\ -0{,}416, \text{ если } \varphi_i < -0{,}416, \end{cases} \text{ — полуциклы;} \quad (6.3)$$

$$\lambda_i = L + \frac{\psi \sin A}{\cos\varphi_i} \text{ —полуциклы;}$$

$$\varphi_m = \varphi_i + 0{,}064\cos(\lambda_i - 1{,}617) \text{ — полуциклы;}$$

$$F = 1 + 16{,}0(0{,}53 - E)^3;$$

$$PER = \sum_{n=0}^{3} \beta_n \varphi_m^n, \text{ если } PER < 72\,000, \text{ то } PER = 72\,000 \text{ (с);}$$

$$x = \frac{2\pi(t - 50400)}{PER} \text{ — в радианах;}$$

$$AMP = \sum_{n=0}^{3} \alpha_n \varphi_m^n, \text{ если } AMP < 0, \text{ то } AMP = 0 \text{ (с);}$$

$$T_{iono} = \begin{cases} F\left[5 \cdot 10^{-9} + AMP\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\right], \text{ если } |x| < 1{,}57; \\ F \cdot 5 \cdot 10^{-9}, \text{ если } |x| \ge 1{,}57 \end{cases} \text{ — в секундах.}$$

Коррекция псевдодальности выполняется по формуле

$$PR = PR - T_{iono}c. \tag{6.4}$$

Следует отметить, что приведенная модель справедлива для потребителей, находящихся на Земле. Для КА на высоте 350…400 км ионосферные ошибки отличаются от ошибок, формируемых по рассмотренным алгоритмам. Однако, например, эмпирически выявлено, что для АСН, установленной на МКС, ионосферные поправки можно формировать по приведенным алгоритмам с коэффициентом 0,5.

В Интернете существует много сайтов, на которых представлены программные функции, реализующие различные, в том числе и приведенный выше алгоритм определения ионосферных поправок.

Кроме ионосферы возмущение в псевдодальность вносит тропосфера. Алгоритмы компенсации тропосферной погрешности не приведены в документах GPS и ГЛОНАСС. Тем не менее существуют алгоритмы формирования тропосферной задержки различной сложности.

Входной информацией для алгоритма является:

$\bar{X}_i$ — координаты НС;

$\bar{X}$ — координаты пользователя;

время в формате *N* дня от начала года (*D*0 *Y* от 0 до 364).

На выходе формируется тропосферная задержка сигнала.

По выходным данным аналогично, как и при формировании ионосферной задержки, вычисляются:

B — широта пользователя;

H — высота пользователя над геоидом;

E — угол восхождения над спутником.

Тропосферная задержка, согласно модели Нейлли, имеет вид

$$tropospheric_delay = D_d^z m'_d(E) + D_w^z m_w(E). \tag{6.5}$$

Гидростатическая тропосферная задержка в зените D_d^z (часто ее называют «сухая» задержка, *dry*) означает задержку при прохождении сигнала через тропосферу, находящуюся в гидростатическом равновесии, по направлению из зенита, и может быть определена с высокой точностью, поскольку исходя из предположения гидростатического равновесия к тропосфере применяют законы идеального газа, $D_d^z = 1{,}013 \cdot 2{,}27 e^{-0{,}116^{-3}\mathrm{H}}$.

Влажная тропосферная задержка в зените D_w^z (*wet*) гораздо сложнее поддается моделированию, так как для ее учета требуется знать распределение водяных паров по высоте, что проблематично из-за неравновесности происходящих в атмосфере процессов. Данная задержка составляет около 10 % всей тропосферной задержки, $D_w^z = 0{,}1$.

Функция учета возвышения $m_d(E)$ (*mapping function*) для гидростатической задержки нужна для поиска угла восхождения на спутник, в данной модели угол восхождения может составлять более трех градусов:

$$m_d(E) = \frac{1 + \dfrac{a}{1 + b/(1+c)}}{\sin E + \dfrac{a}{\sin E + b/(\sin E + c)}} = f(E, a, b, c). \quad (6.6)$$

Функция учета возвышения $m_w(E)$ (*mapping function*) для влажной задержки

$$m_w(E) = \frac{1 + \dfrac{a_w}{1 + b_w/(1+c_w)}}{\sin E + \dfrac{a_w}{\sin E + b_w/(\sin E + c_w)}} = f(E, a_w, b_w, c_w). \quad (6.7)$$

Коэффициенты для (6.6) и (6.7) выражаются через табличные значения следующим образом:

$$a = a_{avg} - a_{amp}\cos\left(2\pi\frac{D_0Y - D_0Y_0}{365,25}\right);$$

$$b = b_{avg} - b_{amp}\cos\left(2\pi\frac{D_0Y - D_0Y_0}{365,25}\right);$$

$$c = c_{avg} - c_{amp}\cos\left(2\pi\frac{D_0Y - D_0Y_0}{365,25}\right).$$

$D_0Y_0 = 28$, если пользователь находится в северном полушарии, и $D_0Y_0 = 221$, если пользователь — в южном полушарии.

Коэффициенты для гидростатической функции учета угла возвышения приведены в табл. 6.1.

Коэффициенты для широт меньше и равных 15° берутся из табл. 6.1 для значения 15°, коэффициенты для широт больше или равных 75° — из табл. 6.1 для значения широты 75°. Коэффициенты для широт, принадлежащих диапазону от 15 до 75°, вычисляются с помощью линейной интерполяции табличных значений, например, если широта равна 22°, то

$$a_{avg} = \left(a_{avg}(30°) - a_{avg}(15°)\right)\frac{22-15}{30-15}.$$

Далее проводится высотная коррекция гидростатической функции учета возвышения:

$$\Delta m_d = \frac{dm(E)}{dh}H,$$

где H измеряется в километрах;

$$\frac{dm(E)}{dh} = \frac{1}{\sin E} - f\left(E, a_{ht}, b_{ht}, c_{ht}\right),$$

где f — функция.

Таким образом,

$$m'_d = m_d + \Delta m_d,$$

где m'_d — откорректированное значение.

Таблица 6.1

Коэффициенты для гидростатической функции учета угла возвышения

Коэффициент	Широта				
	15°	30°	45°	60°	75°
avg					
a_{avg}	$1{,}2769934 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2683230 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2465397 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2196049 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2045996 \cdot 10^{-3}$
b_{avg}	$2{,}9153695 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9152299 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9288445 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9022565 \cdot 10^{-3}$	$2{,}9024912 \cdot 10^{-3}$
c_{avg}	$6{,}2610505 \cdot 10^{-2}$	$6{,}2837393 \cdot 10^{-2}$	$6{,}3721774 \cdot 10^{-2}$	$6{,}3824265 \cdot 10^{-2}$	$6{,}4258455 \cdot 10^{-2}$
amp					
a_{amp}	0,0	$1{,}2709626 \cdot 10^{-3}$	$2{,}6523662 \cdot 10^{-3}$	$3{,}4000452 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1202191 \cdot 10^{-3}$
b_{amp}	0,0	$2{,}1414979 \cdot 10^{-3}$	$3{,}0160779 \cdot 10^{-3}$	$7{,}2562722 \cdot 10^{-3}$	$1{,}1723375 \cdot 10^{-2}$
c_{amp}	0,0	$9{,}0128400 \cdot 10^{-3}$	$4{,}3497037 \cdot 10^{-3}$	$8{,}4795348 \cdot 10^{-2}$	0,17037206
height					
a_{ht}	$2{,}53 \cdot 10^{-3}$				
b_{ht}	$5{,}49 \cdot 10^{-3}$				
c_{ht}	$1{,}14 \cdot 10^{-3}$				

Аналогично вычисляется влажная функция учета угла возвышения (табл. 6.2). Отличие от вычисления гидростатической функции угла возвышения состоит в том, что для коэффициентов нет *amp*-значений (они равны 0), а также не проводится высотная коррекция.

Таблица 6.2

Коэффициенты для влажной функции учета угла возвышения

Коэффициент	Широта				
	15°	30°	45°	60°	75°
a_w	$5{,}8021897 \cdot 10^{-4}$	$5{,}6794847 \cdot 10^{-4}$	$5{,}8118019 \cdot 10^{-4}$	$5{,}9727542 \cdot 10^{-4}$	$6{,}1641693 \cdot 10^{-4}$
b_w	$1{,}4275268 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5138625 \cdot 10^{-3}$	$1{,}4572752 \cdot 10^{-3}$	$1{,}5007428 \cdot 10^{-3}$	$1{,}7599082 \cdot 10^{-3}$
c_w	$4{,}3472961 \cdot 10^{-2}$	$4{,}6729510 \cdot 10^{-2}$	$4{,}3908931 \cdot 10^{-2}$	$4{,}4626982 \cdot 10^{-2}$	$5{,}4736038 \cdot 10^{-2}$

На рис. 6.1–6.4 приведены графики тропосферных ошибок в зависимости от разных параметров, позволяющие оценить значение и диапазон изменения этих ошибок. На рис. 6.1 показан график зависимости тропосферной ошибки от угла возвышения, из которого видно, что при углах возвышения выше 20° тропосферная ошибка не превышает 5 м. Дальнейшее уменьшение угла возвышения приводит к резкому возрастанию этой ошибки, достигающей в окрестности нулевого возвышения ~35 м.

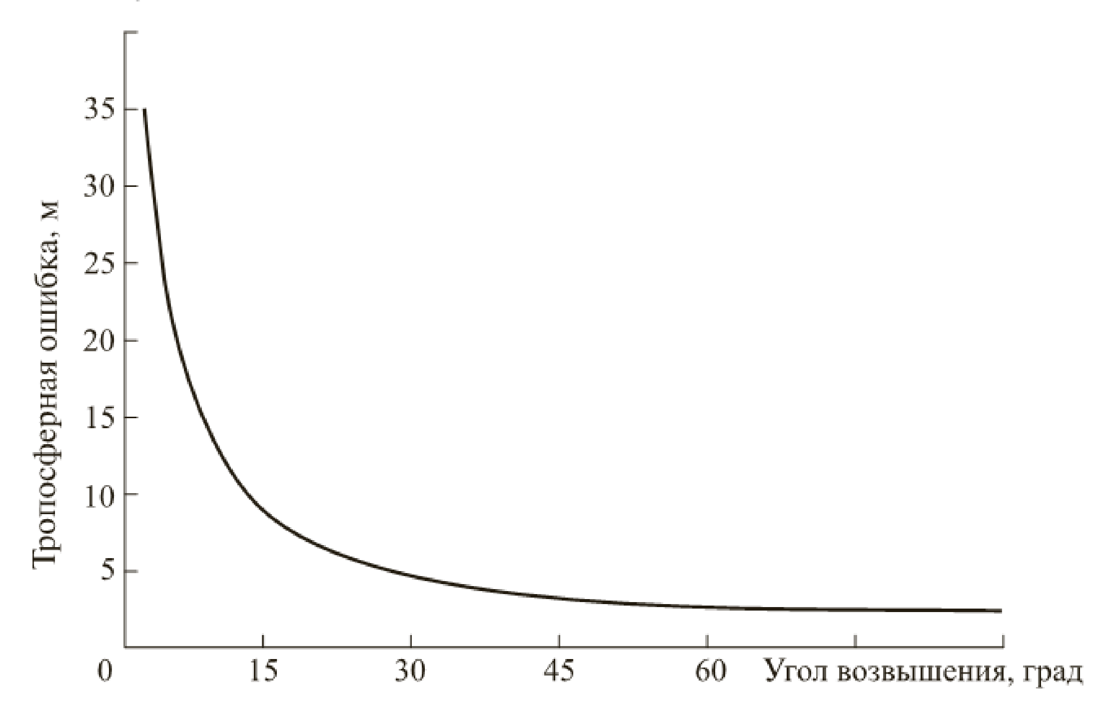


Рис. 6.1. График зависимости тропосферной ошибки от угла возвышения:
$f_i = 0$; $h = 0$; $D_0Y = 0$

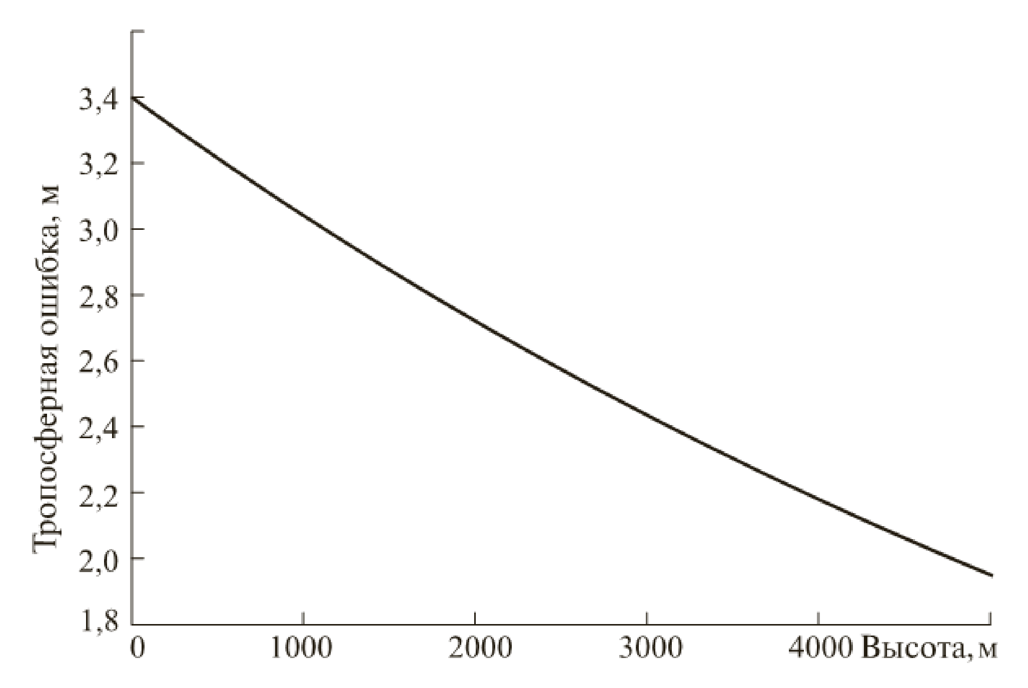


Рис. 6.2. График зависимости тропосферной ошибки от высоты потребителя над уровнем земного эллипсоида:
$f_i = 0$; $E = 45$; $D_0Y = 0$

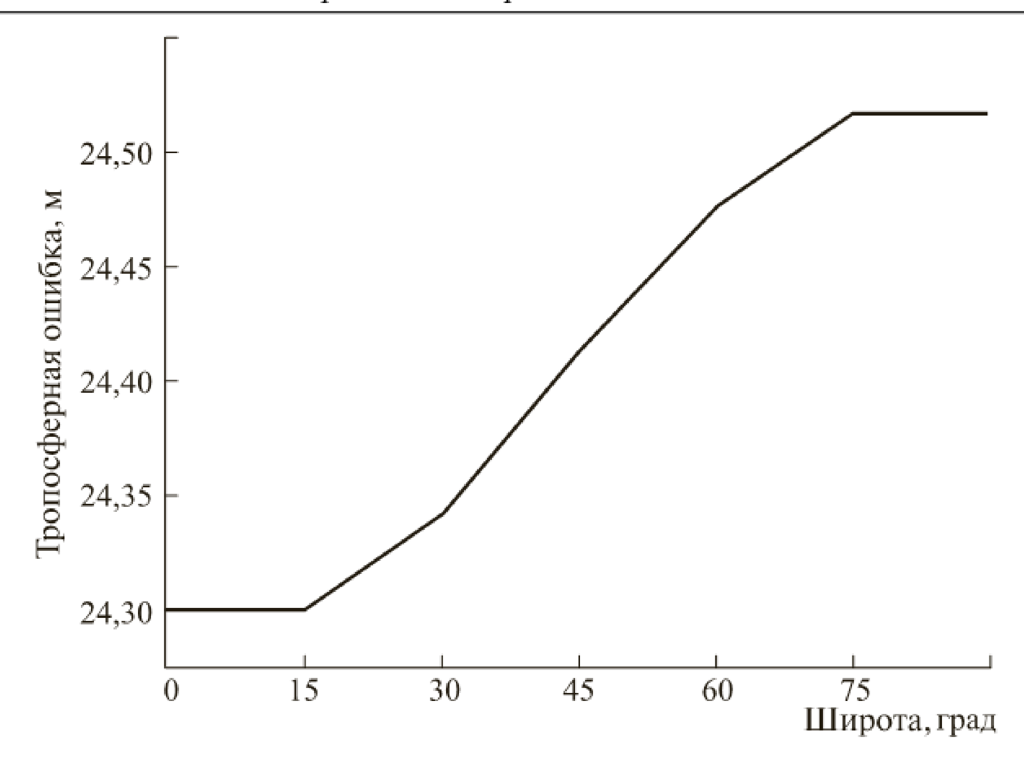


Рис. 6.3. График зависимости тропосферной ошибки от широты:
$H = 0$; $E = 5$; $D_0Y = 0$

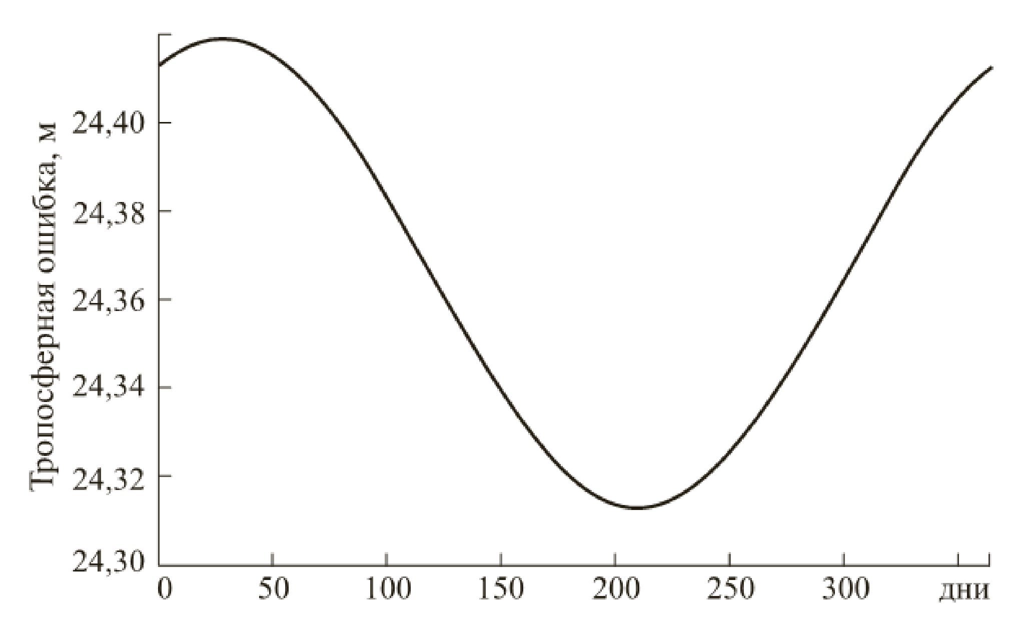


Рис. 6.4. График зависимости тропосферной ошибки от номера дня в году:
$f_i = 45$; $H = 0$; $E = 5$

На рис. 6.2 показан график зависимости тропосферной ошибки от высоты потребителя над уровнем земного эллипсоида. График показывает, что тропосферная ошибка почти линейно уменьшается с понижением высоты, и на уровне 5 км составляет ~50 % от ошибки на нулевой высоте.

На рис. 6.3 приведен график зависимости тропосферной ошибки от широты, который показывает, что тропосферная ошибка слабо зависит от широты. С увеличением широты тропосферная ошибка возрастает относительно уровня широты не более, чем на 1 %.

На рис. 6.4 приведен график зависимости тропосферной ошибки от дня в году. Он показывает, что в течение года изменение ошибки не превышает 1 %. Поэтому можно считать, что тропосферная ошибка практически не зависит от времени и географического положения, а зависит только от угла возвышения НС и высоты потребителя над уровнем земного эллипсоида.

Графики на рис. 6.1–6.4 демонстрируют значительную ошибку, вносимую тропосферой в измеряемые значения псевдодальностей. Особенно существенна эта ошибка в измерениях псевдодальностей пригоризонтных спутников для наземных потребителей. При нулевых углах возвышения НС она может достигать 30…60 м, как показано на рис. 6.5. Графики на рис. 6.5, *а* соответствуют нулевому углу маски (т. е. в обработку включаются все НС, находящиеся выше местного горизонта), на рис. 6.5, *б* — углу маски 5°.

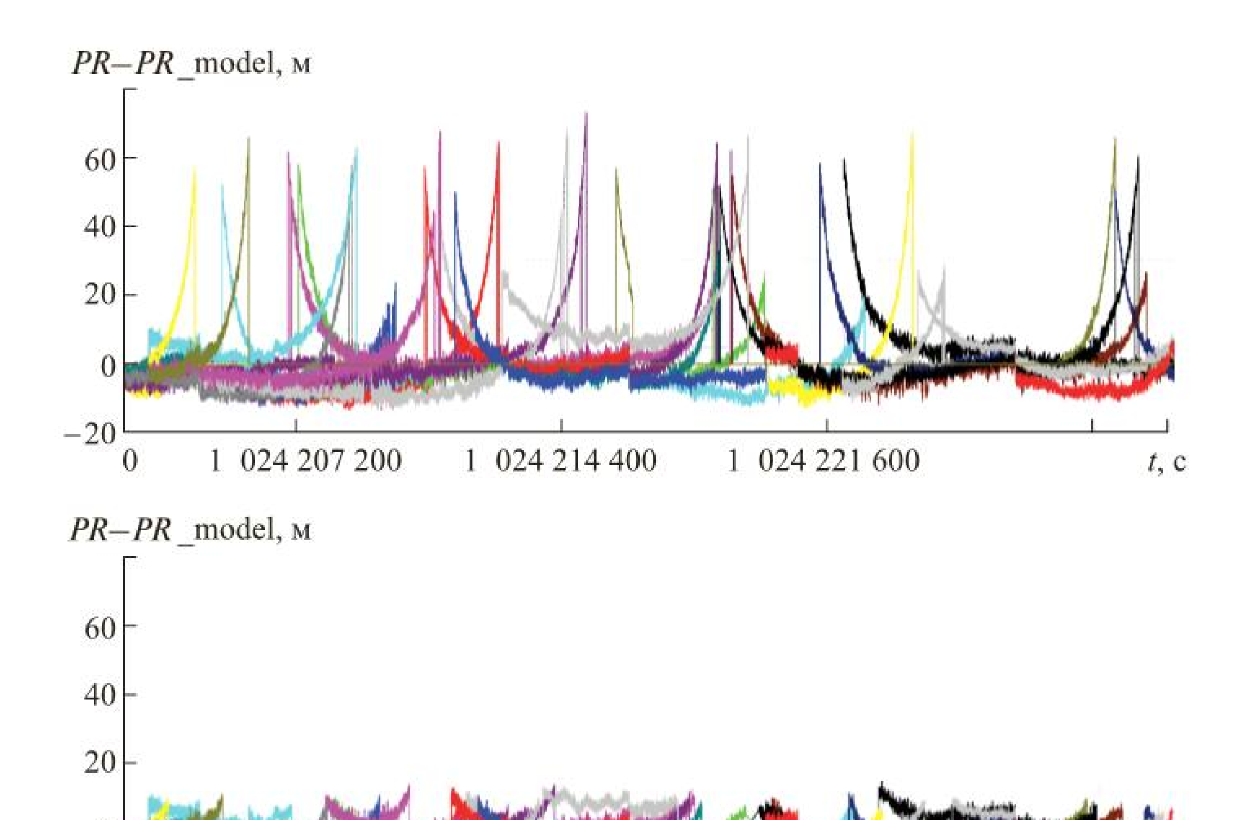


Рис. 6.5. Тропосферные ошибки АСН у поверхности Земли для углов маски 0° (*а*) и 5° (*б*)

Из рисунка видно, что ошибки псевдодальностей резко возрастают у восходящих и заходящих спутников. Значения этих ошибок при нулевом угле маски превосходят 70 м.

Выбор маски 5° обеспечивает существенное снижение тропосферных ошибок, которые в этом случае не превышают ~10 м. Оставшиеся тропосферные ошибки могут быть скомпенсированы путем использования рас-

смотренных в настоящем разделе алгоритмов, моделирующих тропосферные ошибки. Точность приведенных алгоритмов для маски 5° составляет ~1 м. Следует отметить также, что для АСН, установленной на КА и работающей по НС с положительным возвышением, тропосферные ошибки в измерениях псевдодальностей практически равны 0. Если АСН работает с отрицательной маской, и линия КА — НС проходит у поверхности Земли, тропосферная ошибка может достигать 150…200 м.

6.2. Алгоритмы формирования вектора координат потребителя

После выполнения коррекции измеренных псевдодальностей и вычисления координат НС на момент излучения сигнала, принятого приемником в момент *t*, можно приступить к вычислению вектора координат потребителя.

Для определяемых векторов координат и скорости по измерениям АСН существует устоявшийся международный термин — *PVt* (*position*, *velocity*, *time*). Сообщение АСН с векторами координат и скорости имеет русское обозначение — КСВ — координаты, скорость, время. *PVt* (или КСВ) представляет собой навигационное определение АСН, получаемое по «сырым» измерениям — псевдодальностям (*pseudorang*, *PR*) и интегральным фазам (*carear phase*, *CP*).

Вычисление проводят по формулам, аналогичным формулам (3.6)–(3.9). Однако они демонстрируют принцип определения координат потребителя по измерениям АСН и не учитывают возмущающие факторы, влияющие на измеренную псевдодальность, а также наличие ошибки часов потребителя, без знания которой алгоритмы (3.6)–(3.9) не могут быть использованы для определения вектора координат.

Будем считать, что в сформированном массиве псевдодальностей PR_i (i — номер НС из числа отслеживаемых НС на данной секунде) учтены все необходимые поправки, а массив векторов $\bar{X}_i$ координат НС относится к моментам времени излучения сигналов, принятых приемником в текущий момент *t*. С учетом ошибки часов приемника для псевдодальности можно записать уравнение

$$PR_i + c\tau = \sqrt{\left(\bar{X}_i - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}} \left(\bar{X}_i - \bar{X}\right)}, \tag{6.8}$$

где τ — ошибка часов приемника; $\bar{X}$ — неизвестный искомый вектор координат потребителя.

После возведения правой и левой частей уравнения (6.8) в квадрат и ряда преобразований для *i*-го НС получим

$$PR_i^2 + c^2\tau^2 - \bar{X}_i^{\mathrm{T}}\bar{X}_i = -2\bar{X}_i^{\mathrm{T}}\bar{X} - 2PR_i c\tau + \bar{X}^2. \tag{6.9}$$

Вычитая из уравнения для i-го НС аналогичное уравнение для j-го НС, получим

$$\left(PR_i^2 - PR_j^2\right) - \left(\bar{X}_i^2 - \bar{X}_j^2\right) = -2\left(\bar{X}_i^{\mathrm{T}} - \bar{X}_j^{\mathrm{T}}\right)\bar{X} - 2\left(PR_i - PR_j\right)c\tau. \quad (6.10)$$

Для n НС можно записать систему из n уравнений, аналогичных уравнению (6.10):

$$\begin{gathered}
\left(PR_1^2 - PR_2^2\right) - \left(\bar{X}_1^2 - \bar{X}_2^2\right) = -2\left(\bar{X}_1^T - \bar{X}_2^T\right)\bar{X} - 2\left(PR_1 - PR_2\right)c\tau; \\
\left(PR_2^2 - PR_3^2\right) - \left(\bar{X}_2^2 - \bar{X}_3^2\right) = -2\left(\bar{X}_2^T - \bar{X}_3^T\right)\bar{X} - 2\left(PR_2 - PR_3\right)c\tau; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(PR_n^2 - PR_1^2\right) - \left(\bar{X}_n^2 - \bar{X}_1^2\right) = -2\left(\bar{X}_n^T - \bar{X}_1^T\right)\bar{X} - 2\left(PR_n - PR_1\right)c\tau.
\end{gathered} \quad (6.11)$$

Введем следующие обозначения:

$$U = \begin{pmatrix} \left(PR_1^2 - PR_2^2\right) - \left(\bar{X}_1^2 - \bar{X}_2^2\right) \\ \vdots \\ \left(PR_n^2 - PR_1^2\right) - \left(\bar{X}_n^2 - \bar{X}_1^2\right) \end{pmatrix}$$ — n-мерный вектор измерений;

(6.12)

$$B = -2\begin{pmatrix} \bar{X}_1^{\mathrm{T}} - \bar{X}_2^{\mathrm{T}} & PR_1 - PR_2 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{X}_n^{\mathrm{T}} - \bar{X}_1^{\mathrm{T}} & PR_n - PR_1 \end{pmatrix}$$ — матрица размером $n\times4$, все компоненты которой известны;

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ c\tau \end{pmatrix}$$ — неизвестный 4-мерный вектор.

Тогда система уравнений (6.11) может быть представлена в виде

$$\bar{U} = B\bar{\xi}. \quad (6.13)$$

Решение уравнения (6.13) требует обращения матрицы ($B^{\mathrm{T}}B$). Компоненты этой матрицы достаточно большие — порядка радиуса орбиты НС. Для вычисления детерминанта такой матрицы в БЦВМ может не хватать разрядности. Поэтому нормируем уравнение (6.13), для этого введем обозначения:

$$\bar{u} = \frac{1}{R_0}\bar{U}; \quad b = \frac{1}{R_0}B, \quad (6.14)$$

где R_0 — константа, $R_0 = 25\,000\cdot10^3$ м.

Тогда уравнение (6.14) примет вид

$$\bar{u} = b\bar{\xi}. \quad (6.15)$$

Решим это уравнение:

$$\bar{\xi} = \left(b^{\mathrm{T}}b\right)^{-1} b^{\mathrm{T}}\bar{u}. \quad (6.16)$$

Учитывая, что компоненты матрицы b имеют значение порядка единицы, при вычислении детерминанта матрицы $b^{\mathrm{T}}b$ не может быть каких-либо вычислительных проблем. Однако для того, чтобы решение существовало, необходимо, чтобы существовала матрица $(b^{\mathrm{T}}b)^{-1}$. Необходимым условием для этого является наличие в текущем созвездии НС как минимум четырех спутников, а необходимым и достаточным условием — неравенство нулю детерминанта этой матрицы:

$$\det(b^{\mathrm{T}}b) \neq 0. \tag{6.17}$$

К сожалению, как показывает анализ, $\det(b^{\mathrm{T}}b)$ оказывается всегда близок к нулю. В результате при малых ошибках измерений псевдодальностей возникают большие ошибки вектора искомых координат $\bar{X}$. Поэтому, несмотря на вычислительную простоту рассмотренного алгоритма, приходится использовать более сложные с точки зрения объема вычислений алгоритмы, обеспечивающие более точное решение.

Рассмотрим один из таких алгоритмов.

Пусть известно начальное приближение $\bar{X}_0$ вектора $\bar{X}$. Тогда для псевдодальности i-го НС справедливо равенство

$$PR_i + c\tau = \sqrt{\left(\bar{X}_i - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(X_i - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X}_0\right)}, \tag{6.18}$$

где $\Delta\bar{X}$ — искомая ошибка начального приближения $\bar{X}_0$.

При малых значениях ошибки $\Delta\bar{X}$ $\left(\left|\Delta\bar{X}\right| << \left|\bar{X}_i\right|\right)$ уравнение (6.18) можно преобразовать к виду

$$PR_i - D_{0i} = -\frac{\left(\bar{X}_i - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{0i}}\Delta\bar{X} - c\tau, \tag{6.19}$$

где D_0 — нулевое приближение дальности до НС, рассчитанное через нулевое приближение $\bar{X}_0$.

Для n НС можно записать систему из n уравнений, аналогичных уравнению (6.19):

$$\begin{gathered} PR_1 - D_{01} = -\frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{01}}\Delta\bar{X} - c\tau; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ PR_n - D_{0n} = -\frac{\left(\bar{X}_n - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_n}\Delta\bar{X} - c\tau. \end{gathered} \tag{6.20}$$

Введем следующие обозначения:

$\bar{U} = \begin{pmatrix} PR_1 - D_{01} \\ \vdots \\ PR_n - D_{0n} \end{pmatrix}$ — n-мерный вектор измерений;

$$B=-\begin{pmatrix} \dfrac{\left(\bar{X}_1-\bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\left(\bar{X}_n-\bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_n} & 1 \end{pmatrix}$$ — матрица направляющих косинусов на НС размером $n\times 4$;

$$\Delta\bar{\xi}=\begin{pmatrix}\Delta\bar{X}\\ c\tau\end{pmatrix}$$ — искомый вектор.

С учетом введенных обозначений система уравнений (6.20) может быть представлена как

$$\bar{U}=-B\,\Delta\bar{\xi}. \tag{6.21}$$

Решение уравнения (6.21) имеет вид

$$\Delta\bar{\xi}^*=-\left(B^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}B^T\bar{U}. \tag{6.22}$$

Решение (6.22) существует, если существует матрица $(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}$, т. е. если $\det(B^{\mathrm{T}}B)\neq 0$.

Необходимым условием существования решения (6.22) является наличие в созвездии НС, по которым выполняются измерения, не менее четырех спутников. Решение (6.22) дает первую итерацию определения вектора $\Delta\bar{\xi}$, по которой определяется первое приближение вектора $\bar{X}$ и τ:

$$\begin{aligned}\bar{X}^1&=\bar{X}_0^*+\Delta\bar{X};\\ \tau^1&=\frac{c\tau^*}{c}.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Подставив значение первого приближения векторов $\bar{X}^1$ и τ^1 в первоначальную систему уравнений, по алгоритму (6.23) получим второе приближение $\bar{X}^2$, $\bar{\tau}^2$.

Завершается итерационный процесс тогда, когда

$$\left|\bar{X}^i\right|+\left|c\tau^i\right|-\left|X^{i+1}\right|-\left|c\tau^{i+1}\right|<\varepsilon.$$

Значение ε обычно выбирается из диапазона 0,5…1 м.

Неудобством рассмотренного алгоритма является необходимость знания начального приближения вектора координат $\bar{X}_0$, которое часто бывает неизвестным. В качестве первого приближения можно использовать, например, нулевой вектор ($X_0=0$), однако в этом случае детерминант матрицы $B^{\mathrm{T}}B$ будет близок к нулю и решение может не сойтись. Удобно также использовать точку на поверхности Земли, лежащую на одном из векторов $\bar{X}_i$ координат

НС видимого созвездия. В этом случае вектор начального приближения определяется по формуле

$$\bar{X}_0 = R_3 \frac{\bar{X}_i}{|\bar{X}_i|}. \quad (6.24)$$

При таком начальном приближении алгоритм сходится очень быстро. Несмотря на большую начальную погрешность нулевого приближения, обычно достаточно 3–5 итераций для завершения счета.

При наличии ошибок измерений псевдодальностей возникает ошибка определения вектора $\Delta\bar{\xi}^*$, значение которой пропорционально ошибкам измерений. Но она также зависит от того, насколько хорошо обращается матрица $B^{\mathrm{T}}B$. Критерием обращаемости служит ее детерминант. Чем больше детерминант, тем лучше обращаемость, тем меньше ошибки определений координат и времени при одних и тех же ошибках измерений псевдодальности. Однако в мировой практике введен другой параметр, характеризующий обращаемость матрицы $B^{\mathrm{T}}B$ — так называемый *GDOP* — *Geometric Dilution of Precision* (геометрический фактор),

$$GDOP = \sqrt{t_race\left(B^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}}, \quad (6.25)$$

где $t_race(\,)$ — обозначение следа матрицы, заключенной в скобках.

В навигационных приемниках решение считается достоверным, если $GDOP < GDOP_0$, где $GDOP_0$ — пороговое значение, обычно лежащее в диапазоне $5 \le GDOP_0 \le 10$.

В некоторых случаях удобно использовать алгоритм определения вектора координат по разностям псевдодальностей. В этом случае неизвестное значение смещения часов исключается из состава уравнений, а число неизвестных параметров уменьшается до трех (три координаты вектора $\bar{X}$). Рассмотрим этот алгоритм.

Запишем уравнение для разности псевдодальностей *i*-го и *j*-го НС:

$$PR_i - PR_j = \sqrt{\left(\bar{X}_i - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_i - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X}\right)} -$$

$$- \sqrt{\left(\bar{X}_j - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_j - \bar{X}_0 - \Delta\bar{X}\right)}, \quad (6.26)$$

где $\bar{X}_0$ — нулевое приближение координат НС; $\Delta\bar{X}$ — искомый вектор ошибки нулевого приближения.

В уравнении (6.26) неизвестная ошибка часов приемника τ взаимно уничтожилась, так как она одинакова для всех НС.

При малых значениях ошибок $\Delta\bar{X}$ $\left(|\Delta\bar{X}| \ll |\bar{X}_i|\right)$ уравнение (6.26) можно преобразовать к виду

$$\left(PR_i - PR_j\right) - \left(D_{0i} - D_{0j}\right) = -\left[\frac{\left(\bar{X}_i - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{0i}} - \frac{\left(\bar{X}_j - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{0j}}\right]\Delta\bar{X}, \qquad (6.27)$$

где D_{0i}, D_{0j} — нулевые приближения дальности до НС, рассчитанные через нулевое приближение $\bar{X}_0$.

Для n НС можно записать систему из n уравнений, аналогичных уравнению (6.27):

$$\begin{aligned}
&\left(PR_1 - PR_2\right) - \left(D_{01} - D_{02}\right) = -\left[\frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{01}} - \frac{\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{02}}\right]\Delta\bar{X};\\
&\left(PR_2 - PR_3\right) - \left(D_{02} - D_{03}\right) = -\left[\frac{\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{02}} - \frac{\left(\bar{X}_3 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{03}}\right]\Delta\bar{X};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\left(PR_n - PR_1\right) - \left(D_{0n} - D_{01}\right) = -\left[\frac{\left(\bar{X}_n - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{0n}} - \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_{01}}\right]\Delta\bar{X}.
\end{aligned} \qquad (6.28)$$

Введем обозначения:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \left(PR_1 - PR_2\right) - \left(D_{01} - D_{02}\right) \\ \vdots \\ \left(PR_n - PR_1\right) - \left(D_{0n} - D_{01}\right) \end{pmatrix}$$ — n-мерный вектор измерений;

$$B = -\begin{pmatrix} \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_1} - \dfrac{\left(\bar{X}_2 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\left(\bar{X}_n - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_n} - \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_0\right)^{\mathrm{T}}}{D_1} \end{pmatrix}$$ — матрица размером $n\times3$.

С учетом введенных обозначений система уравнений (6.28) может быть представлена как

$$\bar{U} = -B\,\Delta\bar{X}. \qquad (6.29)$$

Решение уравнения (6.29) имеет вид

$$\Delta\bar{X}^* = -\left(B^{\mathrm{T}}B\right)^{-1}B^{\mathrm{T}}\bar{U}. \qquad (6.30)$$

Решение уравнения (6.30) существует, если det $(B^{\mathrm{T}}B) \neq 0$. Необходимым условием существования решения (6.30) является наличие в созвездии не менее четырех НС, по которым выполняются измерения. Действительно, несмотря на то, что в системе уравнений (6.30) имеется только три неизвестных компоненты вектора $\Delta\bar{X}$, при наличии в измеряемом созвездии только

трех НС ранг матрицы B будет равен двум, так как ее третья строка будет равна сумме двух предыдущих, следовательно детерминант матрицы B при $n < 4$ всегда равен нулю.

Решение (6.30) дает первую итерацию для определения вектора $\Delta\bar{X}$. Дальше, как и при реализации предыдущего алгоритма выполняется итерационный процесс последовательного уточнения вектора $\Delta\bar{X}$. В качестве нулевого приближения вектора положения $\bar{X}_0$ так же, как и для предыдущего алгоритма, может быть взята точка на поверхности Земли с координатами, определяемыми соотношением (6.25). Решение тогда сходится к точному значению как и в предыдущем алгоритме за 3–5 итераций.

Рассмотренные два алгоритма определения вектора координат $\bar{X}$ потребителя дают практически одинаковые решения и оба используются в тех или иных навигационных приемниках. С точки зрения быстродействия они примерно одинаковы, поэтому оба могут применяться в космических системах. Но в первом алгоритме оценка смещения часов $c\tau^*$ входит в состав искомого вектора, и формируемое по алгоритму (6.22) решение кроме искомого вектора координат содержит оценку смещения часов. Во втором алгоритме оценивается вектор координат, получив который можно оценить смещение часов по формуле

$$c\tau^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[PR_i - D_i\left(\bar{X}_1^*\bar{X}_i\right)\right]}{n}. \tag{6.31}$$

На рис. 6.6 приведены типовые графики ошибок измерений АСН, установленной на низкоорбитальном КА, по координатам ΔX, ΔY, ΔZ в ГСК. Гра-

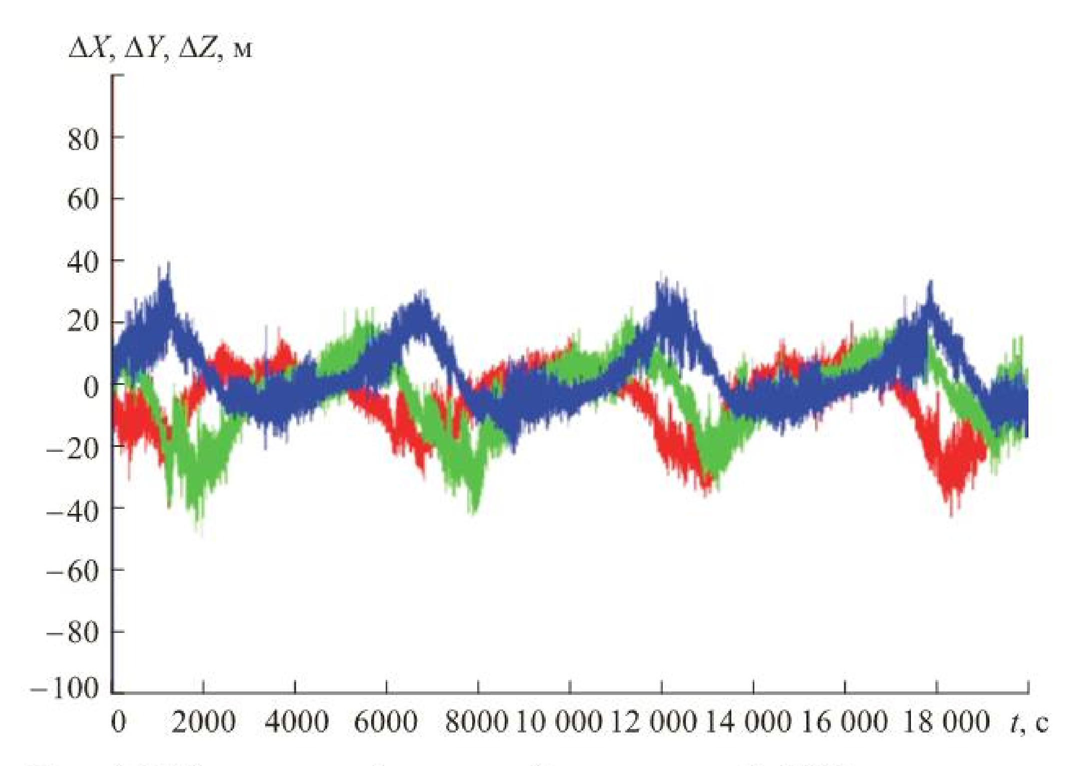


Рис. 6.6. Типовые графики ошибок измерений АСН, установленной на низкоорбитальном КА

фики получены путем моделирования формирования координат в АСН и их сравнения с точными координатами КА. На графиках четко видно влияние ионосферы — периодическое повышение ошибок на светлой части орбиты и уменьшение ошибок на теневой части орбиты. Можно отметить зашумленность ошибки, обусловленной шумом измеряемой псевдодальности. В последующих разделах будет показана возможность фильтрации этого шума при использовании фазовых измерений совместно с псевдодальностью для определения вектора координат.

Как следует из решений уравнений (6.22), (6.30) для двух рассмотренных алгоритмов, основное время реализации этих алгоритмов затрачивается на вычисление обратной матрицы ($B^{\mathrm{T}}B$). Существуют различные алгоритмы вычисления обратных матриц, отличающиеся своим быстродействием. Для матриц четвертого порядка эта разница небольшая, но как будет показано ниже, в задачах навигации часто возникает необходимость обращения матриц высокого порядка, например, порядка 16×16. Обращение таких матриц требует значительных вычислительных ресурсов. Выбор алгоритмов, обеспечивающих высокое быстродействие, особенно для реализации навигационных задач на бортовых вычислительных средствах, приобретает первостепенное значение. Поэтому ниже приведен «быстрый» алгоритм обращения определенного вида матриц, наиболее часто встречающихся в задачах навигации.

Рассмотрим алгоритмы вычисления детерминанта и обратной матрицы для симметрической матрицы A, представляемой в виде $A = B^{\mathrm{T}}B$, где B — прямоугольная матрица размером $m \times n$ ($m \geq n$).

Приведем матричное соотношение, на основе которого разработан данный алгоритм. Представим обращаемую матрицу A размером 4×4 в виде

$$A = \begin{pmatrix} D & \bar{b} \\ \bar{b}^{\mathrm{T}} & d \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

где d — число, не равное нулю, если $\det(A) \neq 0$; D — квадратная симметрическая матрица размером $(n-1)\times(n-1)$; $\bar{b}$ — вектор размерностью $n-1$.

Предположим, что $\det A \neq 0$ и существует обратная матрица A^{-1}, которую представим в виде

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 & \bar{b}_1 \\ \bar{b}_1^{\mathrm{T}} & d_1 \end{pmatrix}, \tag{6.33}$$

где d_1 — число, не равное нулю; D_1 — квадратная симметрическая матрица размером $(n-1)\times(n-1)$; $\bar{b}_1$ — вектор размерностью $n-1$.

Для вычисления детерминанта матрицы A справедлива формула

$$\det A = (\det d)\det\left(D - \frac{\bar{b}\,\bar{b}^{\mathrm{T}}}{d}\right), \tag{6.34}$$

т. е. det A равен произведению элемента d на детерминант матрицы $D-\frac{\overline{b}\ \overline{b}^{\mathrm{T}}}{d}$, порядок которой на единицу ниже. Последовательное понижение порядка матрицы по алгоритму (6.34), выделение ее углового элемента, и последующее перемножение всех n угловых элементов позволяет определить детерминант матрицы A.

Для элементов матрицы A^{-1} D_1, $\overline{b}_1$, d_1 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{d-\overline{b}^{\mathrm{T}} D^{-1} \overline{b}}; \\ \overline{b}_1 &= -d_1 D^{-1} \overline{b}; \\ A_1 &= A^{-1} + \frac{\overline{b}_1\ \overline{b}_1^{\mathrm{T}}}{d_1}. \end{aligned} \qquad (6.35)$$

Формулы (6.35) позволяют построить итерационный процесс вычисления матрицы D_1, начиная с размера, равного 1, с последовательным его увеличением. Например, взяв в качестве матрицы D первый элемент матрицы A, можно определить обратную матрицу размером 2×2 для матрицы, стоящей в левом верхнем углу матрицы A. Аналогично определяем обратную матрицу размером 3×3 и т. д. для соответствующей угловой матрицы, стоящей в левом верхнем углу матрицы A. Процесс завершается определением обратной матрицы A^{-1}. Если матрица A может быть представлена в виде (6.32) и ее детерминант не равен 0, то при реализации итерационного процесса вычисления матрицы A^{-1} исключены операции деления на 0.

6.3. Алгоритмы формирования вектора скорости потребителя

В ГСНС определение скорости потребителя основано на эффекте Доплера — изменении частоты принимаемого потребителем сигнала относительно частоты излучаемого сигнала НС. Скорость измерения дальности между НС и потребителем в этом случае определяется по формуле

$$\dot{D}_{\text{д}} = \frac{f_{\text{п}} - f_{\text{и}}}{f_0} c, \qquad (6.36)$$

где c — скорость света; f_0 — номинальная частота излучаемого несущего сигнала НС; $f_{\text{п}}$ — частота принятого сигнала потребителем в момент t; $f_{\text{и}}$ — частота излученного сигнала от НС в момент излучения сигнала, принятого потребителем в момент t.

Зная $\dot{D}_i$ для трех и более НС, можно определить вектор скорости потребителя, при этом следует иметь ввиду, что

• излучаемый каждым НС сигнал имеет смещение от номинальной частоты f_0, значение которого передается в составе оперативной информации от НС;

• принимаемый сигнал измеряется средствами приемника, генератор частоты которого имеет заметную ошибку (обычно $10^{-6}...10^{-7}$ с/с);

• частота передаваемого сигнала зависит от среды распространения.

Перечисленные факторы необходимо учитывать при расчете реальной скорости изменения дальности.

Напомним, что в составе оперативной информации GPS передаются следующие параметры:

• t_{0c} — время, к которому относятся передаваемые параметры;

• a_{f1} — относительное смещение частоты передаваемого сигнала;

• a_{f2} — производная относительного смещения частоты передаваемого сигнала.

Поправка частоты передаваемого сигнала в системе GPS определяется по формуле

$$\Delta f = a_{f1} f_0 + 2a_{f2} f_0 (t - t_{0c}), \tag{6.37}$$

где t — текущее время; f_0 — номинальная частота излучаемого сигнала.

Отметим, что передаваемый параметр a_{f2}, как правило, равен 0, поэтому смещение частоты определяет первое слагаемое равенства (6.37). Смещение остается постоянным в течение всего времени действия эфемерид.

В составе оперативной информации ГЛОНАСС передаются следующие параметры:

t_b — время, к которому относится передаваемая оперативная информация;

γ_n — относительное отклонение прогнозируемого значения несущей частоты излучаемого сигнала n-м НС от номинального значения на момент времени t_b.

Сдвиг частоты передаваемого сигнала ГЛОНАСС от номинального значения находят по формуле

$$\Delta f = \gamma_n(t_b)\, f_0, \tag{6.38}$$

где f_0 — номинальная частота передаваемого сигнала.

Коррекция частоты сигнала, передаваемого НС, осуществляется по формуле

$$f = f_0 - \Delta f. \tag{6.39}$$

С учетом коррекции частоты передаваемого сигнала, частота принимаемого сигнала

$$f_{п} = f + f_{д}, \tag{6.40}$$

где $f_{п}$ — частота на входе в приемник; $f_{д}$ — доплеровское смещение частоты, обусловленное относительной скоростью НС и антенны приемника.

Принимаемая частота измеряется средствами приемника. Пусть в приемнике задающий генератор имеет номинальную частоту $f_{0г}$ и дрейф $\Delta f_{г}$. Обычно $\Delta f_{г} / f_{0г}$ находится в диапазоне $10^{-6}...10^{-7}$ с/с. В этом случае частота генерируемого сигнала

$$f_г = f_{0г} + \Delta f_г, \qquad (6.41)$$

хотя для генератора она является номинальной $f_{0г}$.

Далее в приемнике снимается несущая частота и остается только доплеровская частота. Для снятия несущей определяется коэффициент K, на который следует умножить частоту внутреннего генератора, чтобы эта частота стала равной номинальной частоте несущего сигнала:

$$K = \frac{f_0}{f_{0г}}. \qquad (6.42)$$

На этот коэффициент K умножается частота реального сигнала генератора, затем ее вычитают из частоты принятого сигнала. В результате формируется частота псевдодоплеровского смещения (ПДС):

$$f_{ПДС} = f_0 + f_д - \left(f_{0г} + \Delta f_г\right)\frac{f_0}{f_{0г}} = f_д - \frac{\Delta f_г}{f_{0г}} f_0, \qquad (6.43)$$

которая также оценивается средствами приемника, т. е. с помощью генератора приемника. Дрейф 10^{-6} приводит к ошибке измерения скорости:

$$\Delta V = \overline{V}_{max} \cdot 10^{-6} \approx 7 \text{ мм/с}. \qquad (6.44)$$

Обычно такой ошибкой определения скорости в навигационных приемниках пренебрегают, хотя путем дополнительной итерации эту ошибку можно исключить. Например, если дрейф генератора известен из предыдущего шага, то измеренное ПДС будет связано с доплеровской частотой $f_д$ и дрейфом генератора $\frac{\Delta f_г}{f_{0г}} f_0$ следующим соотношением:

$$f_{ПДС} = \left(f_д - \frac{\Delta f_г}{f_{0г}} f_0\right)\left(1 - \frac{\Delta f_г^*}{f_{0г}}\right), \qquad (6.45)$$

где $\Delta f_г^*$ — оценка смещения генератора, полученная на предыдущем шаге.

Из равенства (6.44) и (6.45) получим уточненное значение ПДС, Гц:

$$f_{ПДС} = f_{ПДС}\left(1 + \frac{\Delta f_г^*}{f_{0г}}\right). \qquad (6.46)$$

Умножением ее на скорость света и делением на номинальную частоту несущего сигнала получим ПДС, м/с:

$$ПДС = f_{ПДС}\frac{c}{f_0}. \qquad (6.47)$$

Параметр ПДС является измерением навигационного приемника, по которому определяют скорость потребителя, и включает в себя как истинную скорость изменения дальности между НС и потребителем, а также дрейф

генератора частоты приемника. Аппаратная схема получения этого параметра в различных навигационных приемниках может быть реализована поразному. В некоторых случаях это результат интегрирования набегающей фазы после снятия номинальной частоты на некотором интервале времени, меньшем или равном 1 с, отнесенном ко времени. В некоторых приемниках выполняется непрерывное интегрирование набегающей фазы (формирование так называемой интегральной фазы — *carrier phase*), а под доплеровским смещением понимается ее секундный набег. Во всех этих случаях важно понимать, что моментом времени измерения этого ПДС является середина интервала измерения. Например, если измерением является приращение интегральной фазы за секунду, то моментом измерения является не начало и не конец секунды, а ее середина. Четкое понимание момента привязки измерения ПДС важно для КА, где за 0,5 с скорость КА меняется на ~5 м/с.

Рассмотрим алгоритмы формирования скорости потребителя по измерениям ПДС. Дальность между КА и потребителем определяется по формуле

$$D=\sqrt{\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)}, \tag{6.48}$$

где $\bar{X}_i$ — координаты НС в момент излучения сигнала; $\bar{X}$ — координаты потребителя в момент измерения.

Если в равенстве (6.48) использовать значения координат НС в момент измерения, то формула (6.48) преобразуется к виду

$$D=\sqrt{\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)}-\frac{\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{D_i}\left(\bar{V}_i+\left[\bar{\omega}_3\,\bar{X}_i\right]\right)\tau_i, \tag{6.49}$$

Учитывая, что $\dfrac{D_i}{\tau_i}=c,$ получим выражение для дальности до НС в момент излучения сигнала:

$$D=\sqrt{\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)}-\frac{\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{c}\left(\bar{V}_i+\left[\bar{\omega}_3\,\bar{X}_i\right]\right). \tag{6.50}$$

В выражении (6.50) все параметры относятся к моменту приема сигнала (т. е. моменту измерения). Продифференцировав его, получим выражение для скорости изменения дальности:

$$\dot{D}_i=\frac{\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{D_i}\left(\bar{V}_i-\bar{V}\right)-\frac{\left(\bar{V}_i-\bar{V}\right)^{\mathrm{T}}}{c}\left(\bar{V}_i+\left[\bar{\omega}_3\,\bar{X}_i\right]\right)-$$

$$-\frac{\left(\bar{X}_i-\bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{c}\left(\bar{a}_i+\left[\bar{\omega}_3\,\bar{V}_i\right]\right). \tag{6.51}$$

Ускорение НС $\overline{a}_i$, входящее в последнее слагаемое правой части равенства (6.51), определяется по формуле

$$\overline{a}_i = -\frac{\mu_з \overline{X}_i}{\left|\overline{X}_i\right|^3} - \Omega^2 \overline{X}_i + 2\Omega \overline{V}_i, \qquad (6.52)$$

где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_з & 0 \\ -\omega_з & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица вращения Земли.

В выражении (6.51) для $\dot{D}$ все параметры также относятся к моменту измерения. Первое слагаемое является основным, его значение для низкоорбитальных КА может достигать 7 км/с. Вторые два слагаемых незначительны, их значения составляют сантиметры в секунду. Однако для определения скорости потребителя с высокой точностью эти члены необходимо учитывать.

Дальнейшие выкладки существенно зависят от того, какие измерения и в какие моменты времени выполняются в навигационном приемнике для определения скорости потребителя. Лучшими характеристиками обладают навигационные приемники, измеряющие интегральную фазу (*carrier phase* — *CP*). Такие приемники обладают наиболее высокой точностью в решении навигационной задачи, позволяют решать задачи относительной навигации и ориентации. Поэтому будем предполагать, что в приемнике ежесекундно измеряется интегральная фаза. Измерения выполняются в моменты целой секунды внутренних часов приемника. Известно также текущее значение смещения внутренней шкалы времени приемника τ_0 относительно системной шкалы времени. Эту поправку также следует учитывать при вычислении скорости.

В принятом предположении моментами измерения интегральной фазы являются целые секунды системной шкалы времени. Моментом измерения приращения интегральной фазы является 0,5 с внутренней шкалы. Величиной измерения будет число Доплера:

$$D_{opi\,j+0,5} = CP_{i\,j+1} - CP_{i\,j} = \dot{D}_{i\,j+0,5} - c\frac{\Delta f_{г\,j+0,5}}{f_{0г}} f_0. \qquad (6.53)$$

В равенстве (6.53) индекс i относится к номеру НС, а индекс j — к номеру измерения.

Как отмечалось выше, моментом измерения $D_{opi\,j+0,5}$ является середина (j+1)-й секунды. К этому же моменту должны относиться $D_{i\,j+0,5}$ и $\Delta f_{г\,j+0,5}$. Для скорости изменения дальности, отнесенной к середине (j+1)-й секунды можно записать следующее равенство:

$$\dot{D}_{i\,j+0,5} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\overline{X}_{i\,j+1} - \overline{X}_{j+1}\right)^{\mathrm{T}}}{D_{i\,j+1}} + \frac{\left(\overline{X}_{ij} - \overline{X}_{j}\right)^{\mathrm{T}}}{D_{ij}}\right]\left(\frac{\overline{V}_{i\,j+1} + \overline{V}_{ij}}{2} - \overline{V}_{j+0,5}\right) +$$

$$+\frac{\left(\bar{V}_{i\,j}-\bar{V}_{j}\right)^{\mathrm{T}}}{c}\left(\bar{V}_{i\,j}+\left[\bar{\omega}_3\,\bar{X}_{i\,j}\right]\right)-\frac{\left(\bar{X}_{i\,j}-\bar{X}_{j}\right)^{\mathrm{T}}}{c}\left(\bar{a}_{i\,j}+\left[\bar{\omega}_3\,\bar{V}_{i\,j}\right]\right). \qquad (6.54)$$

В равенстве (6.54) неизвестным является вектор скорости потребителя на момент $t_{j+0,5}$.

Введем следующие обозначения:

$\bar{b}_{i\,j+0,5}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{X}_{i\,j+1}-\bar{X}_{j+1}}{D_{i\,j+1}}+\frac{\bar{X}_{i\,j}-\bar{X}_{j}}{D_{i\,j}}\right)^{\mathrm{T}}$ — значение векторов направляющих косинусов от потребителя на i-й НС на момент j + 0,5 с;

$\bar{V}_{i\,j+0,5}=\frac{\bar{V}_{i\,j+1}+\bar{V}_{i\,j}}{2}$ — значение вектора скорости i-го НС на момент j + 0,5 с;

$\Delta\dot{D}_i=\frac{\left(\bar{V}_{i\,j+1}-\bar{V}_{j}\right)^{\mathrm{T}}}{c}\left(\bar{V}_{i\,j}+\left[\bar{\omega}_3\,\bar{X}_{i\,j}\right]\right)-\frac{\left(\bar{X}_{i\,j}-\bar{X}_{j}\right)^{\mathrm{T}}}{c}\left(\bar{a}_{i\,j}+\left[\bar{\omega}_3\,\bar{V}_{i\,j}\right]\right)$ — поправка к $\dot{D}_i$ на время распространения сигнала.

Тогда равенство (6.54) можно привести к виду

$$\dot{D}_{i\,j+0,5}-\bar{b}_{i\,j+0,5}^{\mathrm{T}}\,\bar{V}_{i\,j+0,5}-\Delta\dot{D}_i=-\bar{b}_{i\,j+0,5}^{\mathrm{T}}\,\bar{V}_{j+0,5}. \qquad (6.55)$$

Выразив значение $\dot{D}_{i\,j+0,5}$ через измерения $CP_{i\,j}$, используя уравнение (6.53), получим уравнение для определения неизвестного вектора $\bar{V}_{j+0,5}$ и значения смещения частоты:

$$CP_{i\,j+1}-CP_{i\,j}-\bar{b}_{i\,j+0,5}^{\mathrm{T}}\,\bar{V}_{i\,j+0,5}-\Delta\dot{D}_i=-b_{i\,j+0,5}^{\mathrm{T}}\,\bar{V}_{j+0,5}-c\frac{\Delta f_{\text{г}\,j+0,5}}{f_{0\text{г}}}f_0. \qquad (6.56)$$

Обозначим неизвестное значение смещения относительной частоты, м/с,

$$\dot{d}=c\frac{\Delta f_{\text{г}\,j+0,5}}{f_{0\text{г}}}f_0. \qquad (6.57)$$

Уравнение (6.56) содержит в левой части измеренные составляющие интегральной фазы и известные поправки. Правая часть содержит искомый вектор скорости потребителя $\bar{V}_{j+0,5}$ и неизвестное смещение относительной частоты $\dot{d}$.

Обозначим

$$U_{i\,j+0,5}=CP_{i\,j+1}-CP_{ij}-\bar{b}_{i\,j+0,5}^{\mathrm{T}}\,\bar{V}_{j+0,5}-\Delta\dot{D}_i, \qquad (6.58)$$

тогда уравнение (6.56) может быть представлено в виде

$$U_{i\,j+0,5}=-\bar{b}_{i\,j+0,5}^{\mathrm{T}}\,\bar{V}_{j+0,5}-\dot{d}. \qquad (6.59)$$

Для серии из n одновременных измерений можно записать систему уравнений

$$U_{1\,j+0,5} = -\bar{b}^{\mathrm{T}}_{1\,j+0,5}\,\bar{V}_{j+0,5} - \dot{d};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad . \tag{6.60}$$
$$U_{n\,j+0,5} = -\bar{b}^{\mathrm{T}}_{n\,j+0,5}\,\bar{V}_{j+0,5} - \dot{d}.$$

Далее, так же, как и при вычислении координат, система может быть решена двумя способами:

– определением вектора $\bar{V}_{j+0,5}$ и $\dot{d}$;

– исключением $\dot{d}$ из системы, определение $\bar{V}_{j+0,5}$ с последующим определением $\dot{d}$.

Для решения первым способом введем обозначения:

$$\bar{U}_{j+0,5} = \begin{pmatrix} U_{1\,j+0,5} \\ \vdots \\ U_{n\,j+0,5} \end{pmatrix};\ \bar{\xi}_{j+0,5} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{j+0,5} \\ \vdots \\ \dot{d} \end{pmatrix};\ B_{j+0,5} = -\begin{pmatrix} b^{\mathrm{T}}_{1\,j+0,5} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ b^{\mathrm{T}}_{n\,j+0,5} & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.61}$$

Тогда система уравнений (6.60) может быть представлена как

$$\bar{U}_{j+0,5} = B_{j+0,5}\,\bar{\xi}_{j+0,5}. \tag{6.62}$$

Решение уравнения (6.62) имеет вид

$$\bar{\xi}^{*}_{j+0,5} = \left(B^{\mathrm{T}}_{j+0,5}B_{j+0,5}\right)^{-1} B^{\mathrm{T}}_{j+0,5}\bar{U}_{j+0,5}. \tag{6.63}$$

Решение (6.63) может быть получено при условии существования матрицы $\left(B^{\mathrm{T}}_{j+0,5}B_{j+0,5}\right)^{-1}$. Но матрица $B_{j+0,5}$ формируется из матриц B_j и B_{j+1}, использовавшихся при определении векторов координат в моменты j и $j+1$. Эти решения также существовали при условии обращаемости матриц $\left(B^{\mathrm{T}}_{j}B_{j}\right)$ и $\left(B^{\mathrm{T}}_{j+1}B_{j+1}\right)$. Таким образом, если были определены векторы $\bar{X}_j$ и $\bar{X}_{j+1}$ координат потребителя в моменты времени t_j и t_{j+1}, то матрица $\left(B^{\mathrm{T}}_{j+0,5}B_{j+0,5}\right)$ также является обращаемой, и решение (6.63) существует.

Обратим внимание, что вектор скорости, полученный в соответствии с решением (6.63) относится к середине ($j+1$)-й секунды. На наземные объекты смещение привязки скорости на 0,5 с, как правило, не влияет. В космосе, например, низкоорбитальные КА движутся с ускорением $\bar{g}$. При таком ускорении смещение времени на 0,5 с приводит к ошибке скорости, равной 5 м/с. Для исключения этой ошибки необходимо привести полученное значение вектора скорости к моменту измерения $j+1$, для которого определен вектор $\bar{X}_{j+1}$:

$$\bar{V}_{j+1} = \bar{V}_{j+0,5} + 0,5\bar{a}_i, \tag{6.64}$$

где $\bar{a}_i$ — вектор ускорения КА в ГСК, формируемый в соответствии с формулой (6.52).

Для решения системы уравнений (6.60) методом исключения $\dot{d}$ введем следующие обозначения:

$$U_{j+0,5} = \begin{pmatrix} U_{1j+0,5} - U_{2j+0,5} \\ U_{2j+0,5} - U_{3j+0,5} \\ \vdots \\ U_{nj+0,5} - U_{1j+0,5} \end{pmatrix}; \quad B_{j+0,5} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{1j+0,5}^{\mathrm{T}} - \bar{b}_{2j+0,5}^{\mathrm{T}} \\ \bar{b}_{2j+0,5}^{\mathrm{T}} - \bar{b}_{3j+0,5}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \bar{b}_{nj+0,5} - \bar{b}_{1j+0,5} \end{pmatrix}. \tag{6.65}$$

Тогда система (6.60) может быть представлена в виде

$$U_{j+0,5} = B_{j+0,5} \bar{V}_{j+0,5}, \tag{6.66}$$

а решение уравнения (6.66) —

$$\bar{V}_{j+0,5}^{*} = \left(B_{j+0,5}^{\mathrm{T}} B_{j+0,5} \right)^{-1} B_{j+0,5}^{\mathrm{T}} \bar{U}_{j+0,5}. \tag{6.67}$$

Вектор скорости, полученный по второму решению, практически совпадает с вектором скорости, полученным по первому решению. После определения вектора скорости найдем оценку вектора смещения частоты приемника:

$$\dot{d}^{*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-\bar{b}_{ij+0,5}^{\mathrm{T}} \bar{V}_{j+0,5}^{*} - U_{ij+0,5} \right). \tag{6.68}$$

Оценка вектора смещения частоты приемника, полученная по второму решению, также практически совпадает с данными, полученными по первому решению.

Найденное решение так же, как и решение, полученное первым способом, относится к моменту середины текущей секунды $j + 0{,}5$ с. Приведение решения к целой секунде может быть выполнено по формуле (6.64).

6.4. Ошибки определения векторов координат и скорости. Методы повышения точности навигационных определений АСН

Графики ошибок *PVt*, приведенные на рис. 6.6, содержат ионосферные и эфемеридные погрешности измерений АСН, а также ошибки, обусловленные шумовой составляющей измерений псевдодальностей. Сегодня практически во всех навигационных приемниках реализован так называемый *hatch filter*, снимающий эту шумовую составляющую ошибок *PVt*, а также обеспечивающий фильтрацию кратковременных всплесков ошибок, обусловленных рядом других возмущающих факторов, влияющих на точность навигационных определений. Свойства *hatch filter* основаны на том, что истинное приращение псевдодальности за секунду практически равно приращению интегральной фазы (*CP*) за секунду или ПДС, измеренному в середине интервала между измерениями псевдодальности, т. е. если в качестве «сырых» измерений в приемнике формируется *PR* и *CP*, измеренные в один и тот же момент времени, но для идеально измеренного приращения псевдодальности ΔPR_0 (без

шумовой составляющей, которая достигает нескольких метров) справедливо следующее равенство:

$$\Delta PR_0 = \Delta CP, \tag{6.69}$$

где ΔCP — приращение интегральной фазы за этот же промежуток времени.

Равенство (6.69) справедливо с точностью до шумов *CP*, значения которых составляют несколько миллиметров, а также изменения за секунду ионосферной погрешности, не превышающей нескольких сантиметров.

Целью фильтра является формирование на каждом i-м шаге измерений оценки псевдодальности PR_i^*, более точной по сравнению с измеренной псевдодальностью PR_i, которая затем используется в формировании *PVt*. В *hatch filter* оценка псевдодальности формируется по следующей формуле:

$$PR_i^* = PR_{i-1}^* + \frac{T-1}{T}\left(CP_i - CP_{i-1}\right) + \frac{1}{T}\left(PR_i - PR_{i-1}^*\right), \tag{6.70}$$

где T — постоянная времени фильтра.

Постоянная времени T характеризует время схождения фильтра и обычно ее значение составляет ~100 с. Тогда в ~100 раз уменьшается шумовая составляющая ошибки *PR*, т. е. эта ошибка практически исключается из бюджета ошибок *PR* и, соответственно, *PVt*.

На рис. 6.7 приведены типовые графики измерений гринвичских координат антенны АСН, неподвижно установленной на поверхности Земли (в окрестности Москвы). Так как антенна находится в состоянии покоя, то графики должны соответствовать постоянным координатам X, Y, Z антенны. Однако они представляют собой три кривые с диапазоном отклонений от некоторого среднего значения ±10 м. Благодаря *hatch filter* на графиках отсутствует шумовая составляющая, как на рис. 6.7.

Приведенные графики получены при работе АСН в режиме без использования ионосферной и тропосферной коррекции ошибок псевдодальностей. Поэтому здесь хорошо видны моменты смены созвездий НС — при исчезновении или появлении нового НС происходит резкий скачок ошибок координат, обусловленный наличием у исчезнувшего или нового НС ионосферной и тропосферной ошибок. Для сравнения на рис. 6.8 приведены аналогичные графики при работе АСН в режиме ионосферной и тропосферной коррекции измерений. Из рисунка видно существенное снижение диапазона отклонения формируемых координат, не превышающего ±3 м, от их среднего значения, т. е. благодаря ионосферной и тропосферной коррекции обеспечивается существенное повышение точности *PVt*. При смене созвездий НС практически отсутствуют скачкообразные изменения формируемых координат. Это означает, что реализованные в АСН алгоритмы ионосферной и тропосферной коррекции измерений АСН с высокой точностью моделируют и компенсируют ионосферные и тропосферные погрешности измерений АСН. Благодаря этому точность *PVt* приемников GPS, работающих на Земле, сегодня составляет ±5 м.

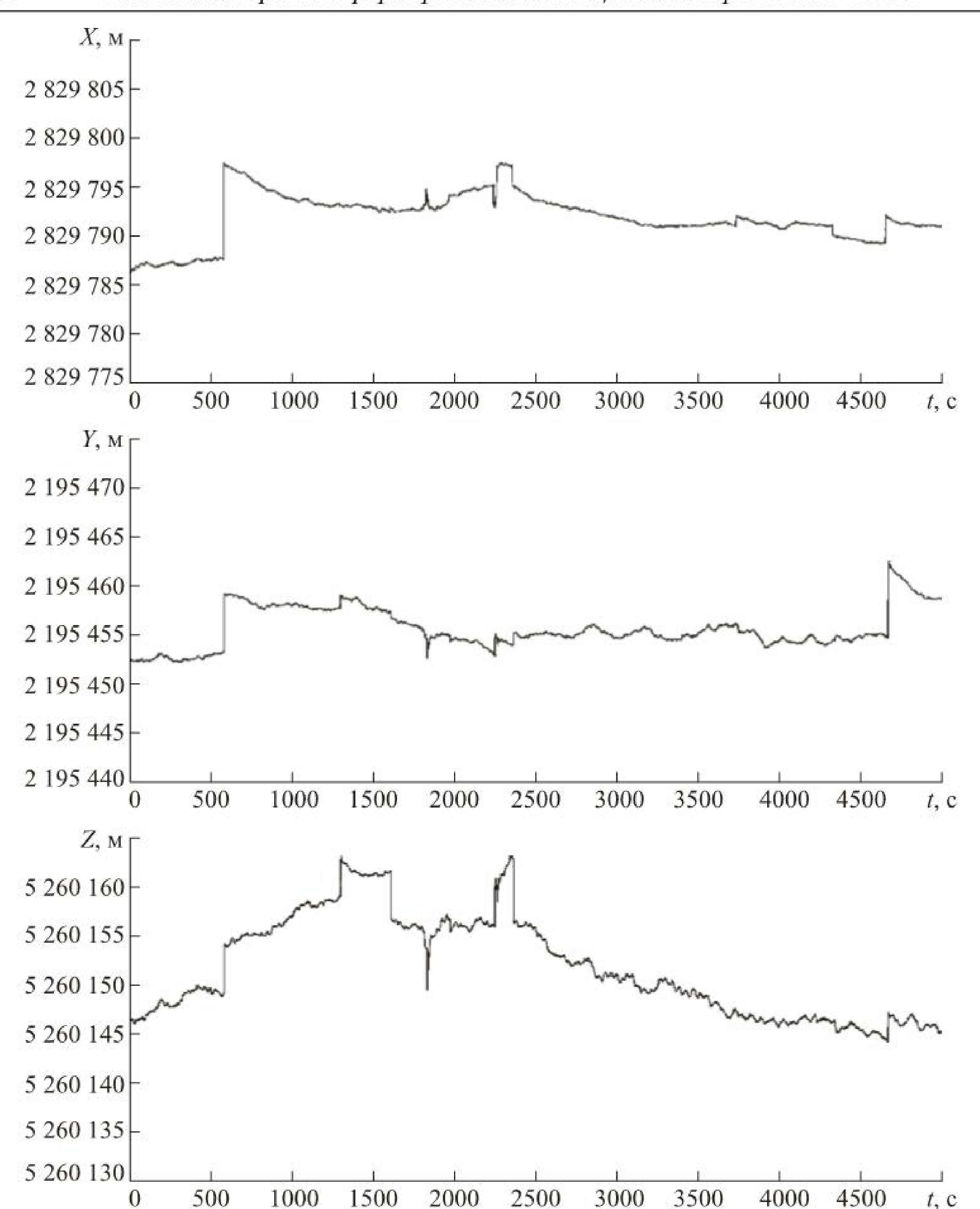


Рис. 6.7. Типовые графики измерений гринвичских координат антенны АСН, неподвижно установленной на поверхности Земли (в окрестности Москвы)

Однако для АСН, установленной на КА, рассмотренные модели ионосферной и тропосферной коррекции практически перестают соответствовать действительности, поэтому на КА, как правило, АСН работает без реализации режима ионосферной и тропосферной коррекции. И хотя на орбитах КА тропосферные погрешности отсутствуют, ионосферные ошибки достаточно велики и иногда достигают десятков метров (обычно для пригоризонтных НС).

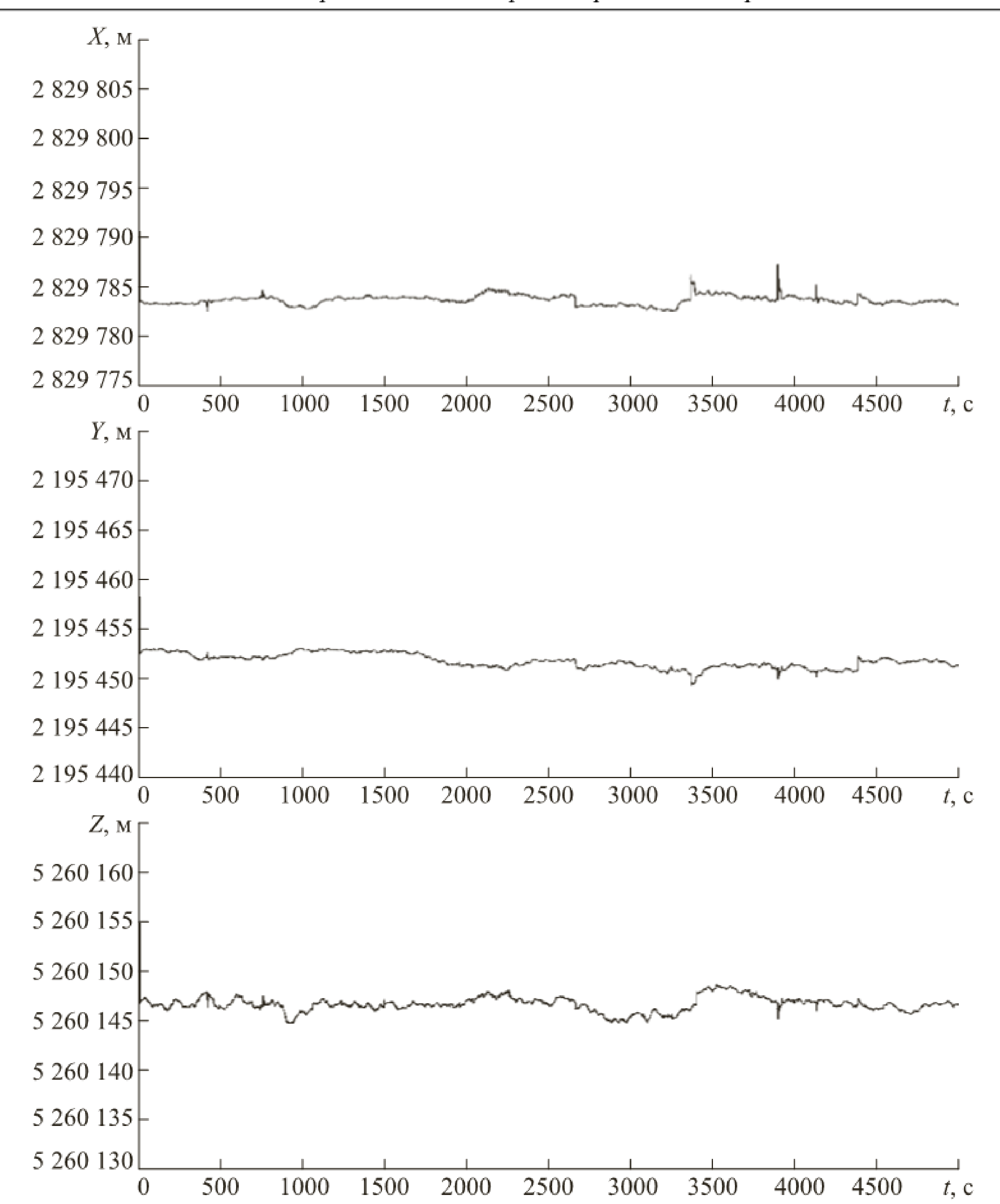


Рис. 6.8. Графики гринвичских координат неподвижной антенны при работе АСН в режиме ионосферной и тропосферной коррекции

Кроме ионосферных ошибок на КА имеют место ошибки, обусловленные переотражениями сигналов НС от элементов конструкции КА. Особенно эти ошибки характерны для крупногабаритных КА (например, МКС). Типовые графики ошибок *PVt* для МКС, полученные по результатам обработки реальных данных АСН-М МКС, приведены на рис. 6.9.

Графики ошибок ΔX, ΔY, ΔZ представляют собой разность относительно ОСК текущих измерений АСН-М и текущей оценки координат центра масс

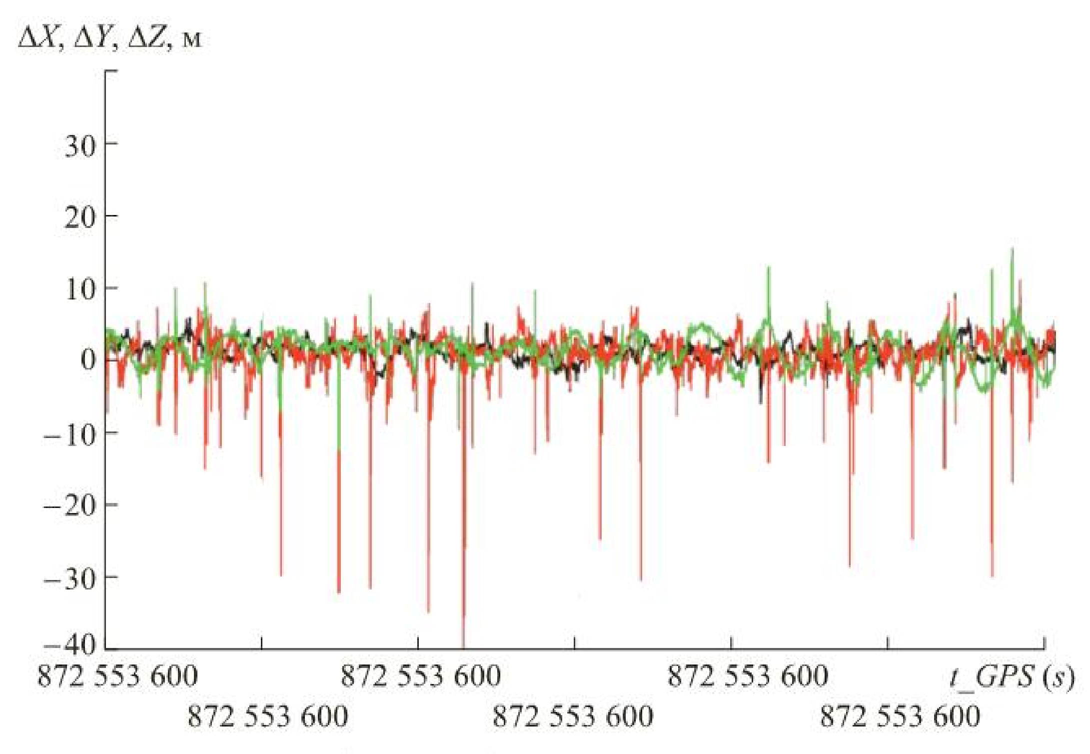


Рис. 6.9. Типовой график ошибок измерений координат АСН-М МКС

МКС, полученной по 5000 измерений *PVt*, предшествовавших текущему измерению. Расчетная точность сформированной орбиты центра масс МКС по координатам составляет ±5 м. На графиках наблюдаются всплески ошибок амплитудой до 40 м. Именно эти всплески представляют собой ошибки, обусловленные переотражениями сигналов от элементов конструкции КА. Для обозначения этих ошибок в мире установился общепринятый термин *multipath*, который в дальнейшем будет использоваться и в настоящей работе. Формируемые АСН *PVt* можно принимать за вектор состояния КА, точность которого составляет 20…40 м по положению и 3…5 см/с по скорости. Однако такая точность оказывается недостаточной для решения многих задач космической навигации. Необходимость повышения точности потребовала изменения идеологии построения АСН космического назначения по сравнению с идеологией построения традиционной АСН для наземного использования. Особенности АСН космического назначения рассматриваются в следующих главах настоящего курса лекций.

Контрольные вопросы

1. Каковы алгоритмы формирования вектора координат потребителя?
2. Каковы алгоритмы формирования вектора скорости потребителя?
3. Какие поправки к измеренным параметрам необходимо учитывать при формировании вектора координат потребителя?
4. Какие поправки к измеренным параметрам необходимо учитывать при формировании вектора скорости потребителя?
5. Каковы алгоритмы расчета поправки к часам НС в системе ГЛОНАСС?
6. Каковы алгоритмы расчета поправки к часам НС в системе GPS?

Глава 7

Формирование оценки орбиты низкоорбитальных космических аппаратов по измерениям координат аппаратуры спутниковой навигации

7.1. Общие сведения

По измерениям ГСНС принципиально может осуществляться навигация любых КА, находящихся в зоне действия ГСНС, т. е. аппаратура АСН способна принимать и обрабатывать сигналы НС. Область использования ГСНС определяется мощностью излучаемого НС сигнала и чувствительностью существующей аппаратуры потребителя. В настоящее время соотношение между мощностью излучаемого сигнала и чувствительностью такова, что навигация по измерениям ГСНС может выполняться для КА с орбитами до ~50 000 км. При этом измерения возможны только в том случае, если КА находится в области диаграммы направленности излучающей антенны НС. С учетом этого и согласно методам навигации по измерениям ГСНС, орбиты КА можно разделить на три класса:

– низкие орбиты (НО);

– высокоэллиптические орбиты (ВЭО);

– геостационарные (или высокие) орбиты (ГСО).

Для перечисленных трех классов орбит КА принципиальной является видимость НС антенной АСН, установленной на соответствующем КА. Типовые графики числа видимых НС для этих орбит приведены на рис. 7.1–7.3.

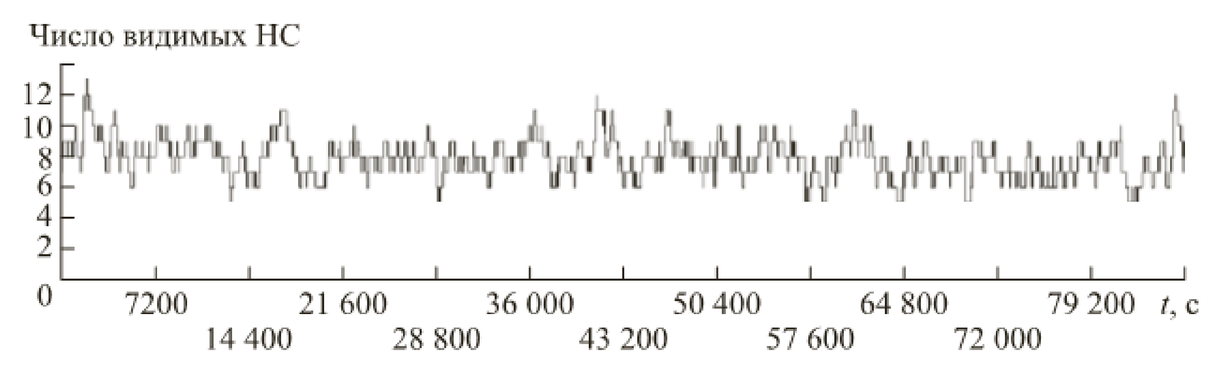


Рис. 7.1. Видимость прямых НС GPS на МКС

На рис. 7.1 на примере АСН-М МКС показана видимость НС для НО. Из графика видно, что число видимых спутников составляет 6–9 НС. Такое количество НС достаточно для формирования КСВ с достаточно высокой точностью: 20…30 м по положению и 5…15 см/с по скорости.

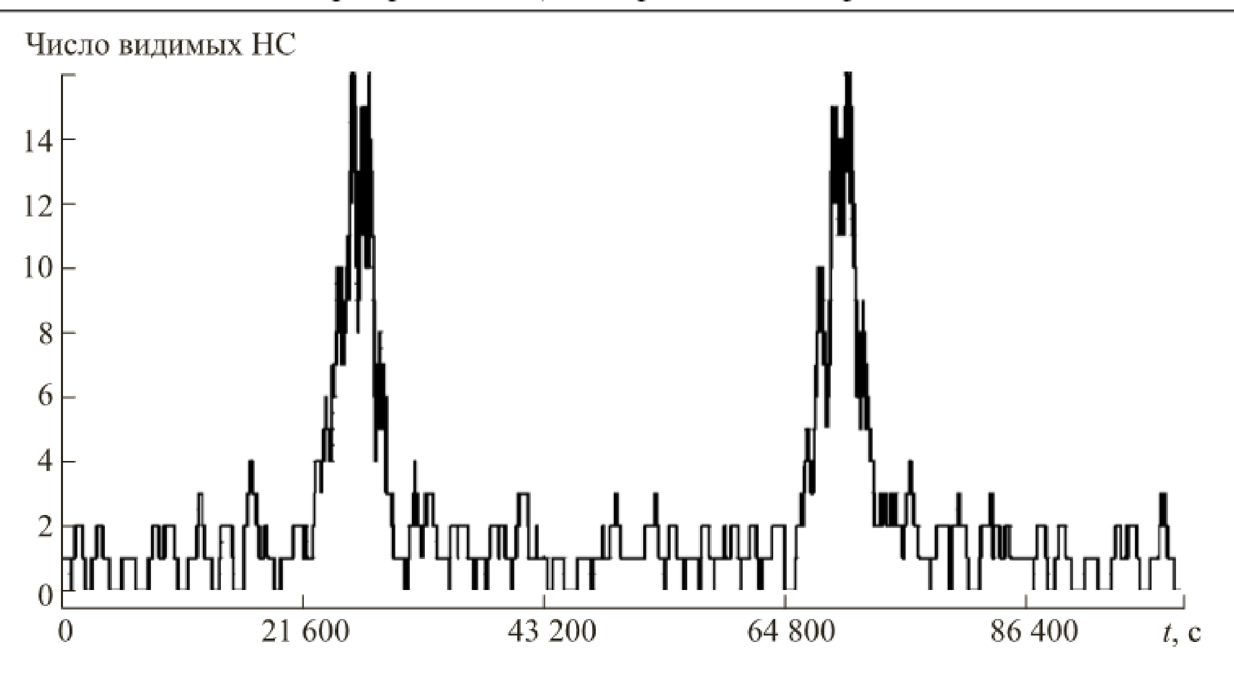


Рис. 7.2. Видимость прямых и обратных НС на ВЭО

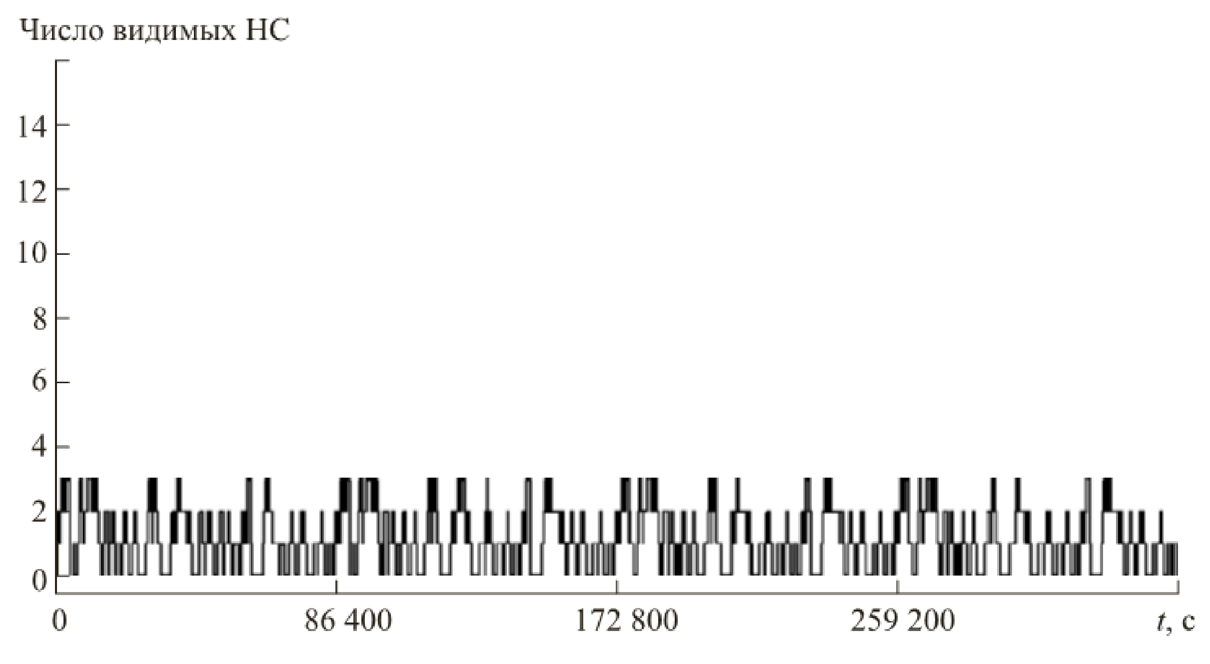


Рис. 7.3. Видимость обратных НС GPS для ГСО

Для ВЭО число НС в окрестности перигея также достаточно для формирования КСВ (см. рис. 7.2). Длительность участка орбиты с уровнем *GDOP* < 5 составляет примерно 20 мин при периоде орбиты 12 ч. На остальном участке орбиты АСН не может формировать КСВ.

Для ГСО число видимых спутников на всей орбите не превышает трех НС (см. рис. 7.3). Поэтому АСН вообще не может одномоментно формировать КСВ на ГСО. Навигация КА в таком случае должна выполняться по «сырым» измерениям АСН — по измерениям псевдодальностей и доплеровских сдвигов.

В первую очередь рассмотрим навигацию низкоорбитальных КА.

7.2. Обоснование необходимости вторичной обработки измерений АСН. Структура АСН космического назначения

Ранее было отмечено, что векторы координат $\bar{X}$ и скорости $\dot{\bar{X}}$, полученные на какой-либо момент времени, являются параметрами движения КА. По ним можно определить вектор состояния КА на любой момент времени. При этом следует отметить, что аппаратура спутниковой навигации КА определяет векторы $\bar{X}$ и $\dot{\bar{X}}$ в составе сообщения КСВ с достаточно высокой точностью: погрешность по положению составляет 20…30 м, по скорости 5…15 см/с. Такой точности бывает достаточно для решения многих задач КА. Поэтому первые образцы АСН, использовавшиеся на низкоорбитальных КА, в качестве формируемой оценки орбиты КА выдавали векторы $\bar{X}$ и $\dot{\bar{X}}$ из состава сообщения КСВ.

На рис. 7.4 показаны фото (рис. 7.4, *а*, *б*) и структурная схема (рис. 7.4, *в*) первой российской АСН (АСН-2401П разработки Российского института радионавигации и времени, Санкт-Петербург), работавшей 6 месяцев в космосе в составе КА «Союз-ТМ 28» и орбитальной станции «Мир» (1998–1999).

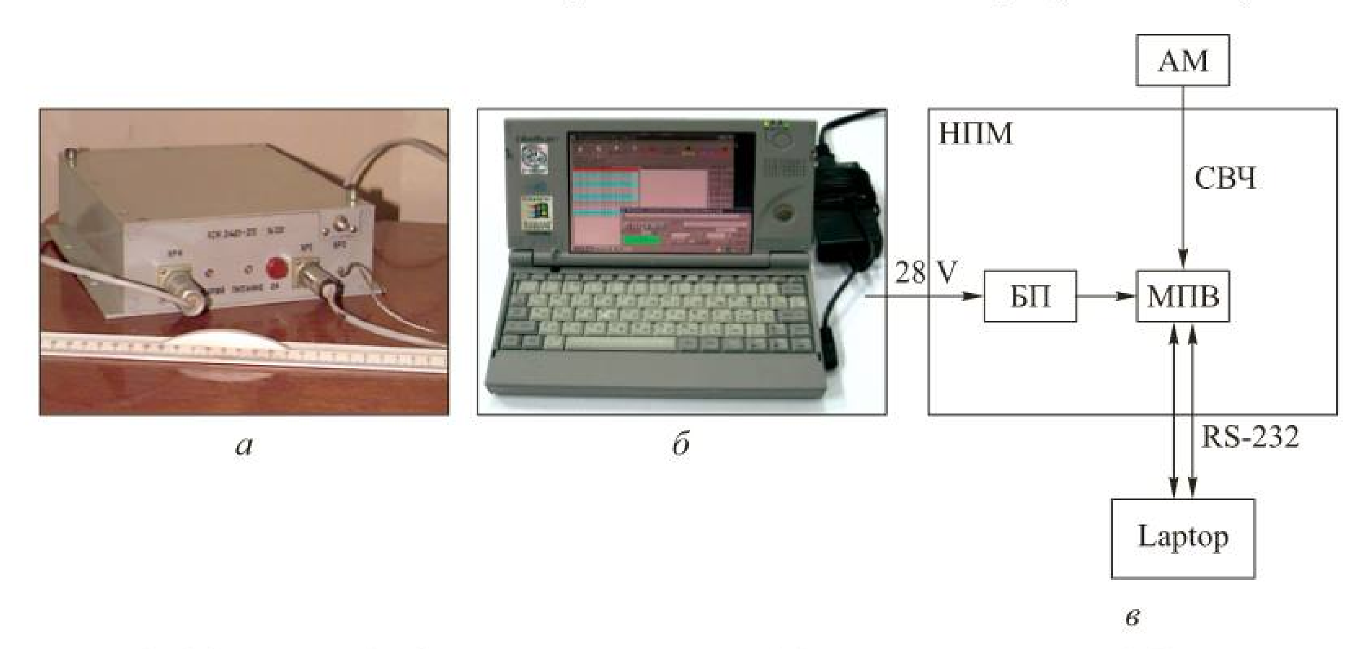


Рис. 7.4. Общий вид (*а*, *б*) и структурная схема (*в*) первой российской АСН

В состав навигационного приемного модуля (НПМ) АСН-2401П входил антенный модуль (АМ), модуль приемовычислительный (МПВ) и блок питания (БП). МПВ представлял собой навигационную плату-приемник АСН-22 с резервированным информационным интерфейсом *RS*-232, по которому формируемые в МПВ КСВ передавались в управляющий Laptop, где накапливались для последующего наземного анализа.

По результатам наземного анализа данных АСН был сделан вывод о необходимости выполнения вторичной обработки данных КСВ, обеспечива-

ющей непрерывное формирование высокоточной текущей орбиты КА. Необходимость выполнения дополнительной вторичной обработки данных КСВ обусловлена следующими факторами:

– наличием достаточно большого количества сбоев в данных;

– наличием эпизодических всплесков ошибок формируемых векторов $\bar{X}$ и $\dot{\bar{X}}$, обусловленных переотражениями сигналов НС от элементов конструкции КА;

– потерей навигационных решений при угловых маневрах КА;

– низкой точностью прогноза вектора состояния КА по измерениям КСВ.

Сказанное иллюстрируют рис. 7.5–7.8. На рис. 7.5 приведены графики сбоев КСВ (недостоверных данных), полученные в реальном полете АСН-М МКС и американского приемника GPS SIGI, установленного на американском сегменте МКС. Приведенные графики являются типичными для аппаратуры ГЛОНАСС или GPS, работающей на низкоорбитальных КА.

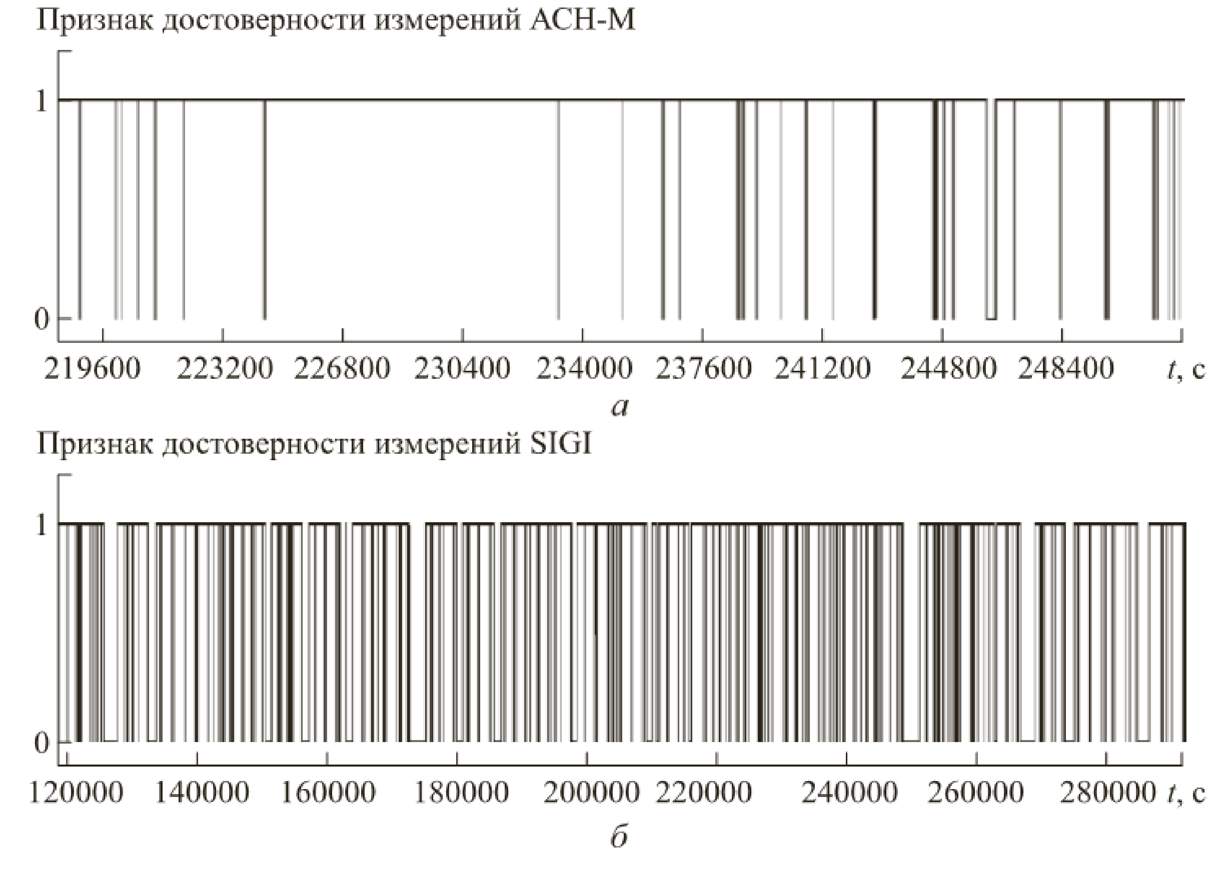


Рис. 7.5. Графики сбоев в измерениях КСВ при работе АСН-М (*а*) и приемника GPS SIGI (*б*)

На рис. 7.6 и 7.7 приведены графики ошибок измерений КСВ АСН-М МКС и GPS SIGI МКС, из которых видно (особенно по измерениям SIGI), что наблюдаются интервалы отсутствия измерений (видимо, отбраковка по уровню *GDOP*), а также достаточно большие всплески ошибок, обусловленных переотражениями сигналов НС от элементов конструкции МКС, достигающие по положению 100 м, по скорости 30 см/с. Наблюдаемое на графике

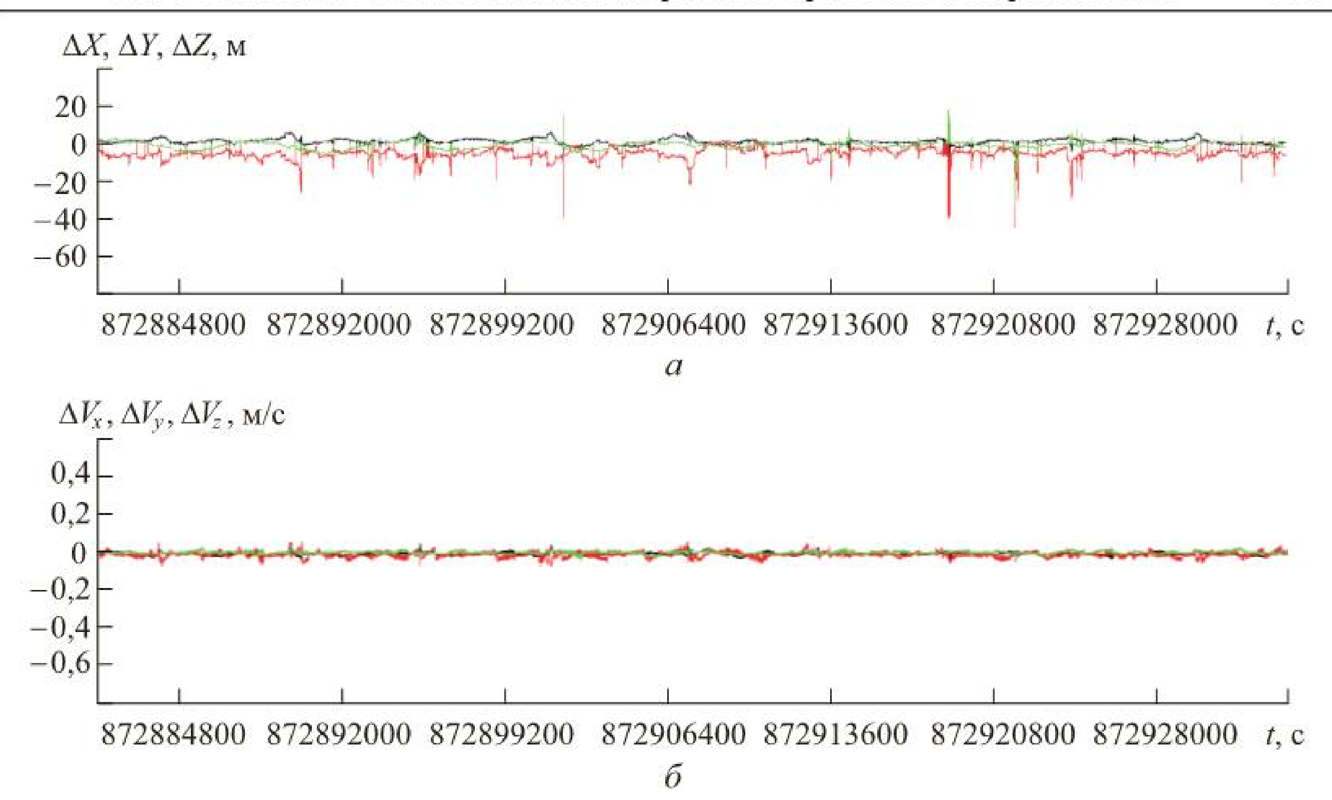


Рис. 7.6. Графики ошибок измерений КСВ АСН-М МКС по координатам (*а*) и по скорости (*б*)

ΔX, ΔY, ΔZ, м
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
872884800 872892000 872899200 872906400 872913600 872920800 872928000 t, с
а

ΔVx, ΔVy, ΔVz, м/с
0,4
0,2
0
−0,2
−0,4
−0,6
−0,8
−1,0
872884800 872892000 872899200 872906400 872913600 872920800 872928000 t, с
б

Рис. 7.7. Ошибки измерений КСВ американского приемника SIGI, установленного на МКС, по координатам (*а*) и по скорости (*б*)

постоянное смещение ошибки КСВ SIGI по продольной дальности (ΔX) обусловлено смещением антенны SIGI относительно антенны АСН по продольной дальности на 40 м.

На рис. 7.8 приведены графики ошибок прогноза орбиты МКС на три витка, выполненные по данным КСВ для двух случайно выбранных моментов времени, разнесенных на несколько секунд. Для сравнения на рис. 7.9 были показаны графики ошибок прогноза орбиты МКС на три витка, выполненного по оценке орбиты, полученной после вторичной обработки данных КСВ. Из графиков видно, что ошибки прогноза орбиты на три витка, выполненного по данным КСВ, составляет по положению 1…1,5 км, а прогноза, выполнен-

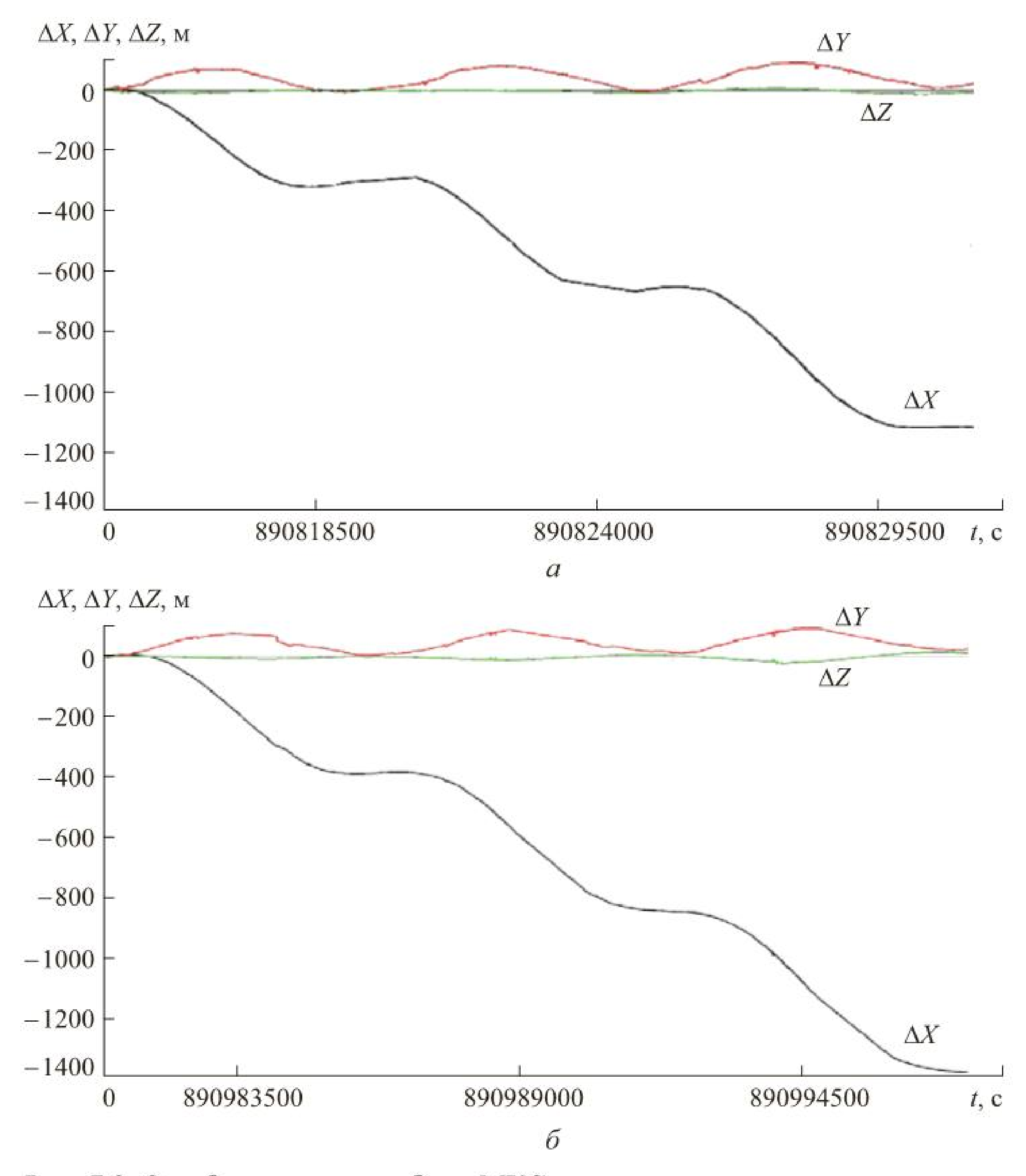


Рис. 7.8. Ошибки прогноза орбиты МКС на три витка, выполненные по данным КСВ

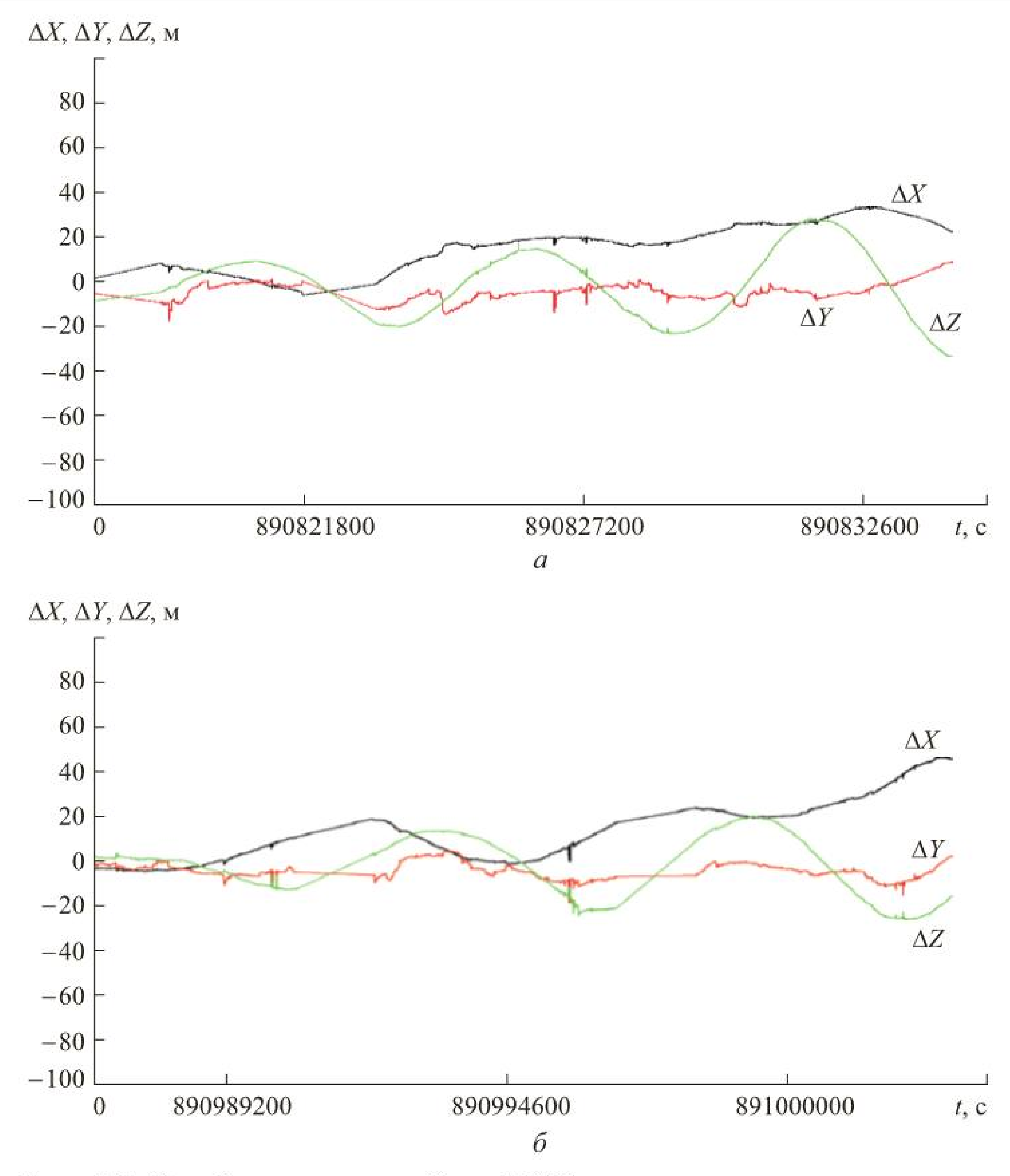


Рис. 7.9. Ошибки прогноза орбиты МКС на три витка, выполненные по оценке орбиты, полученной после вторичной обработки данных КСВ

ного по оценке орбиты, полученной после вторичной обработки данных КСВ, ~50 м, т. е. точность прогноза возрастает в десятки раз. Кроме того, оценка орбиты, полученная после вторичной обработки данных КСВ, непрерывна, не имеет ни сбоев, ни всплесков ошибок.

С учетом опыта работы с первыми навигационными приемниками, устанавливавшимися на КА, в РКК «Энергия» была разработана аппаратура АСН-М для МКС, обеспечивающая вторичную обработку данных КСВ. Внешний вид блоков этой аппаратуры, структура системы в целом и структура блоков приведены на рис. 7.10.

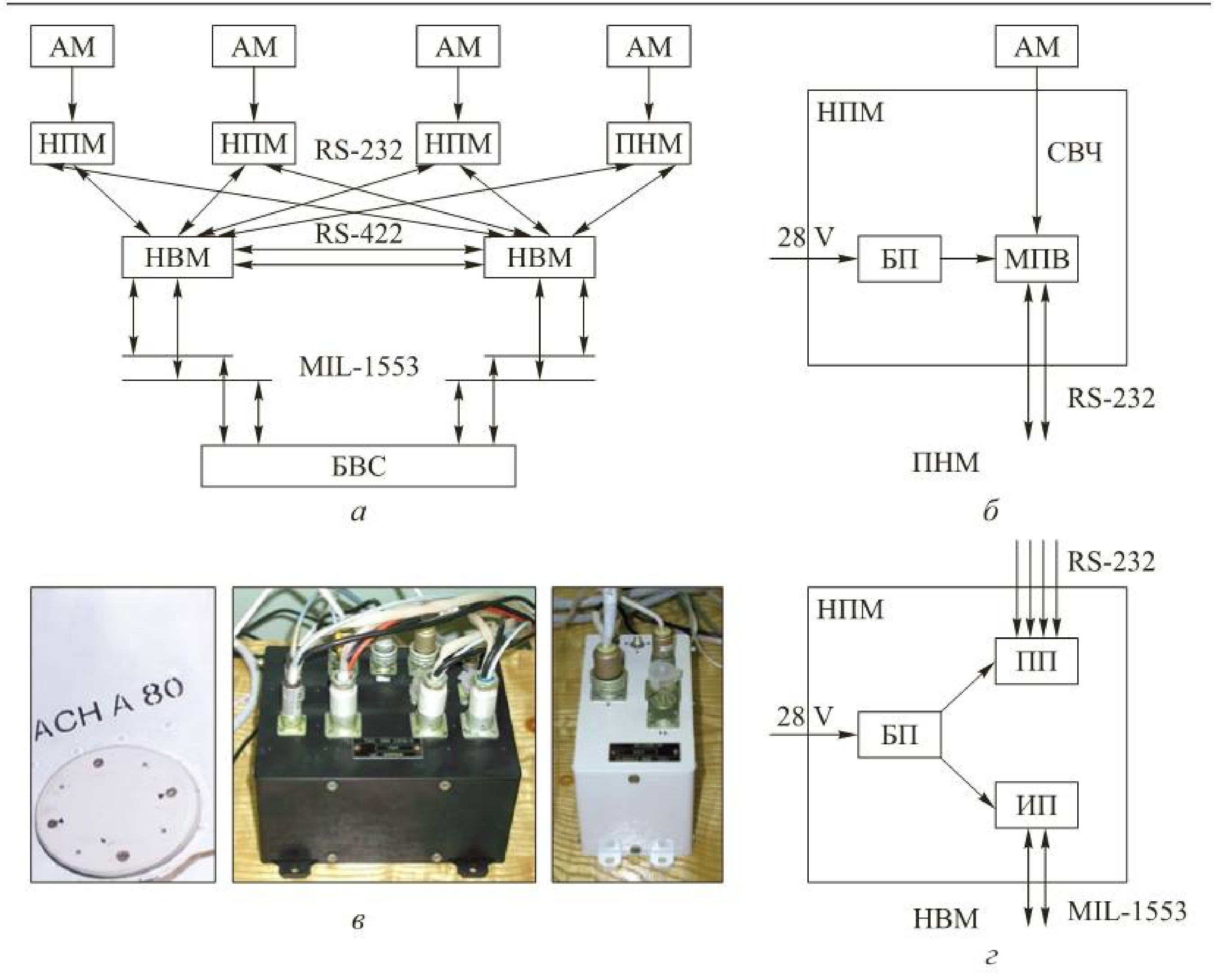


Рис. 7.10. Аппаратура АСН-М МКС:
а — структурная схема АСН-М; *б* — структурная схема НПМ; *в* — общий вид антенного блока (вес 0,4 кг, потребление 1 Вт), НПМ (вес 0,9 кг, потребление 5 Вт) и НВМ (вес 1,8 кг, потребление 15 Вт); *г* — структурная схема НВМ

Аппаратура АСН-М состоит из:
– четырех антенных модулей (АМ);
– четырех навигационных приемных модулей (НПМ);
– двух навигационных вычислительных модулей (НВМ);

Каждый НПМ включает плату-приемник МПВ с соответствующим блоком питания. МПВ формирует КСВ и имеет интерфейс *RS-232*.

Навигационно-вычислительный модуль предназначен для выполнения вторичной обработки данных НПМ и передачи формируемых данных в БВС по интерфейсу *MIL-1553*.

В АСН-М МКС вторичная обработка данных в основном заключалась в динамической фильтрации измерений $\bar{X}$ и $\dot{\bar{X}}$, содержащихся в сообщениях КСВ НПМ, и формировании высокоточной оценки орбиты.

Характерной особенностью АСН-М являлась ее модульная реализация. Каждый из модулей — АМ, НПМ, НВМ — был выполнен в виде отдельного прибора, который в случае отказа, благодаря наличию экипажа, мог легко

быть заменен на новый, доставленный с Земли прибор. Хотя такая компоновка системы с точки зрения ее массы не была оптимальной, однако на этапе освоения АСН космического назначения она себя оправдала. За 12 лет эксплуатации АСН-М имели место три отказа НВМ и пять отказов НПМ, которые, по-видимому, были связаны с воздействием на электронику радиации.

Внешние проявления отказов НВМ и НПМ были различны, но для каждого типа приборов — совершенно идентичны. Все три отказа НВМ начинались с возникновения неустойчивой работы системы, периодические пропадания и появления измерений. Неустойчивость работы усиливалась в течение 1–2 недель, после чего работа НВМ прекращалась. Интересны попытки проведения анализа причин отказов. Для этого приборы возвращали на Землю, однако на Земле все три прибора работали без замечаний. Визуальный контроль также не дал результатов. К сожалению, возвращенные приборы, повторно прошедшие весь цикл наземных испытаний, не удалось отправить вновь на МКС для дальнейших наблюдений за их работоспособностью. Таковы правила эксплуатации космической техники — отказавший прибор с неустановленной причиной отказа не допускается к лётной эксплуатации.

Все пять отказов НПМ были связаны с отказом программного обеспечения (ПО). После возвращения на Землю и переустановки ПО приборы работали без замечаний. Все они вновь были доставлены на МКС и проработали от трех до восьми лет до замены АСН на новую модификацию. Полученный опыт эксплуатации АСН показал, что архитектура системы должна быть спроектирована таким образом, чтобы в случае отказа ПО любого из модулей, его ПО могло быть переустановлено непосредственно в полете. Такой подход существенно повысил надежность последующих новых разработок АСН для КА, находящихся в условиях повышенной радиации.

Следует отметить также, что кроме отмеченных пяти отказов НПМ периодически раз в два-три месяца наблюдались отказы ПО НПМ другого типа, которым дали название «нефатальные» отказы. Они проявились в «зависании» ПО, но устранялись путем перезапуска питания аппаратуры (отказы, которые не устранялись путем переустановки ПО, назывались «фатальными» отказами ПО).

Аппаратура АСН-К была предназначена для решения задач временного обеспечения КА, навигации, ориентации, дальнего и ближнего сближения. В перспективе предполагается с помощью этой аппаратуры решать и задачи причаливания к станции вплоть до касания и выполнения стыковки.

На рис. 7.11 приведена структурная схема АСН-К, включающая:

устройство антенное (УА) — 4 шт.;

устройство усилительное (УУ) — 4 шт.;

делитель СВЧ-сигнала на 2 (ДС) — 4 шт.;

навигационный модуль (НМ) — 2 шт.

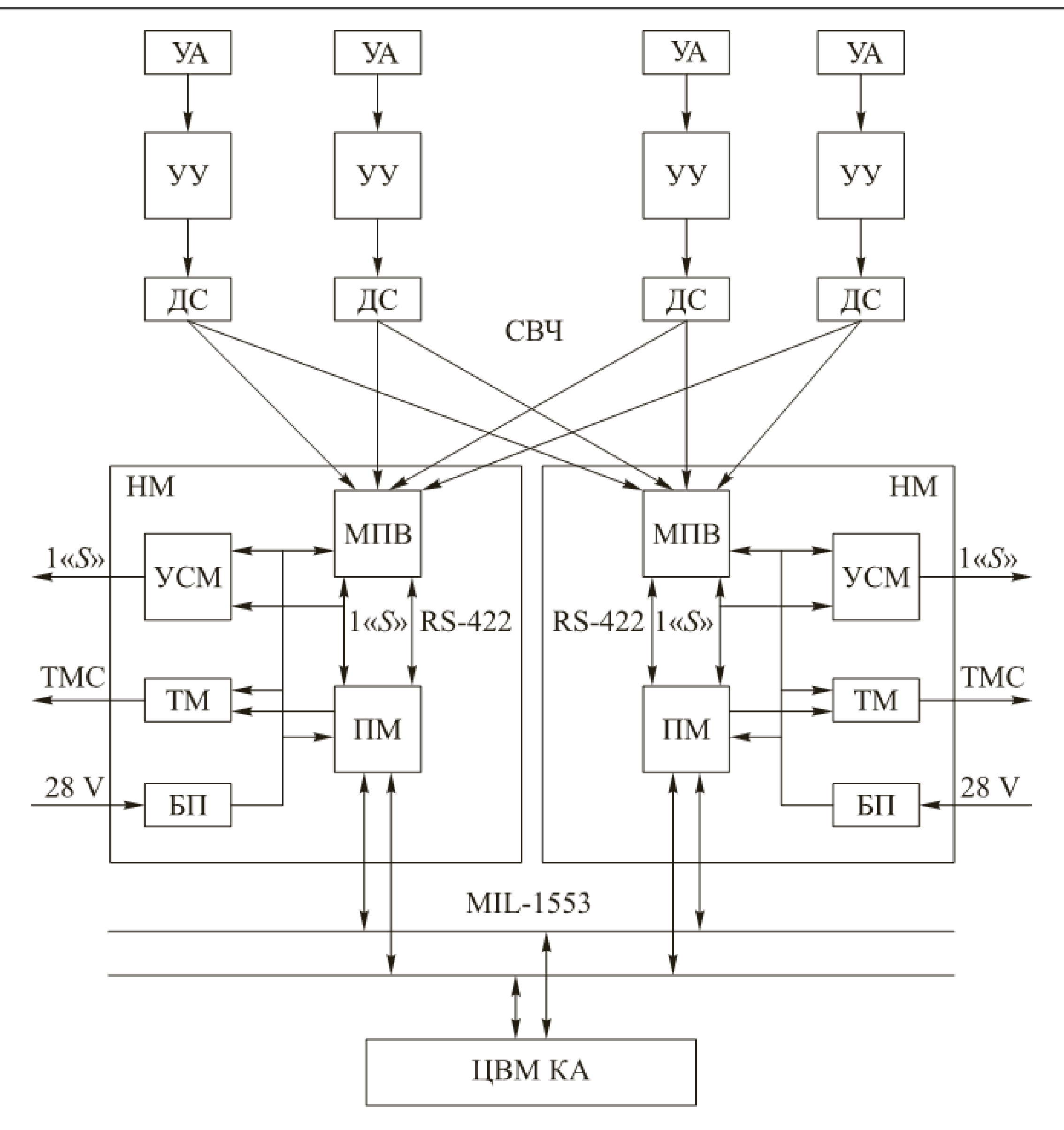


Рис. 7.11. Структурная схема АСН-К

Новая базовая модификация АСН-К была разработана для кораблей «Союз», «Прогресс» и для МКС. Первые ее лётные испытания проведены в 2014 г.

Четыре антенны (УА) АСН-К, разработанные в РКК «Энергия», установлены в определенных точках поверхности КА под определенными углами. Оси антенн образовывали своеобразный «ежик» в пространстве, благодаря чему при любой ориентации КА в поле зрения антенн попадало достаточное количество НС для решения задачи навигации и ориентации. На корабле «Прогресс М-25М» (рис. 7.12), стартовавшем 29 октября 2014 г., был проведен первый испытательный полет АСН-К.

На грузовом отсеке корабля отчетливо видны три антенны (под белыми радиопрозрачными кожухами). В первых испытательных полетах на грузовых кораблях устанавливались по три антенны. Затем при штатной эксплуатации на КА — четыре.

Четыре УУ (разработки ОАО «РИРВ», Санкт-Петербург) в АСН-К выполнены не встроенными в антенны, как в АСН-М, а в виде отдельных модулей,



Рис. 7.12. КА «Прогресс М-25М»

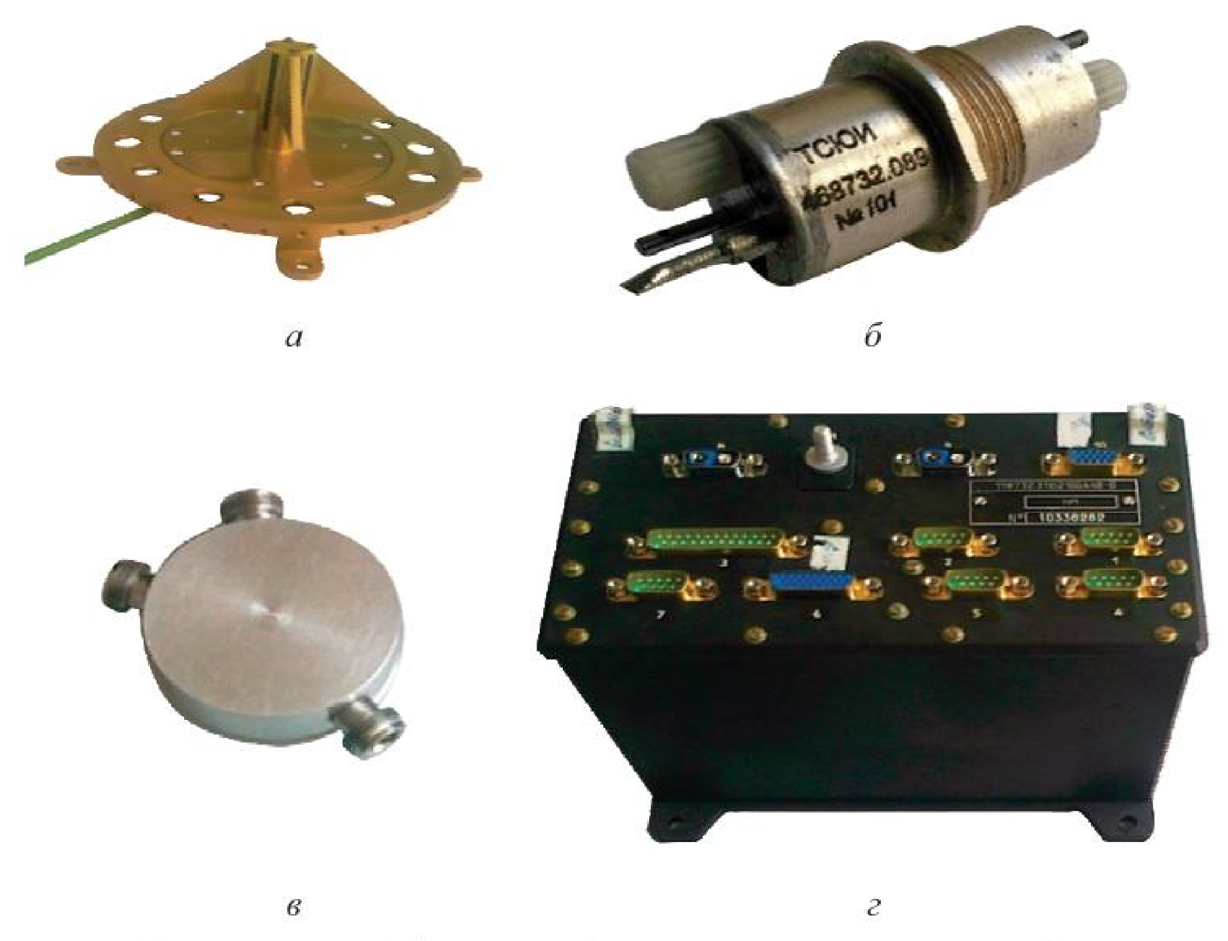


Рис. 7.13. Аппаратура АСН-К кораблей «Союз», «Прогресс», МКС:
а — антенна (УА) АСН-К (изготовитель — РКК «Энергия»); *б* — усилитель (УУ) АСН-К (изготовитель — ОАО «РИРВ»); *в* — делитель сигнала (ДС) АСН-К (изготовитель — РКК «Энергия»); *г* — навигационный модуль (НМ) АСН-К (изготовитель — РКК «Энергия»)

соединенных с УА СВЧ-кабелями. Такая конструкция обусловлена требованиями более жесткого рабочего температурного режима УУ по сравнению с УА. Благодаря наличию кабеля УУ может быть установлено под увеличенным слоем теплоизоляции. Питание УУ обеспечивается по центральной жиле СВЧ-кабеля от включенного НМ.

Делители сигналов (ДС) предназначены для деления СВЧ-сигнала каждой из антенн на два одинаковых сигнала, поступающих на соответствующие входы двух НМ.

Навигационные модули (НМ) предназначены для приема и обработки сигналов НС, поступающих в НМ от четырех УА на четыре антенных входа модуля первичной обработки сигналов — приемовычислительного модуля, который осуществляет прием кодовой информации от НС, проводит первичные измерения псевдодальностей и интегральных фаз НС и передает эту информацию по интерфейсу *RS-422* в модуль вторичной обработки информации — процессорный модуль (ПМ). ПМ через интерфейс *MIL-1553* осуществляет обмен информацией с ЦВМ КА. Второй комплект НМ предназначен для резервирования и может работать как в холодном, так и в горячем резерве.

На рис. 7.13 приведены фотографии УА, УУ, ДС и НМ АСН-К. УА и УУ устанавливаются на внешней поверхности КА под теплоизоляцией, ДС и НМ — на корабле «Прогресс» в грузовом отсеке, корабле «Союз» — в бытовом отсеке, на МКС — на служебном модуле «Звезда».

7.3. Динамическая фильтрация измерений АСН и ее алгоритмы

В космической навигации для повышения точности решения навигационной задачи широко используются статистические методы обработки навигационной информации. К таким методам относятся, например, метод максимума правдоподобия и метод наименьших квадратов. Основным недостатком этих методов является то, что они обрабатывают весь массив измеренных величин. Поскольку точность обработки возрастает с увеличением массива выборки, получение удовлетворительной точности связано, во-первых, с увеличением времени измерения и, следовательно, с увеличением объема требуемой памяти цифровых вычислительных машин. Очевидно, что для автономного решения такой задачи на борту КА, учитывая ограниченные возможности бортовых ЦВМ, эти методы неприменимы.

Одним из наиболее известных методов обработки навигационной информации, не имеющих указанных недостатков, является метод динамической фильтрации Р. Калмана, характеризуемый следующими особенностями:

– оценки проводятся последовательно по мере нарастания объема выборки измерений;

– при определении каждой последующей оценки используется предыдущая, т. е. реализуются итерационные методы обработки информации.

Однако для фильтра Калмана по мере увеличения числа измерений, начиная с некоторого измерения, ошибка формируемой оценки начинает монотонно возрастать. Это объясняется тем, что для необходимой точности моделирования движения КА существует оптимальный интервал измерений, обеспечивающий минимум ошибки оценки. Если интервал измерений начинает превышать оптимальное значение, то превалирующими составляющими формируемой оценки орбиты становятся ошибки, обусловленные ошибками модели движения КА, возрастающие с увеличением интервала измерений. Указанный недостаток фильтра Калмана существенно затрудняет его использование для непрерывной длительной фильтрации измерений АСН.

Для непрерывной динамической фильтрации измерений АСН в РКК «Энергия» был разработан метод динамической фильтрации, который условно можно назвать «Модифицированный итерационный метод наименьших квадратов с подвижным заданным интервалом осреднения измерений». Предложенный метод обеспечивает непрерывное формирование оценки орбиты в реальном времени по серии измерений, выполненных на заданном интервале времени T, предшествующем текущему моменту. Интервал времени осреднения измерений перемещается (относительно моментов измерений) вместе с текущим временем, и представляет собой постоянную времени данного фильтра, являющуюся его важной характеристикой. От выбора постоянной времени фильтра зависит точность формируемой оценки орбиты.

Предложенный фильтр в настоящее время реализован в АСН-М МКС. Точность формируемой фильтром оценки орбиты МКС по измерениям АСН-М составляет по положению 3...5 м. Такая точность, достигаемая по измерениям одночастотного приемника АСН, работающего в диапазоне $L1$, является уникальной для объектов такого класса, как МКС.

Рассмотрим алгоритмы формирования оценки орбиты предложенным методом динамической фильтрации.

Пусть в начальный момент измерений известно начальное приближение оценки вектора состояния $\bar{X}^*_0$, $\bar{V}^*_0$. Пусть также $i = 1, ..., n$ — моменты измерений. Для этих моментов времени известны значения вектора состояния $\bar{X}^*_{0i}$, $\bar{V}^*_{0i}$ и измеренные значения вектора положения $\bar{X}^*_{\text{и}i}$. Пусть $\bar{X}_i$, $\bar{V}_i$ — точные значения вектора состояния КА. Введем обозначения:

$\Delta\bar{X}_{\text{и}i} = \bar{X}_{\text{и}i} - \bar{X}^*_{0i}$ — вектор измерений АСН относительно известной оценки $\bar{X}^*_{0i}$;

$\Delta\bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}^*_{0i}$, $\Delta\bar{V}_i = \bar{V}_i - \bar{V}^*_{0i}$ — неизвестные ошибки вектора состояния КА относительно известной оценки $\bar{X}^*_{0i}$, $\bar{V}^*_{0i}$;

$\Delta\bar{\xi}_i = \begin{pmatrix} \Delta\bar{X}_i \\ \Delta\bar{V}_i \end{pmatrix}$ — расширенный вектор состояния КА, оценку которого требуется определить по серии из n измерений.

Тогда для серии измерений с точностью до ошибок измерений $\delta\Delta\bar{X}_{иi}$ можно записать систему уравнений

$$\begin{aligned} &\Delta\bar{X}_{и1} = A\Delta\bar{\xi}_1; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta\bar{X}_{иn} = A\Delta\bar{\xi}_n, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $A = (E_3 0_3)$ — матрица размером 3×6; E_3 — единичная матрица размером 3×3; 0_3 — нулевая матрица размером 3×3.

Пусть в результате динамической фильтрации требуется определить поправку к оценке вектора состояния $\Delta\bar{\xi}_n^*$ на момент n. Неизвестные векторы $\Delta\bar{\xi}_i$ связаны между собой соотношением

$$\Delta\bar{\xi}_j = B_{ij}\Delta\bar{\xi}_i, \quad (7.2)$$

где B_{ij} — известные матрицы преобразования ошибок вектора состояния, определяемые по формуле

$$B_{ij} = \frac{\partial\Delta\bar{\xi}_j}{\partial\Delta\bar{\xi}_i}. \quad (7.3)$$

Матрица B_{ij} для кеплеровой орбиты известна в явном виде. В общем случае для произвольной орбиты эта матрица рассчитывается численным путем: семикратным интегрированием уравнений движения КА от момента i до момента j с последовательным варьированием вектора $\Delta\bar{\xi}_i$. Такая процедура, например, реализована в АСН-М МКС.

Из равенства (7.2) получим

$$\Delta\bar{\xi}_i = B_{ij}^{-1}\Delta\bar{\xi}_j. \quad (7.4)$$

С учетом равенства (7.4) систему уравнений (7.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\Delta\bar{X}_{и1} = AB_{1n}^{-1}\Delta\bar{\xi}_n; \\ &\Delta\bar{X}_{и2} = AB_{2n}^{-1}\Delta\bar{\xi}_n; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta\bar{X}_{иn} = A\Delta\bar{\xi}_n. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Введем вектор и матрицу:

$$\bar{U}_{иn} = \begin{pmatrix} \Delta\bar{X}_{и1} \\ \vdots \\ \Delta\bar{X}_{иn} \end{pmatrix} \text{ — вектор размерностью } 3n; \quad (7.6)$$

$$B_n = \begin{pmatrix} AB_{1n}^{-1} \\ AB_{2n}^{-1} \\ \vdots \\ A \end{pmatrix} \text{ — матрица размером } 6\times 3n;$$

тогда уравнение (7.5) можно записать в виде

$$\bar{U}_{\text{и}n} = B_n \Delta\bar{\xi}_n. \tag{7.7}$$

Уравнения (7.7) — это система из $3n$ уравнений с неизвестным шестимерным вектором $\Delta\bar{\xi}_n$. Оптимальная с точки зрения минимизации модуля ошибки оценка вектора $\Delta\bar{\xi}_n$ определяется по формуле

$$\Delta\bar{\xi}_n^* = (B_n^{\mathrm{T}} B_n)^{-1} B_n^{\mathrm{T}} \bar{U}_{\text{и}n}. \tag{7.8}$$

Введем следующие обозначения:

$\bar{P}_n = B_n^{\mathrm{T}} \bar{U}_{\text{и}n}$ — вектор размерностью 6; (7.9)

$W_n = B_n^{\mathrm{T}} B_n$ — матрица размером 6×6.

В этом случае соотношение (7.8) примет вид

$$\Delta\bar{\xi}_n^* = W_n^{-1} \bar{P}_n. \tag{7.10}$$

Из соотношений (7.6) и (7.9) получим итерационный алгоритм формирования вектора $\bar{P}_n$ и матрицы W_n:

$$\begin{aligned} \bar{P}_n &= \sum_{i=1}^{n} B_{in}^{-1\,\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \Delta\bar{X}_{\text{и}i}; \\ W_n &= \sum_{i=1}^{n} B_{in}^{-1\,\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A B_{in}^{-1}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Учитывая, что $B_{i\,n+1} = B_{n\,n+1} B_{i\,n}$, из выражений (7.11) получим

$$\begin{aligned} \bar{P}_{n+1} &= B_{n\,n+1}^{-1\,\mathrm{T}} \bar{P}_n + A^{\mathrm{T}} \Delta\bar{X}_{u\,n+1}; \\ W_{n+1} &= B_{n\,n+1}^{-1\,\mathrm{T}} W_n B_{n\,n+1}^{-1} + A^{\mathrm{T}} A. \end{aligned} \tag{7.12}$$

В начальный момент (до первого измерения) накапливаемые вектор $\bar{P}$ и матрица W равны нулю. Далее на каждом шаге измерений определяется матрица $B_{i\,j+1}$ и по алгоритму (7.12) формируются $\bar{P}_{i+1}$ и W_{i+1}.

После проведения n измерений по формулам (7.12) и (7.10) определим поправку $\Delta\bar{\xi}_n^*$ к начальному приближению оценки орбиты $\bar{X}_{0n}^*, \bar{V}_{0n}^*, (\xi_{0n}^*)$, $\bar{V}_{0n}^*$ и сформируем текущую оценку орбиты:

$$\bar{\xi}_n^* = \bar{\xi}_{0n}^* + \Delta\bar{\xi}_n^*. \tag{7.13}$$

С переходом к текущей оценке накопленный вектор ошибок измерений $\bar{P}_n$ обнуляется. При последующих измерениях на каждом шаге осуществляется переход к текущей оценке вектора состояния. В этом случае реализуется следующий алгоритм формирования текущей оценки на $(n+1)$-м шаге.

На n-м шаге имеем:

– текущую оценку вектора состояния по серии из n измерений $\overline{\xi}_n^*$;

– накопленную матрицу измерений W_n.

Таким образом, на (n+1)-м шаге получено (n+1)-е измерение вектора координат КА $\overline{X}_{\text{и}\,n+1}$.

С помощью высокоточной модели движения КА осуществляется интегрирование уравнений движения от момента t_n до момента t_{n+1}. В результате формируется вектор оценки орбиты КА $\hat{\xi}_{n+1}^*$ на момент t_{n+1} по серии из n измерений. Рассчитывается матрица $B_{n\,n+1}$ путем семикратного интегрирования уравнений движения КА от момента t_n до момента t_{n+1} с последовательной вариацией начального вектора состояний $\overline{\xi}_n^*$. При выполнении этой серии интегрирования может использоваться приближенная модель движения КА, например, без учета аномальной части гравитационного поля Земли (с целью экономии вычислительных ресурсов БЦВМ). Формируются вектор $\overline{P}_{n+1}$ и матрица W_{n+1}:

$$\overline{P}_{n+1} = A^T(\overline{\xi}_{\text{и}\,n+1} - \hat{\xi}_{n+1}^*);$$
$$W_{n+1} = B_{n\,n+1}^{-1\,\text{T}} W_n B_{n\,n+1}^{-1} + A^{\text{T}} A, \tag{7.14}$$

а также поправка к вектору состояния $\hat{\xi}_{n+1}^*$ по (n+1)-му измерению

$$\Delta\xi_{n+1}^* = W_{n+1}^{-1}\overline{P}_{n+1}. \tag{7.15}$$

Затем формируется оценка вектора состояния по серии из n + 1 измерения

$$\overline{\xi}_{n+1}^* = \hat{\xi}_{n+1}^* + \Delta\overline{\xi}_{n+1}^*. \tag{7.16}$$

В приведенном алгоритме оценка вектора состояния $\overline{\xi}_n^*$ формируется по полной выборке из n измерений независимо от значения n. Чем больше n, тем меньше ошибки измерений $\Delta\overline{\xi}_n$ влияют на точность формируемого вектора состояния. Однако при этом возрастает влияние ошибок модели движения КА, которые в зависимости от точности модели, начиная с некоторого значения n, становятся определяющими в бюджете ошибок формируемого вектора состояния и могут существенно превосходить ошибки, обусловленные ошибками измерений. В зависимости от них и точности модели существует некоторое оптимальное значение n_0 числа выборки, обеспечивающее минимум ошибки формируемой оценки вектора состояния. Предположим, определен интервал времени T, для которого ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН, одного порядка с ошибками используемой модели движения КА. Тогда алгоритмы формирования оценки $\overline{\xi}_{n+1}^*$ (7.14)–(7.16) могут быть легко модифицированы таким образом, чтобы эта оценка форми-

ровалась в основном по серии последних измерений на интервале времени T. Для этого введем коэффициент λ:

$$\lambda = \frac{T}{T+1}. \tag{7.17}$$

Алгоритм формирования оценки $\overline{\xi}^*_{n+1}$ (7.14)–(7.16) представим в виде

$$\begin{aligned} &\overline{P}_{n+1} = A^{\mathrm{T}}(\overline{\xi}_{\text{и}n+1} - \hat{\xi}^*_{n+1}); \\ &W_{n+1} = \lambda^2 B^{-1\,\mathrm{T}}_{nn+1} W_n B^{-1}_{nn+1} + A^{\mathrm{T}} A; \\ &\Delta\overline{\xi}^*_{n+1} = W^{-1}_{n+1}\overline{P}_{n+1}; \\ &\overline{\xi}^*_{n+1} = \hat{\xi}^*_{n+1} + \Delta\overline{\xi}^*_{n+1}. \end{aligned} \tag{7.18}$$

В алгоритме (7.18) накапливаемая матрица W на каждом шаге уменьшается в λ^2 раз. Покажем, что введение коэффициента λ^2 в алгоритм накопления матрицы W преобразует исходную систему уравнений (7.1) к виду

$$\begin{aligned} &\lambda^n \Delta\overline{X}_{\text{и}1} = \lambda^n A\Delta\xi_1; \\ &\lambda^{n-1} \Delta\overline{X}_{\text{и}2} = \lambda^{n-1} A\Delta\xi_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\lambda\Delta\overline{X}_{\text{и}n-1} = \lambda A\Delta\xi_{n-1}; \\ &\Delta\overline{X}_{\text{и}n-1} = A\Delta\xi_n. \end{aligned} \tag{7.19}$$

В системе уравнений (7.19) все измерения учитываются с разным весом. Чем дальше отстоит измерение от текущего момента n, тем с меньшим весом это измерение учитывается в общей системе уравнений. Измерение, отстоящее от текущего момента на T с, учитывается с весом:

$$\left(\frac{T}{T+1}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{e}. \tag{7.20}$$

Соответственно, измерения, отстоящие от текущего момента на $2T$ с, учитываются с весом $\frac{1}{e^2}$ и т. д. Таким образом, коэффициент λ^2 в алгоритмах (7.18) обеспечивает «стирание» предыстории и учет для формирования оценки текущей орбиты КА, в основном измерений на интервале T, предшествующем текущему моменту. Выбор оптимального значения T является определяющим для обеспечения максимальной точности формируемой оценки орбиты. Оптимальное значение T зависит как от ошибок измерений АСН, так и от точности модели движения КА, используемой при динамической фильтрации измерений. Использование более точной модели движения позволяет увеличить постоянную времени фильтра T и тем самым уменьшить влияние ошибок измерений.

7.4. Зависимость ошибок формируемой оценки орбиты от различных возмущающих факторов

Ошибка оценки орбиты, формируемой фильтром, определяется ошибками измерений АСН, ошибками модели движения КА, реализуемой в фильтре, и постоянной времени фильтра. Ошибки измерений АСН в основном определяются системными ошибками спутниковых навигационных систем GPS, ГЛОНАСС и ошибками среды — ионосферными и ошибками, обусловленными переотражениями сигналов от элементов конструкции КА. Их уменьшения можно достичь заданием определенных режимов и параметров АСН, например, задав режим работы одновременно по спутникам GPS и ГЛОНАСС.

Снижение переотражений сигналов от элементов конструкции КА может быть обеспечено заданием определенной конфигурации КА. Например, при сближении ATV с МКС солнечные батареи и радиаторы системы терморегулирования МКС устанавливались в специальное положение. Тем не менее после реализации всех возможных мероприятий по снижению ошибок измерений определенные ошибки все-таки остаются.

Точность модели движения КА достигается как методом моделирования, определяющим методические ошибки модели, так и возможностями бортового вычислителя, реализующего эти модели. Выбор постоянной времени фильтра осуществляется в процессе отработки системы из условия минимизации суммарной ошибки оценки орбиты, обусловленной всеми перечисленными возмущениями. В процессе выполнения данной работы такое исследование было проведено на специальном математическом стенде, обеспечивающем возможность моделирования движения КА различного назначения с установленной на нем АСН. Основным элементом этого стенда является программный пакет MODASN, моделирующий системы GPS и ГЛОНАСС, работу аппаратуры АСН с учетом влияния внешний среды, линейное и угловое движение МКС. Этот программный пакет разработан РКК «Энергия» совместно с Европейским космическим агентством (ЕКА) для наземной отработки системы сближения европейского КА ATV с МКС. Эта модель с высокой точностью отражает многочисленные детали работы АСН, включая влияние на формируемые параметры затенений и переотражений сигналов НС от элементов конструкции МКС. О сложности этой модели говорит тот факт, что ее входной-выходной интерфейс включает в себя более миллиона различных параметров. Модель тщательно верифицировалась РКК «Энергия» и ЕКА, проводились специальные верификационные эксперименты на МКС, показавшие соответствие моделируемых результатов реальным лётным данным. Приведем результаты выполненного исследования.

7.4.1. Зависимости точности формируемой оценки орбиты от ошибок измерений

Графики модуля составляющей ошибок оценки орбиты $\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\right)$, обусловленной ошибками измерений АСН для трех значений постоянной времени фильтра $T = 0{,}5T_0$, $T = T_0$, $T = 2T_0$, где $T_0 = 5500$ с — период орбиты МКС, представлены на рис. 7.14.

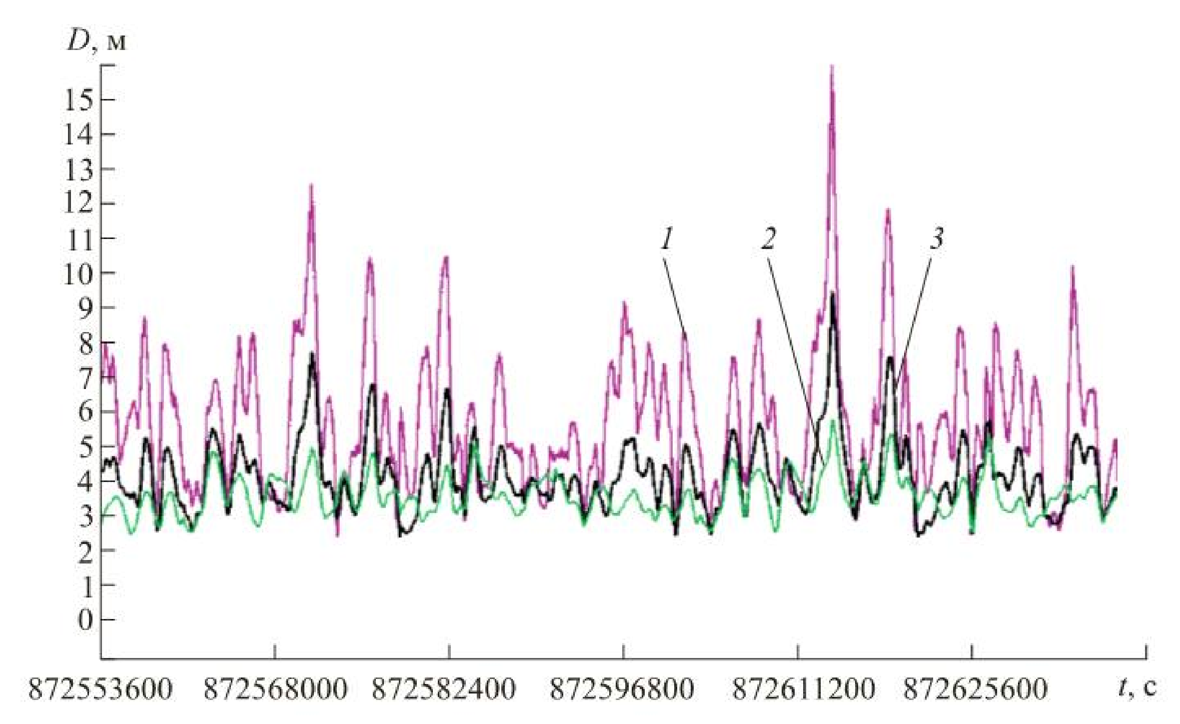


Рис. 7.14. Графики модуля составляющей ошибок оценки орбиты, обусловленной ошибками измерений АСН для разных значений постоянной времени фильтра:
1 — $T = T_0/2$; *2* — $T = 2T_0$; *3* — $T = T_0$

В процессе моделирования рассматривалась суточная орбита МКС от 31 августа 2007 г., режим работы АСН задавался только по спутникам GPS, моделируемая ориентация соответствовала реальной ориентации МКС на указанный интервал времени, моделируемый альманах GPS соответствовал реальному альманаху. В процессе моделирования бортовая модель движения КА фильтра полностью совпадает с моделью движения КА. Из приведенных графиков видно, что для постоянной времени фильтра $T = 0{,}5T_0$ ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН, составляют в основном 5...10 м, для $T = T_0$ — 3...6 м, для $T = 2T_0$ — 2…4 м. Незначительная разность по точности формируемых оценок орбиты для постоянной времени $T = T_0$ и $T = 2T_0$, при этом более быстрая сходимость фильтра при $T = T_0$ и слабая зависимость точности формируемой оценки от ошибок модели движения КА, позволили сделать выбор в пользу постоянной времени фильтра, равной одному периоду. Поэтому представленное ниже исследование зависимости точности формируемой фильтром оценки орбиты от ошибок модели движения КА выполняется для фильтра с постоянной времени $T = T_0 = 5500$ с.

7.4.2. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок модели гравитационного поля Земли

Основное влияние на точность оценки орбиты, формируемой рассмотренным ранее фильтром, оказывают ошибки модели гравитационного поля Земли. Модель гравитационного поля Земли высокого порядка требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому в бортовых вычислительных системах, имеющих не очень большую производительность по сравнению с наземными вычислительными средствами, ограничиваются моделированием гравитационного поля Земли невысокого порядка. Например, в бортовой вычислительной системе МКС моделируется гравитационное поле Земли порядка 8×8. Точность такой модели оказывается недостаточной для достижения высокой точности оценки орбиты. На рис. 7.15 приведен график ошибок оценки орбиты, формируемой рассмотренным выше фильтром для модели порядка 8×8 с постоянной времени $T = 1$ витку, обусловленных ошибками модели. Ошибки приведены в проекциях на оси орбитальной системы координат (ΔX — по вектору скорости, ΔY — по местной вертикали). При моделировании в качестве «идеальной» модели гравитационного поля принималась модель порядка 144×144. Предполагалось, что ошибки измерений АСН равны нулю, и какие-либо другие возмущения модели движения КА также отсутствуют.

Из графиков видно, что при использовании модели гравитационного поля Земли порядка 8×8 ошибки оценки орбиты, формируемой рассмотренным фильтром, составляют 40…50 м, т. е. значительно превышают ошибки измерений.

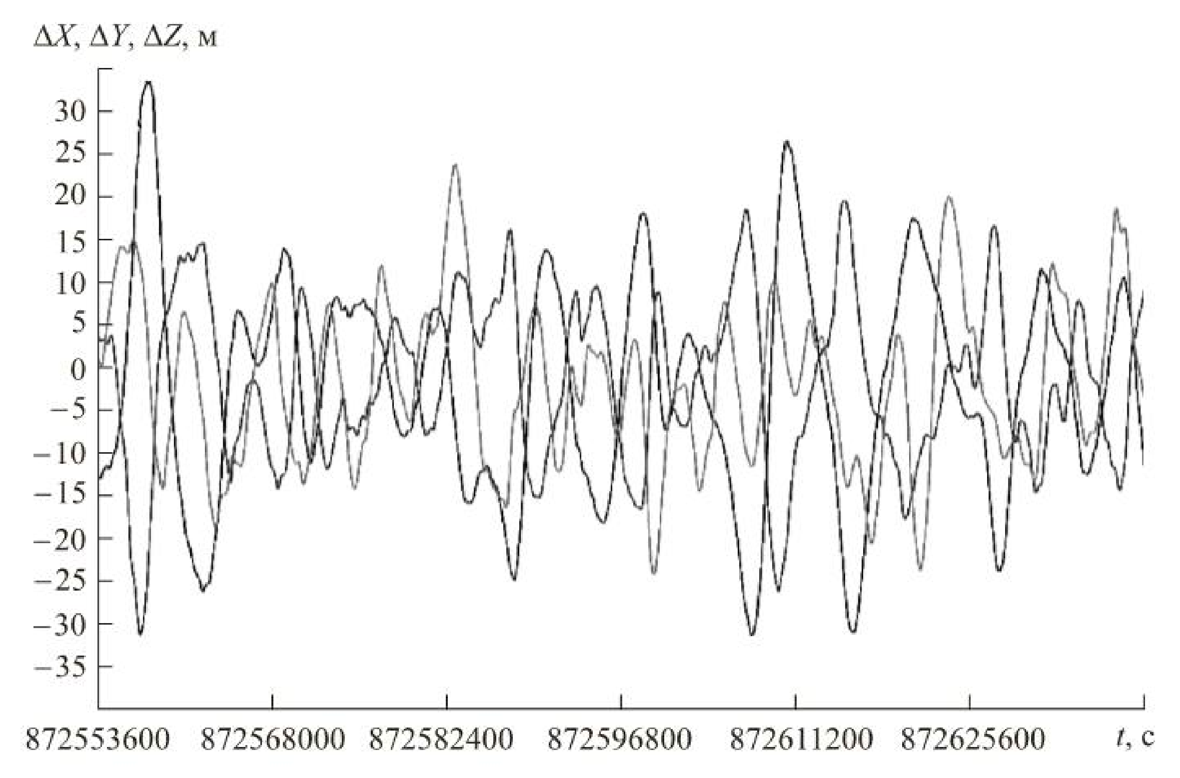


Рис. 7.15. Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 8×8

Для исследования влияния точности модели гравитационного поля Земли на точность формируемой оценки орбиты аналогичное моделирование было проведено для моделей порядка 36×36 и 72×72. Результаты моделирования приведены на рис. 7.16, 7.17.

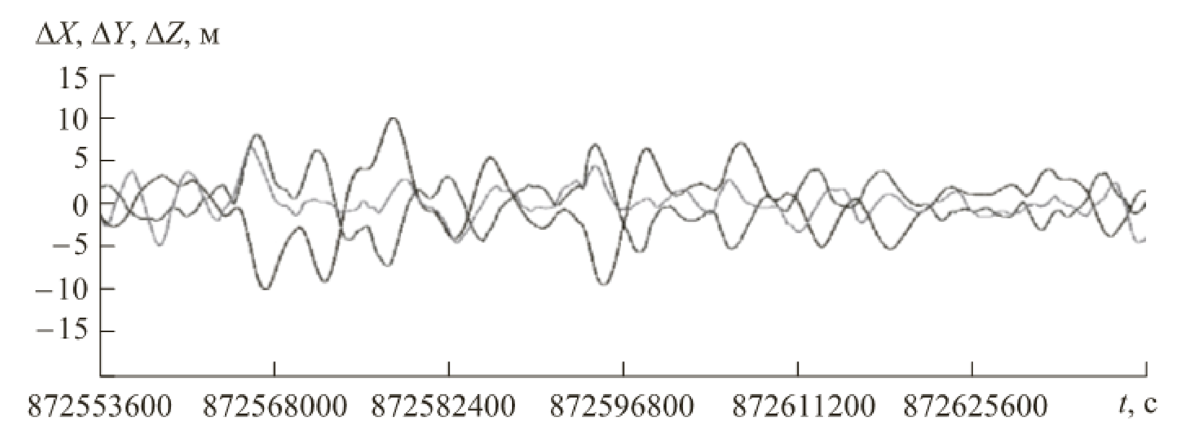


Рис 7.16. Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленной ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 36×36

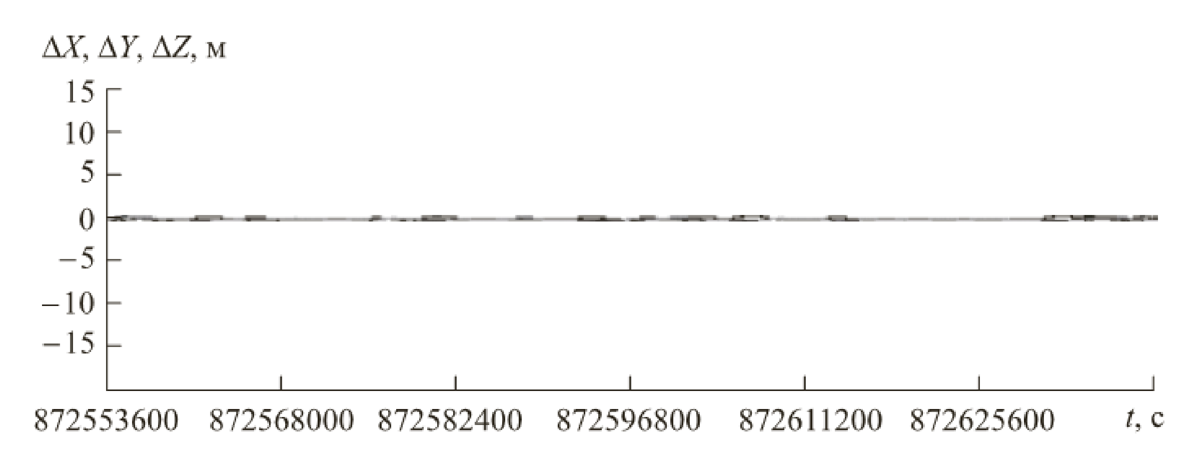


Рис. 7.17. Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленной ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 72×72

Очевидно, что для модели порядка 36×36 ошибки оценки орбиты достигают 10 м, а для модели 72×72 — не превышают 2 м.

Из рис. 7.15 и 7.16, следует, что ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками моделей гравитационного поля Земли порядка 8×8 и 36×36, значительно превышают оценки, обусловленные ошибками измерений АСН. Для достижения точности формируемой оценки орбиты до метра требуется в бортовой модели движения КА использовать модель гравитационного поля Земли порядка не ниже 72×72. Однако реализация такой модели классическим методом разложения геопотенциала Земли по сферическим функциям требует в ~200 раз больше вычислительных операций, чем реализация модели порядка 8×8, что в настоящее время для бортовой вычислительной техники невыполнимо. Тем не менее в РКК «Энергия» разработан метод моделирования гравитационного поля Земли высокого порядка, требующий для своей реализации в сотни раз меньше вычислительных операций по сравнению с классическим. Этот метод в настоящее время реализован в АСН-М МКС.

7.4.3. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от аэродинамического торможения КА

Второй по силе влияния на точность формируемой оценки орбиты составляющей бортовой модели низкоорбитального КА является аэродинамическое торможение. Особенно заметно оно сказывается на КА с высотой орбиты в диапазоне 200...500 км. Для МКС среднее аэродинамическое торможение за виток находится в диапазоне $0{,}5\cdot10^{-6}...1{,}5\cdot10^{-6}$ м/с^2. При этом на солнечной стороне орбиты оно в ~1,5 раза больше среднего, а в тени — в ~1,5 раза меньше. В моделирующем стенде аэродинамическое торможение формируется по формуле

$$\bar{a}_{aero} = -\bar{V}_{\text{гр}}\left|\bar{V}_{\text{гр}}\right| b\frac{\rho}{2}, \tag{7.21}$$

где $\bar{V}_{\text{гр}}$ — вектор скорости КА в ГСК; $b = c_x S_{\text{м}}/m$ — баллистический коэффициент; c_x — коэффициент аэродинамического торможения; $S_{\text{м}}$ — площадь миделевого сечения КА; ρ — плотность атмосферы в рассматриваемой точке орбиты.

Плотность атмосферы ρ формируется в соответствии с моделью, разработанной в РКК «Энергия». Индексы солнечной активности и баллистический коэффициент закладываются во входном файле. Результаты исследования влияния аэродинамического торможения на точность формируемой оценки орбиты приведены на рис. 7.18. Из рисунка следует, что аэродинамическое торможение приводит к статическому смещению оценки орбиты по продольной дальности на ~20 м и по высоте на ~15 м. По боковой дальности ошибки равны нулю. Колебания плотности атмосферы на светлой и затененной частях орбиты приводят к колебаниям ошибок по продольной дальности ΔX и по вертикали ΔY с орбитальной частотой и амплитудой 1,5…2 м.

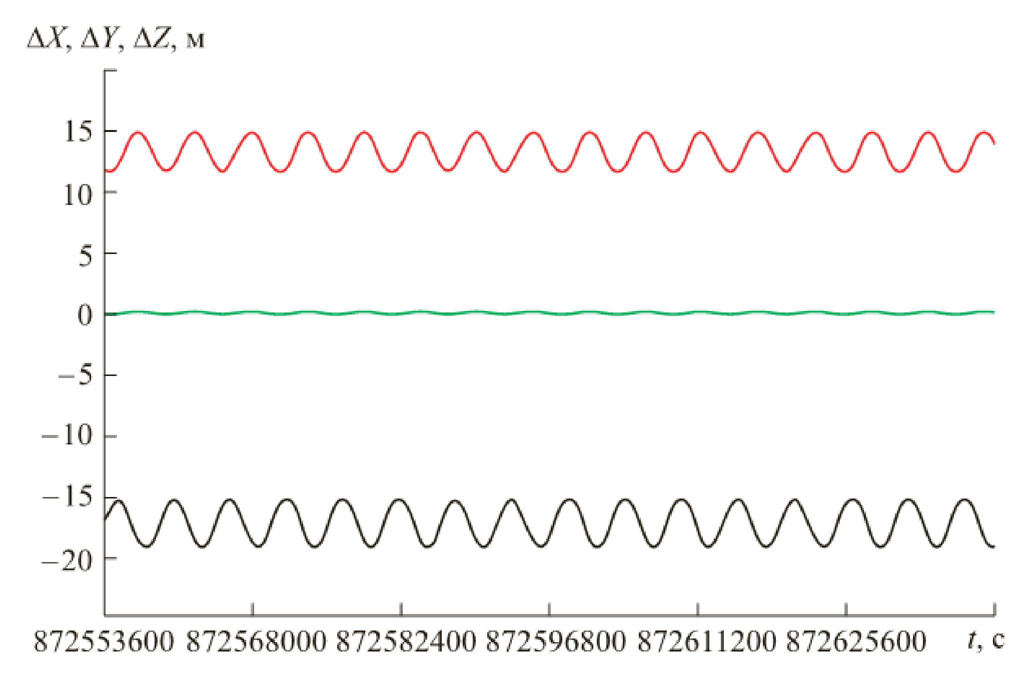


Рис. 7.18. Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная аэродинамическим торможением МКС в атмосфере Земли

Полученный результат показывает, что для обеспечения метровых точностей формируемой оценки орбиты бортовая модель движения КА должна включать модель аэродинамического торможения КА.

7.4.4. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от гравитационного воздействия Луны и Солнца и солнечного давления

Следующими по значимости возмущениями модели движения КА, влияющими на точность формируемой оценки орбиты КА, являются гравитационные воздействия Луны и Солнца на орбиту КА и силы солнечного давления. На рис. 7.19 и 7.20 приведены графики модулей ошибок формируемой

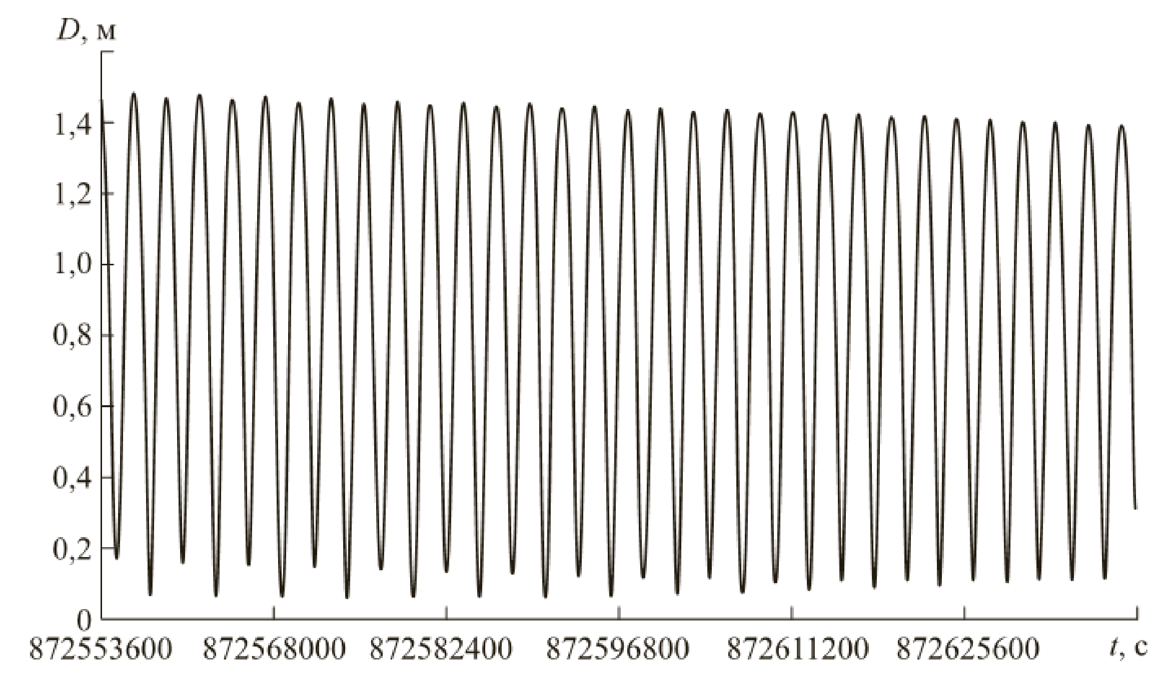


Рис. 7.19. Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная гравитационным воздействием Луны и Солнца на орбиту МКС

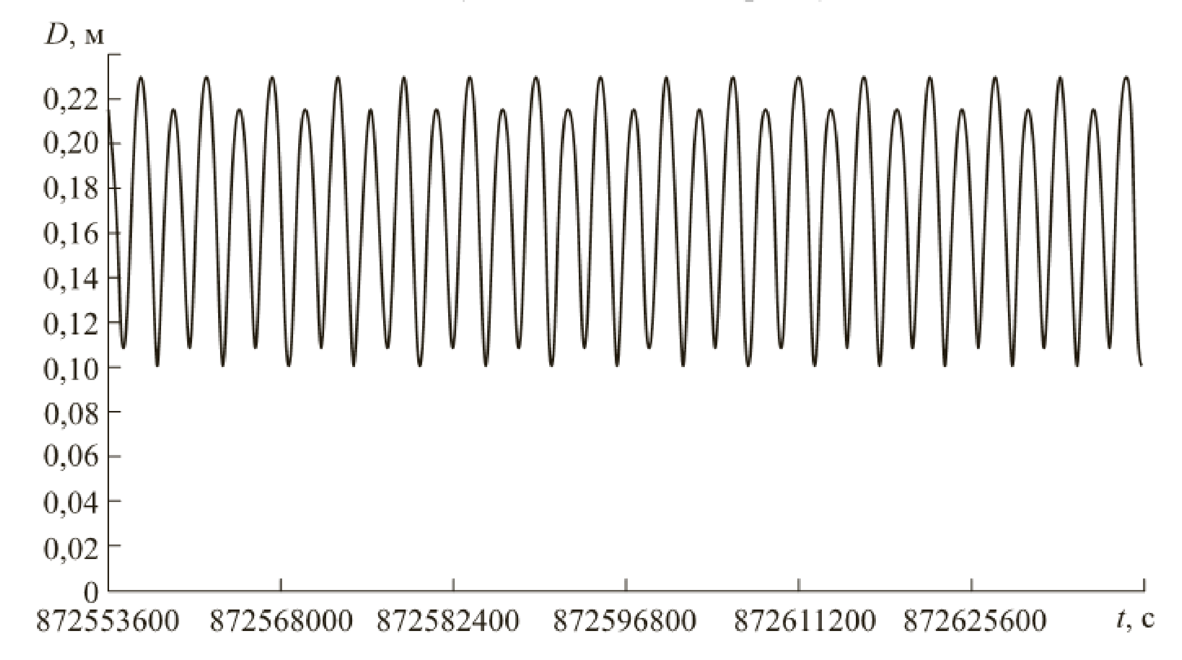


Рис. 7.20. Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная влиянием сил солнечного давления на МКС

фильтром оценки орбиты для МКС, обусловленных возмущениями от Луны и Солнца. Из приведенных графиков следует, что ошибки оценки орбиты, обусловленные воздействием Луны и Солнца, не превышают 1,5 м, а силами солнечного давления — 0,3 м.

Можно сказать, что для низкоорбитальных КА при точности оценки орбиты, которая должна составлять ~5 м, этими возмущениями в бортовой модели движения КА можно пренебречь.

7.4.5. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от параметров вращения Земли

На орбиту КА в ГСК существенное влияние оказывают параметры вращения Земли. На низкие орбиты заметно влияют смещение полюса Земли относительно оси Z ГСК (рис. 7.21), а также прецессия и нутация оси вращения Земли в ИСК (рис. 7.22). Из приведенных графиков следует, что ошибки оценки орбиты, обусловленные смещением полюса Земли для низкоорби-

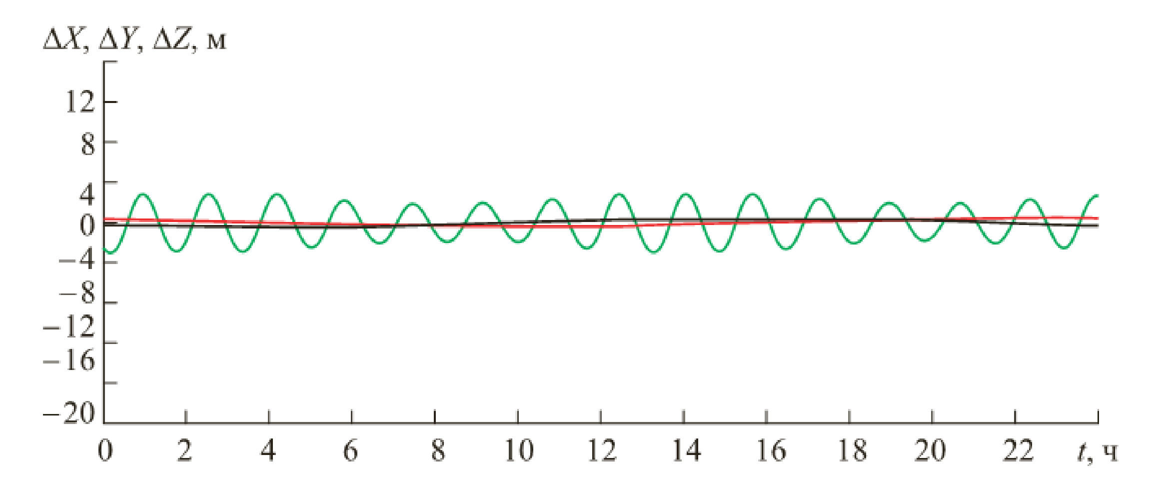


Рис. 7.21. Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная влиянием смещения полюса Земли относительно оси Z ГСК

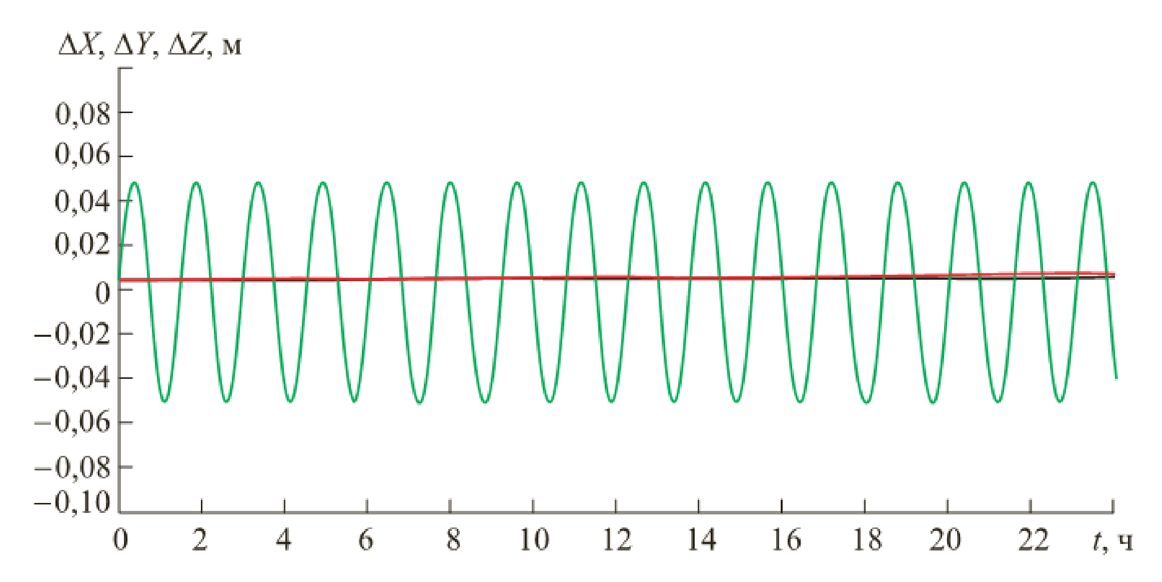


Рис. 7.22. Составляющая ошибки оценки орбиты, обусловленная влиянием прецессии и нутации оси вращения Земли в ИСК

тальных КА (при постоянной времени фильтра $T = 1$ витку) составляют ~3 м, что соизмеримо с ошибками, обусловленными гравитационным влиянием Луны и Солнца (см. рис. 7.19). Ошибки, обусловленные прецессией и нутацией оси вращения Земли на порядок меньше и составляют ~5 см, что соизмеримо, например, с влиянием сил солнечного давления на оценку орбиты МКС (см. рис. 7.20).

7.5. Динамическая фильтрация измерений АСН с самонастройкой на текущее аэродинамическое торможение

Ранее было показано влияние ошибок измерений АСН и различных факторов, возмущающих движение КСВ, на точность формируемой оценки орбиты. При этом ошибки измерений АСН в основном определяются системными ошибками (эфемеридными ошибками, ошибками временного обеспечения, числом одновременно видимых НС и т. п.) и ошибками среды (ионосферные, переотражения и пр.). Снизить влияние этих ошибок на точность формируемой оценки орбиты можно путем увеличения постоянной времени фильтра. Как показали результаты моделирования, на МКС при постоянной времени фильтра $T = 1$ витку ошибки оценки орбиты по положению, обусловленные ошибками измерений, составляют 3…5 м. Но это приводит к увеличению составляющих ошибок оценки орбиты, обусловленных ошибками модели движения КА, используемой при реализации динамической фильтрации. Например, как показывают графики, приведенные на рис. 7.15, при моделировании движения КА с использованием модели гравитационного поля Земли только до восьмого порядка (8×8) ошибки формируемой оценки орбиты достигают по положению 40 м.

Повышение точности может быть достигнуто за счет повышения точности модели движения КА. В гл. 2 отмечалось, что моделирование таких возмущающих факторов, как аномальная часть гравитационного поля Земли, гравитационное влияние Луны и Солнца, смещение полюса Земли, прецессия и нутация оси вращения Земли, неравномерность вращения Земли, может проводиться с большой точностью.

Плохо моделируемыми возмущениями являются аэродинамическое торможение и солнечное давление. Но, как следует из графиков, приведенных на рис. 7.20, для низкоорбитальных КА силами солнечного давления можно пренебречь. А вот аэродинамическое торможение (см. рис. 7.18) обусловливает ошибку оценки орбиты порядка 20 м. Уменьшить эту ошибку можно путем включения модели аэродинамического торможения в модель движения КА, реализуемую в фильтре.

Однако модель аэродинамического торможения является чрезвычайно сложной с точки зрения алгоритмической реализации, так как должна учитывать геометрию КА, его ориентацию, плотность атмосферы, зависящую от множества факторов, включая солнечную активность и т. п. Многие из этих

факторов сложно моделировать, а некоторые из них просто неизвестны в текущий момент времени. Например, сложно моделировать текущую геометрию КА, часто включающую большое количество подвижных элементов (солнечные батареи, антенны, подвижные платформы и т. п.). А такие факторы, как параметры солнечной активности, вовсе являются непрогнозируемыми и становятся известными по факту спустя некоторое время.

Поскольку значение аэродинамического возмущения превышает многие из рассмотренных выше возмущающих факторов, то при неучете аэродинамического торможения становится бессмысленным моделирование более мелких возмущений в модели движения КА.

Уменьшение аэродинамической ошибки в формируемой оценке орбиты может быть достигнуто путем уменьшения постоянной времени фильтра. Однако при этом пропорционально возрастают ошибки оценки, обусловленные ошибками измерений. Здесь может быть достигнут некоторый оптимум, при котором точность формируемой оценки будет составлять 10…15 м. Однако во многих случаях аэродинамическое торможение КА может быть непосредственно оценено по измерениям АСН. Очевидно, что в течение витка оно достаточно сильно меняется вследствие изменения плотности атмосферы на ночном и дневном участках орбит, а также геометрии и ориентации КА. Однако для многих КА среднее за виток аэродинамическое торможение является медленно меняющемся параметром, так как чаще всего КА находится в постоянной (например, орбитальной) ориентации, а его геометрия от витка к витку меняется одинаково. Например, солнечные батареи, отслеживая Солнце, повторяют одни и те же движения от витка к витку.

Рассмотрим алгоритм формирования оценки аэродинамического торможения по измерениям АСН. Обозначим искомый параметр среднего за виток аэродинамического торможения через a_{aero} и рассмотрим расширенный вектор состояния КА в виде

$$\Delta\overline{\xi}_i = \begin{pmatrix} \Delta\overline{X}_i \\ \Delta\overline{V}_i \\ a_{aero} \end{pmatrix}, \qquad (7.22)$$

где $\Delta\overline{X}_i = \overline{X}_i - \overline{X}^*_{0i}$, $\Delta\overline{V}_i = \overline{V}_i - \overline{V}^*_{0i}$ — неизвестные ошибки вектора состояния КА относительно известной оценки $\overline{X}^*_{0i}$, $\overline{V}^*_{0i}$.

Тогда для серии измерений с точностью до ошибок измерений $\delta\Delta\overline{X}_{\text{и}i}$ можно записать систему уравнений

$$\begin{aligned} &\Delta\overline{X}_{\text{и}1} = A\Delta\overline{\xi}_1; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta\overline{X}_{\text{и}n} = A\Delta\overline{\xi}_n, \end{aligned} \qquad (7.23)$$

где $A = (E_3 0_{3\times4})$ — матрица размером 3×7; E_3 — единичная матрица размером 3×3; $0_{3\times4}$ — нулевая матрица размером 3×4.

Система уравнений (7.23) аналогична системе уравнений (7.1) с той лишь разницей, что векторы $\Delta\overline{\xi}_i$ имеют размерность не 6, а 7, а матрица A_i — размер не 3×3, а 3×4.

Для разных моментов времени связь между векторами $\Delta\overline{\xi}_i$ и $\Delta\overline{\xi}_j$, определяется соотношением, аналогичным соотношению (7.2):

$$\Delta\overline{\xi}_j = B_{ij}\Delta\overline{\xi}_i, \tag{7.24}$$

где матрица связи B_{ij} имеет размер 7×7.

В процессе динамической фильтрации матрица B_{ij} определяется численным методом, т. е. путем восьмикратного интегрирования уравнений движения КА от момента i до момента j с последовательным варьированием вектора $\Delta\overline{\xi}_i$.

В процессе интегрирования уравнений движения аэродинамическое ускорение КА вычисляется по формуле

$$\overline{a}_a = -\frac{\overline{V}}{\left|\overline{V}\right|} a^*_{aero}, \tag{7.25}$$

где a^*_{aero} — текущая оценка аэродинамического торможения; $\overline{V}$ — вектор скорости КА в ГСК.

Дальнейший вывод алгоритмов динамической фильтрации с дополнительной оценкой аэродинамического торможения аналогичен выводу алгоритма формирования оценки орбиты без оценивания влияния атмосферы в соответствии с формулами (7.4)–(7.18). Конечный алгоритм аналогичен алгоритму (7.18) и имеет вид

$$\begin{aligned}
&\overline{P}_{n+1} = A^{\mathrm{T}}(\overline{\xi}_{\text{и}\,n+1} - \hat{\xi}^*_{n+1});\\
&W_{n+1} = \lambda^2 B^{-1\,\mathrm{T}}_{n\,n+1} W_n B^{-1}_{n\,n+1} + A^{\mathrm{T}} A;\\
&\Delta\overline{\xi}^*_{n+1} = W^{-1}_{n+1}\overline{P}_{n+1};\\
&\overline{\xi}^*_{n+1} = \hat{\xi}^*_{n+1} + \Delta\overline{\xi}^*_{n+1}.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Отличие алгоритма (7.26) от алгоритма (7.18) заключается в размере вектора $\overline{P}_i$ и матриц A, $B_{i\,i+1}$, W_i. Если в алгоритме (7.18) их размерность равна соответственно 6 и 6×6, то в алгоритме (7.26) — 7 и 7×7.

Использование алгоритма динамической фильтрации измерений АСН с самонастройкой на аэродинамическое торможение позволяет исключить достаточно громоздкую и грубую модель расчета оценки аэродинамического торможения из модели движения КА и практически полностью компенсировать постоянную (точнее, медленно меняющуюся) составляющую аэродинамического торможения и тем самым значительно уменьшить аэродинамическую составляющую ошибки формируемой оценки орбиты.

На рис. 7.23 приведены графики аэродинамической составляющей оценки орбиты, полученные путем моделирования, при использовании рассмот-

ренных алгоритмов самонастройки динамического фильтра. При сравнении этих графиков с графиками на рис. 7.18 (без аэродинамической самонастройки) видно, что алгоритмы самонастройки практически полностью компенсируют постоянные составляющие ошибок оценки, а оставшиеся периодические составляющие, обусловленные различием плотности атмосферы на светлой и темной частях орбиты, по амплитуде не превышают 2 м.

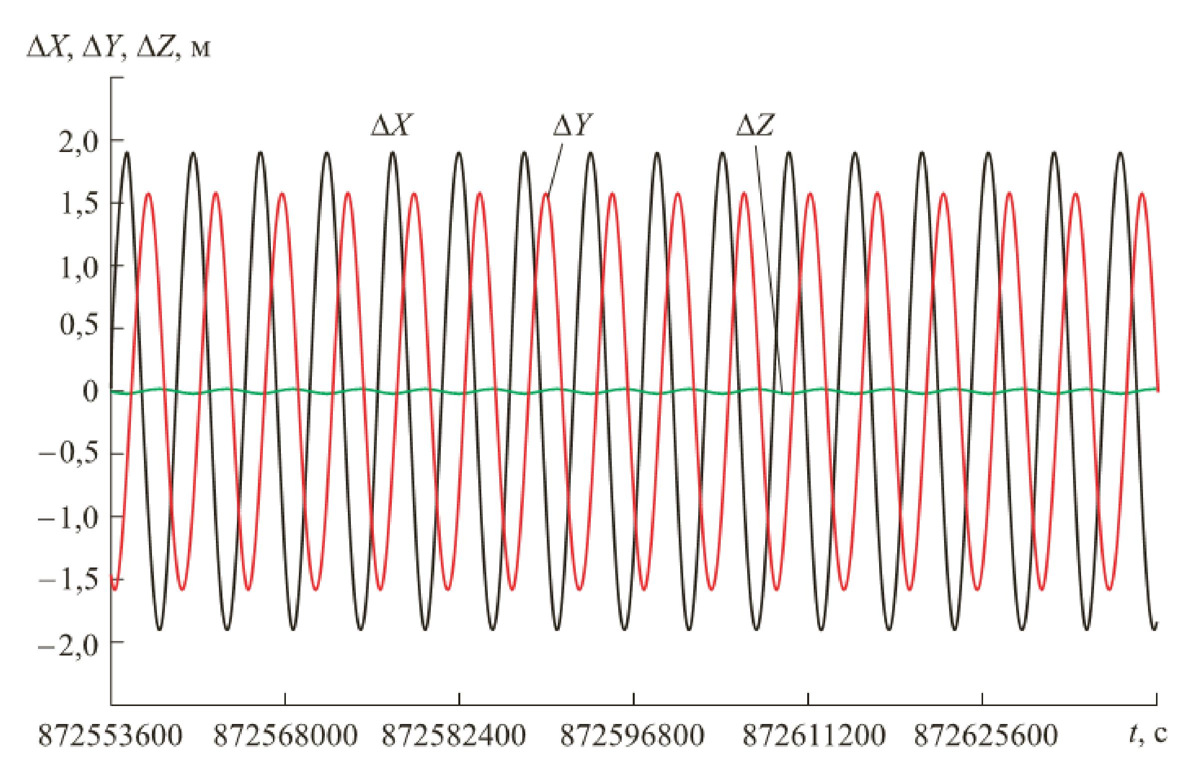


Рис. 7.23. Аэродинамическая составляющая ошибки оценки с компенсацией

Таким образом, исследование точности формируемой с использованием предложенного динамического фильтра оценки орбиты от различных возмущающих факторов показало, что максимальное влияние оказывает точность моделирования аномальной части гравитационного поля Земли. Учет при моделировании аномальной части составляющей гравитационного поля Земли только до восьмого порядка обеспечивает точность формируемой оценки по координатам ~40 м (см. рис. 7.15). Учет в аномальной части составляющих гравитационного поля Земли до 32 порядка обеспечивает точность оценки по координатам ~10 м (см. рис. 7.16). При учете в аномальной части гравитационного поля Земли составляющих до 72 порядка ошибка оценки по координатам не превышает 1 м (см. рис. 7.17).

Вторым по степени влияния на точность формируемой оценки орбиты возмущающим фактором является аэродинамическое торможение КА. При аэродинамическом ускорении, равном 10^{-6} м/с^2, ошибка аэродинамической составляющей формируемой оценки орбиты по координатам достигает 20 м (см. рис. 7.18). Предложенный алгоритм самонастройки фильтра на реальное аэродинамическое торможение позволил исключить постоянную составляющую аэродинамической ошибки формируемой оценки орбиты, а оставшаяся переменная составляющая по амплитуде не превышает 2 м (см. рис. 7.23).

Составляющие ошибки оценки, обусловленные смещением полюса Земли и гравитационным влиянием Луны и Солнца, составляют 2…3 м. Их учет в модели движения КА необходим только в тех случаях, когда требуется более высокая точность формируемой оценки.

Составляющие ошибки оценки, обусловленные солнечным давлением и прецессией земной оси достигают всего 0,2…0,5 м, и их влияние вряд ли следует учитывать в модели движения низкоорбитального КА, так как ошибки, обусловленные этими составляющими, во-первых, меньше ошибок, обусловленных ошибками измерений АСН, во-вторых, меньше ошибок, обусловленных нескомпенсированной в результате самонастройки фильтра аэродинамической ошибкой оценки, а в-третьих, соизмеримы с ошибками, обусловленными другими возмущающими факторами, не рассмотренными в настоящем разделе, такими, как приливные аномалии гравитационного поля Земли и пр.

Исследование влияния ошибок измерений АСН на точность формируемой оценки орбиты показало, что при постоянной времени динамического фильтра $T = 5500$ с (один виток) эта ошибка оценки орбиты составляет 3...5 м.

С учетом сказанного можно сделать вывод, что для низкоорбитальных КА при использовании рассмотренных алгоритмов динамической фильтрации измерений АСН точность формируемой оценки орбиты по координатам составляет 3...5 м. При этом в модели движения КА необходимо учитывать аномальную часть гравитационного поля Земли с точностью до 72 порядка, а также в алгоритмах фильтрации реализовывать самонастройку на текущее аэродинамическое торможение. Целесообразно также в модели движения КА учитывать смещение полюса Земли от оси Z ГСК и гравитационное влияние на движение КА Луны и Солнца. В этом случае точность может быть несколько выше.

7.6. Метод определения возмущений, действующих на НС GPS и ГЛОНАСС, обусловленных силами солнечного давления

Для высокоорбитальных КА основным плохо прогнозируемым возмущающим фактором являются силы солнечного давления.

В 5.5 рассматривались алгоритмы высокоточного прогноза эфемерид ГЛОНАСС и GPS, реализуемых за счет точного моделирования возмущений, действующих на НС, что возможно, если возмущения от сил солнечного давления оцениваются с достаточно высокой точностью. В разд. 2.5 приведен алгоритм (2.30) расчета ускорения, обусловленного силами солнечного давления, для КА, основными отражающими солнечный свет конструкциями которого являются солнечные батареи (СБ), ориентируемые на Солнце. Навигационные спутники ГЛОНАСС и GPS относятся к таким КА, они имеют СБ, площадь которых существенно больше площади миделя самого спутника, и эти СБ ориентированы на Солнце. Однако в алгоритме (2.30) имеется достаточно неопределенный коэффициент K, зависящий от многих факторов. Этот

коэффициент индивидуален для различных КА и может медленно меняться во времени. Поэтому оценить его заранее с точностью выше 20 % обычно не удается, из-за чего возмущение от сил солнечного давления для НС ГЛОНАСС и GPS является основным неопределенным фактором, затрудняющим точный прогноз орбиты НС.

Здесь рассмотрим метод оценки этого коэффициента в полете по эфемеридам НС, передаваемым потребителю (*broadcast*-эфемеридам). Данный метод может быть реализован, если в модели движения КА учтены все другие, более значительные возмущения. Для НС такими возмущениями являются:

• возмущение от аномальной части гравитационного поля Земли до порядка, не ниже 8×8;

• гравитационные возмущения от Луны и Солнца;

• возмущения, обусловленные смещением полюса Земли;

• нутация и прецессия оси вращения Земли;

• неравномерность вращения Земли.

В качестве измеряемых параметров будем брать векторы координат НС, формируемые на моменты времени t_i по данным соответствующих эфемерид, а искомый коэффициент K введем в состав оцениваемых параметров:

$$\bar{\xi}_i^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_i^* \\ \bar{V}_i^* \\ K^* \end{pmatrix}. \tag{7.27}$$

Пусть на момент t_i известен вектор измерений $\bar{X}_{\text{и}i}$. По оценке вектора состояния $\bar{\xi}_i^*$ может быть сформирована оценка вектора измерения по формуле

$$\bar{X}_{\text{и}}^* = A\bar{\xi}_i^*, \tag{7.28}$$

где $A = (E0)$; E — единичная матрица размером 3×3; 0 — нулевая матрица размером 3×4.

Пусть $\bar{\xi}_i$ — истинный вектор состояния КА:

$$\bar{\xi}_i = \begin{pmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{V}_i \\ K \end{pmatrix}. \tag{7.29}$$

Представим также ошибки вектора измерений и вектора состояния в виде

$$\begin{aligned} \Delta\bar{X}_{\text{и}i} &= \bar{X}_{\text{и}i} - \bar{X}_{\text{и}}^*; \\ \Delta\bar{\xi}_i &= \bar{\xi}_i - \bar{\xi}_i^*. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Тогда для n измерений можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\Delta\bar{X}_{\text{и}1} = A\Delta\bar{\xi}_1; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta\bar{X}_{\text{и}n} = A\Delta\bar{\xi}_n. \end{aligned} \tag{7.31}$$

В системе уравнений (7.31) для разных моментов времени связь между векторами $\Delta\overline{\xi}_i$ и $\Delta\overline{\xi}_j$ определяется соотношением (7.24). При этом в процессе интегрирования уравнений движения как при вычислении матрицы преобразования ошибок B_{ij}, так и при прогнозе вектора состояния КА от момента t_i к моменту t_{i+1} возмущающее ускорение от сил солнечного давления определяется по формуле

$$\overline{a}_{CD} = \frac{\overline{X}^* - \overline{X}_\text{С}}{\left|\overline{X}^* - \overline{X}_\text{С}\right|} \frac{S_\text{СБ} + S_\text{м}}{m} K^*, \qquad (7.32)$$

где $\overline{X}^*$ — текущая оценка координат КА; $\overline{X}_\text{С}$ — вектор координат Солнца в ГСК; $S_\text{СБ}$ — площадь солнечных батарей; $S_\text{м}$ — площадь миделя КА; m — масса КА; K^* — текущая оценка коэффициента K.

В формуле (7.32) $\dfrac{S_\text{СБ} + S_\text{м}}{m}$ можно задать в виде постоянного коэффициента, точность расчета которого не важна, так как при его любом приближенном соответствии указанным в формуле величинам в процессе динамической фильтрации оценка коэффициента K^* выйдет на уровень, при котором оценка ускорения $\overline{a}^*_{CD}$ с большой точностью соответствует его истинному значению.

После формирования матрицы $B_{n\,n+1}$ на текущем $(n + 1)$-м шаге оценка вектора состояния $\overline{\xi}^*_{n+1}$ на $(n + 1)$-м шаге формируется в соответствии с алгоритмом (7.26).

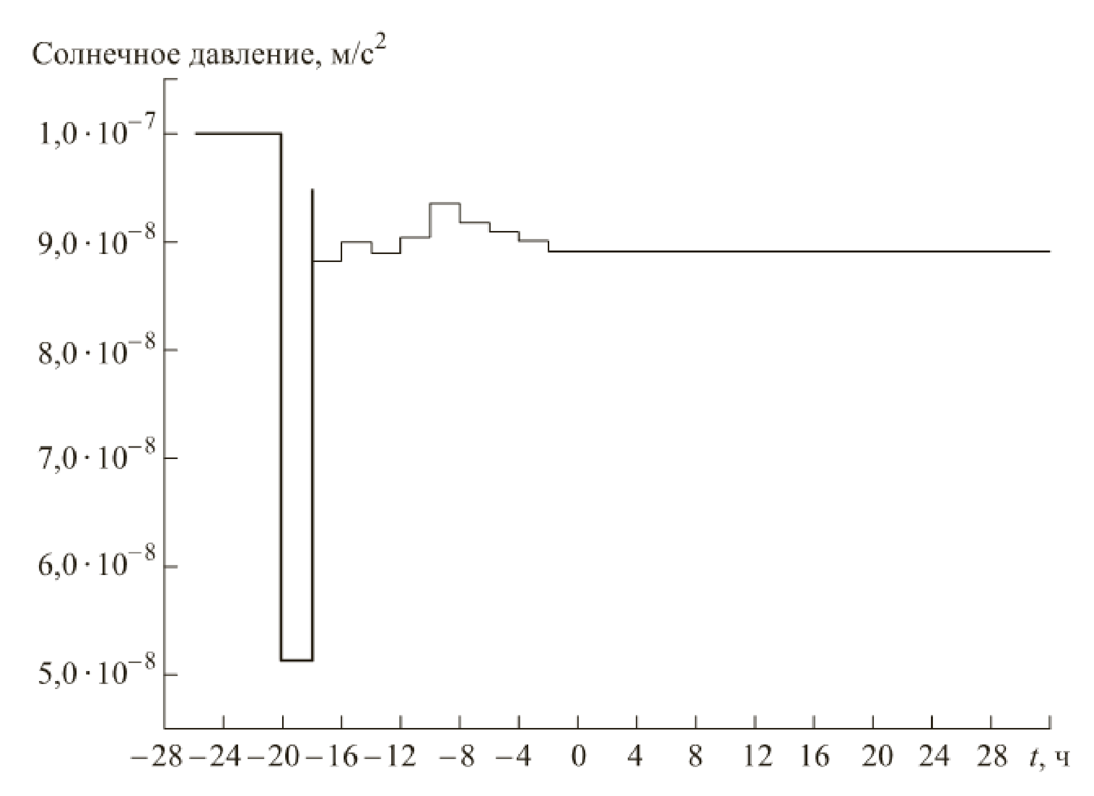


Рис. 7.24. Оценка ускорения от сил солнечного давления для одного из спутников GPS, полученная в результате обработки реальных *broadcast*-эфемерид

Рассмотренный алгоритм был реализован в модели движения НС ГЛОНАСС и GPS при формировании высокоточного прогноза этих спутников, рассмотренных в 5.5 (см. рис. 5.13, 5.14). Обеспечение такого прогноза с метровыми точностями подтверждает высокую точность формируемой оценки сил солнечного давления.

На рис. 7.24 приведен график оценки ускорения от сил солнечного давления одного из спутников GPS. Оценка получена рассмотренным выше методом динамической фильтрации по передаваемым этим спутником эфемеридам. График демонстрирует процесс настройки формируемой оценки. Нулевое приближение оценки было задано равным 10^{-7} м/с^2. Коррекция оценки выполнялась по *broadcast*-эфемеридам, обновлявшимся каждые 2 ч. Длительность процесса настройки составила ~24 ч, после чего установилось постоянное значение ускорения от сил солнечного давления, равное $8{,}9\cdot 10^{-8}$ м/с^2. Полученное значение согласуется с данными, приведенными в табл. 2.1 (10^{-7} м/с^2).

Контрольные вопросы

1. Что такое динамическая фильтрация измерений АСН?
2. Как зависят ошибки формируемой оценки орбиты от ошибок измерений?
3. Как зависят ошибки формируемой оценки орбиты от ошибок модели гравитационного поля?
4. Как зависят ошибки формируемой оценки орбиты от ошибок модели атмосферы?
5. Как зависят ошибки формируемой оценки орбиты от ошибок модели гравитационного воздействия Луны и Солнца?
6. Как зависят ошибки формируемой оценки орбиты от ошибок модели солнечного давления?
7. Как зависят ошибки формируемой оценки орбиты от ошибок модели параметров вращения Земли?

Глава 8
Анализ ошибок формируемой оценки орбиты по реальным измерениям АСН-М МКС

8.1. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок измерений

Результаты влияния различных возмущений на точность орбиты, формируемой по предложенным алгоритмам динамической фильтрации, основаны на моделировании измерений АСН и орбиты КА. В настоящем разделе полученные результаты моделирования подтверждаются реальными лётными измерениями АСН-М, выполненными на МКС при проведении в 2010–2011 гг. специальных лётных экспериментов по исследованию достигаемой точности навигации низкоорбитальных КА.

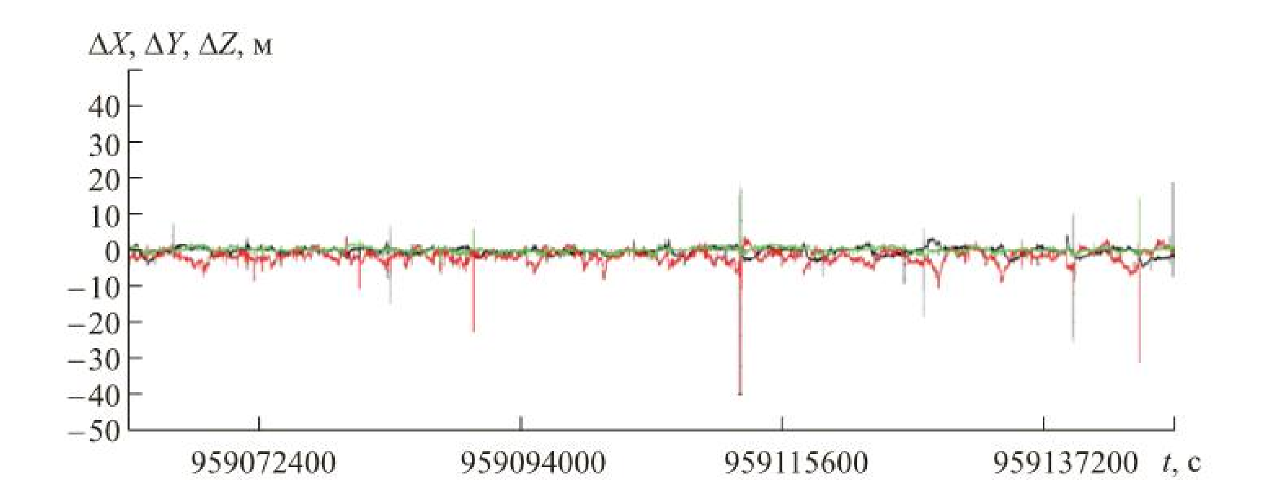
Чтобы оценить влияние реальных ошибок измерений АСН на точность формируемой оценки орбиты, на МКС были проведены измерения на трех независимых приемниках АСН, антенны которых установлены под различными углами к местной вертикали. Одна из антенн направлена в зенит, а две другие отклонены от вертикали вокруг продольной оси МКС на углы +40° и –40° соответственно. Поэтому все три приемника работали по разным созвездиям спутников GPS и имели различные ошибки КСВ.

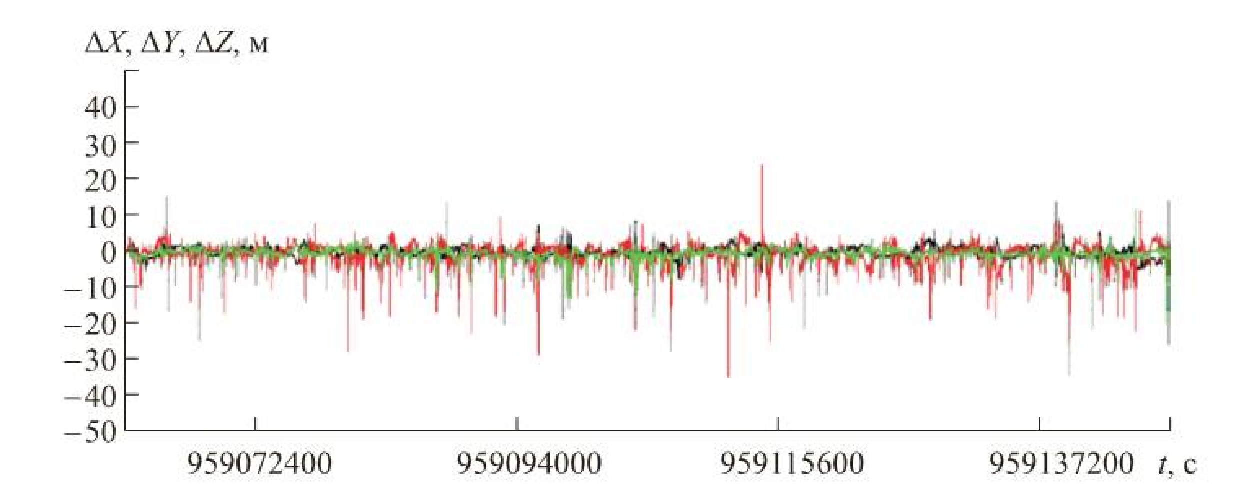
На рис. 8.1 приведены графики ошибок измерений координат центра масс МКС каждого приемника. Графики ошибок построены относительно оценок орбиты, полученных по этим измерениям динамической фильтрацией с постоянной времени, равной 1 виток. Из приведенных графиков видно, что ошибки измерений приемников практически не коррелированы между собой. Минимальные ошибки наблюдаются у первого приемника, антенна которого направлена в зенит. Следовательно, в ее поле зрения находится максимальное число НС.

Видимость НС боковыми антеннами МКС существенно хуже, чем «зенитной», и поскольку они развернуты в противоположные стороны, созвездия видимых этими антеннами спутников существенно отличаются друг от друга. Кроме того, в поле зрения каждой из антенн попадают переотраженные сигналы от различных элементов конструкции МКС. В результате ошибки измерений из-за переотражения сигналов различны для каждого навигационного приемника и обусловливают ошибки формируемых по этим измерениям оценок орбиты МКС, а значит и составляющие ошибок этих оценок отличаются друг от друга. Они обусловлены неточностью модели движения КА и равны для всех трех оценок, так как при формировании этих оценок используются одинаковые модели движения КА. В итоге разности оценок,

формируемых по измерениям каждого из приемников, близки к составляющим ошибок оценок, обусловленных ошибками измерений приемников.

На рис. 8.2 и 8.3 показаны графики попарных разностей координат и скоростей оценок орбит, полученных по измерениям приемников, ошибки которых приведены на рис. 8.1.





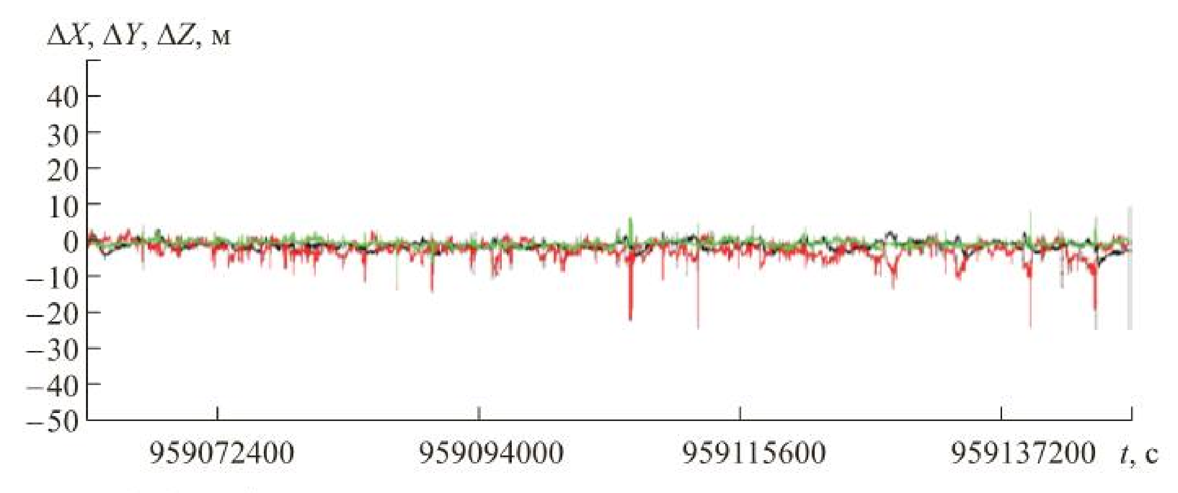


Рис. 8.1. Ошибки измерений координат трех навигационных приемников МКС

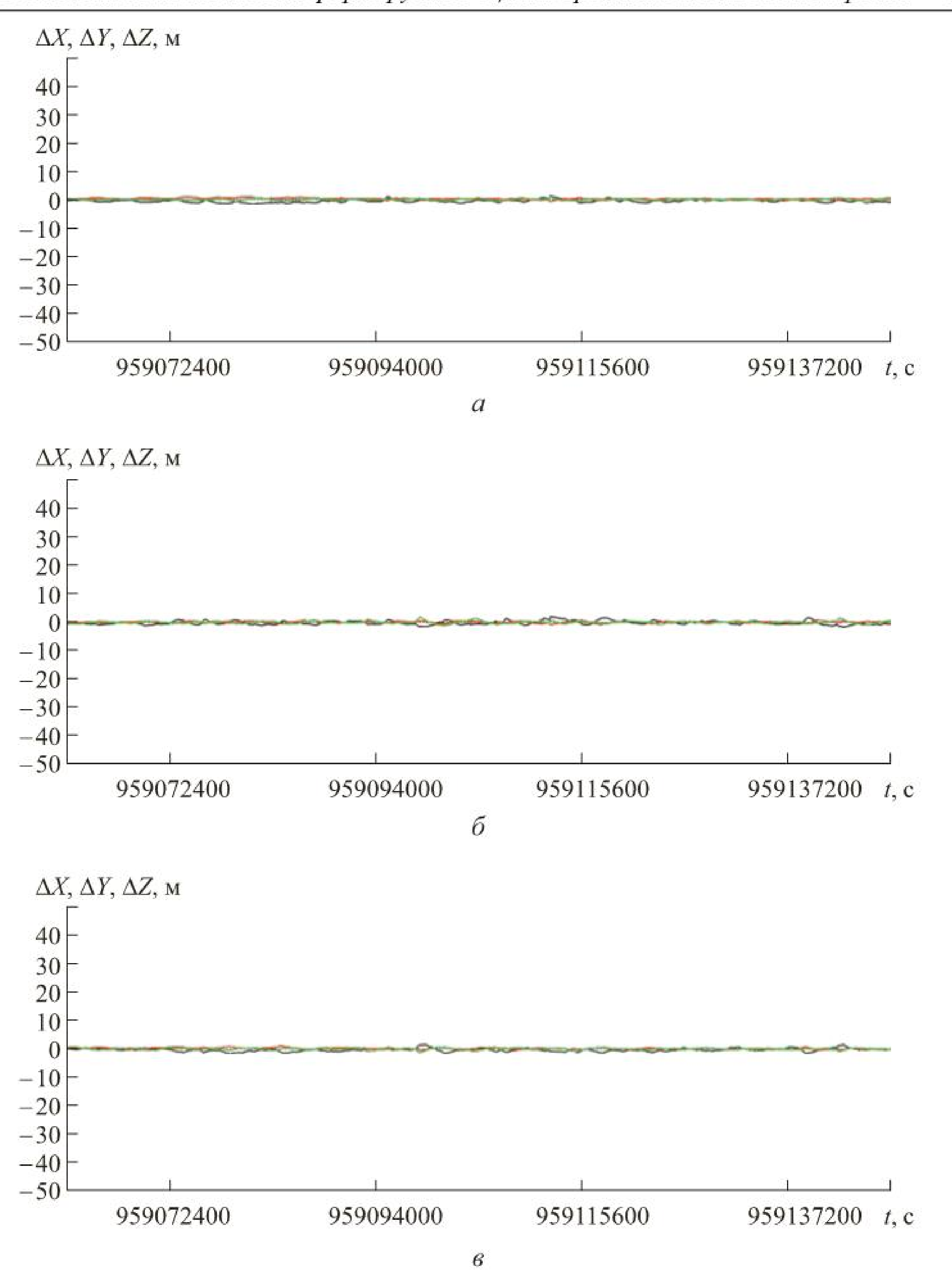


Рис. 8.2. Попарные разности координат оценок орбит, полученных по измерениям трех навигационных приемников МКС

На рис. 8.2, *а* и 8.3, *а* приведены графики разности ошибок оценок первого и второго приемников, на рис. 8.2, *б* и 8.3, *б* — второго и третьего приемников, на рис. 8.2, *в* и 8.3, *в* — третьего и первого приемников. Из графиков видно, что попарные разности имеют одинаковый порядок значений и по координатам отличаются не более, чем на 2 м, а по скорости — не более

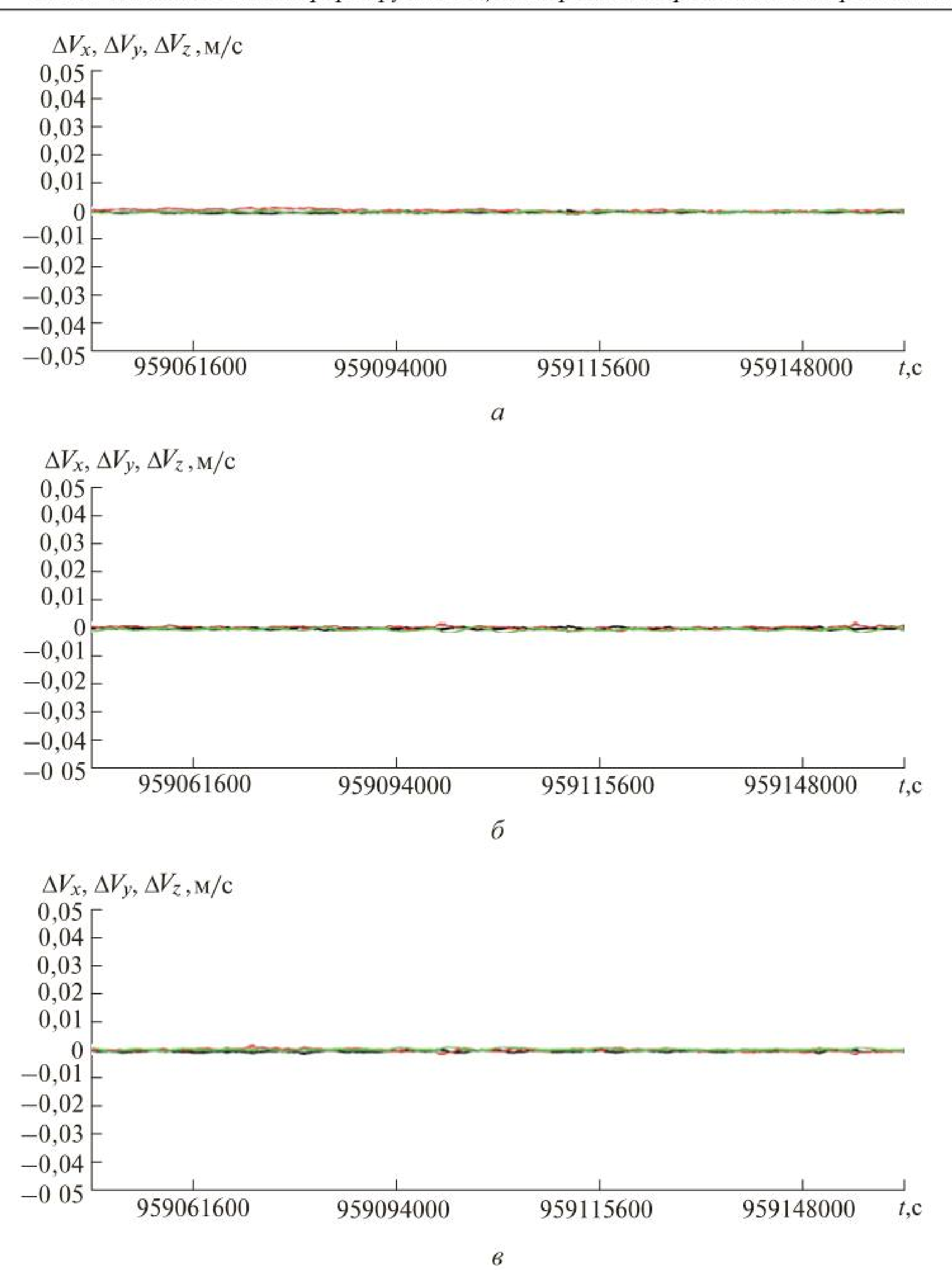


Рис. 8.3. Попарные разности составляющих скорости оценок орбит, полученных по измерениям трех навигационных приемников МКС

чем на 3 мм/с. Это означает, что ошибки оценок орбиты МКС, обусловленные ошибками измерений, составляют ~2 м по координатам и 3 мм/с по скорости.

8.2. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок модели гравитационного поля Земли

Для исследования влияния точности моделирования гравитационного поля Земли на точность оценки по полученным на МКС измерениям АСН были сформированы оценки орбиты для моделей порядка 8×8, 36×36, 72×72 и построены графики разностей измеренных координат и их оценок.

На рис. 8.4, *а* приведены графики разностей реальных измерений КСВ с оценкой, полученной при использовании модели порядка 8×8, а на рис. 8.4, *б* — графики ошибок оценки орбиты, полученной путем моделирования с использованием модели порядка 8×8.

Графики ошибок, полученные по реальным измерениям, включают как ошибки, обусловленные ошибками модели, так и ошибки измерений. Последние имеют вид высокочастотной шумовой составляющей и резких кратковременных всплесков. Ошибки, обусловленные ошибками модели, соответствуют низкочастотной, достаточно плавной составляющей ошибок, приведенных на указанном графике.

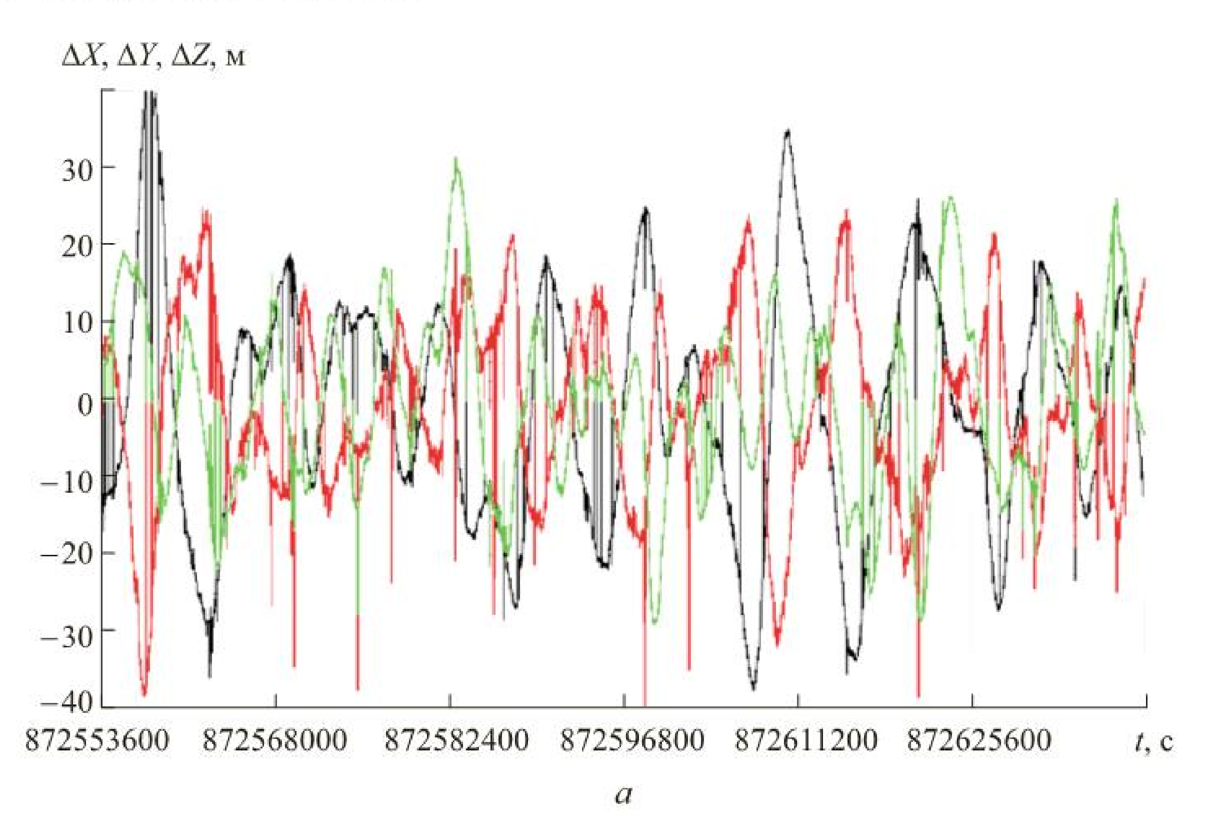
Сравнивая рис. 8.4, *а* и *б* можно отметить, что графики ошибок оценки орбиты, полученной путем моделирования, практически совпадают с графиками ошибок оценки орбиты, полученной по реальным данным, т. е. если не учитывать ошибки, обусловленные ошибками измерений, то верхние графики будут практически совпадать с нижними.

На рис. 8.5 приведена аналогичная пара графиков для модели гравитационного порядка 36×36. Здесь также можно констатировать, что графики ошибок оценки орбиты, полученной путем моделирования, практически совпадают с графиками ошибок оценки орбиты, полученной по реальным данным.

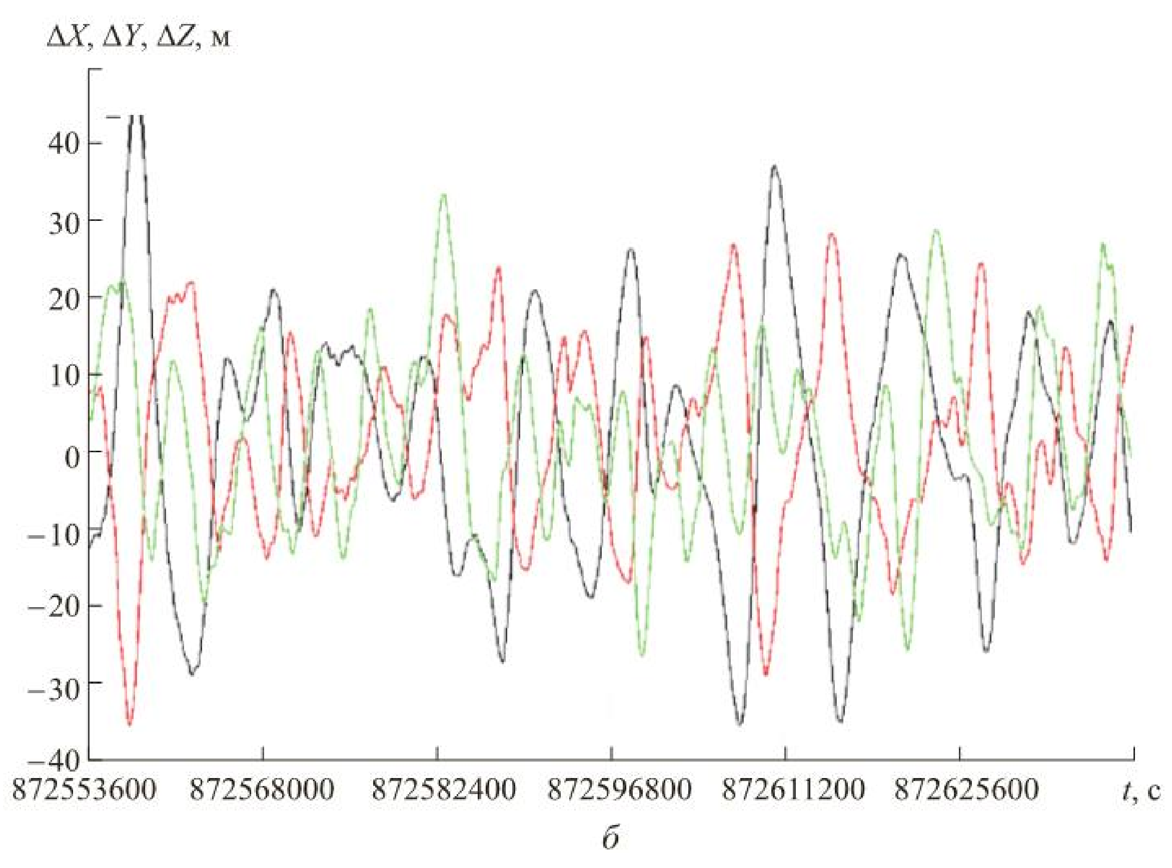
На рис. 8.6 показаны графики для модели гравитационного поля порядка 72×72. Для этой модели ошибки, полученные путем моделирования, составляют ~0,3 м. Оценить эту составляющую на графиках для реальных измерений не представляется возможным, так как эта ошибка существенно меньше ошибки измерений и ошибок оценки орбиты, обусловленных неучтенными возмущениями: гравитационным влиянием Луны и Солнца, некомпенсированными ошибками аэродинамического торможения, смещением полюса Земли и т. п.

Тем не менее, если не учитывать большие всплески ошибок измерений, обусловленные переотражениями сигналов НС от элементов конструкции МКС, то можно сделать вывод, что разность измерений и оценки орбиты, полученной по этим измерениям по трем координатам ΔX, ΔY, ΔZ, находится в диапазоне ±5 м. Такое совпадение может быть только в том случае, если точность большинства измерений АСН и точность оценки орбиты не хуже 5 м. Это означает, что предложенные алгоритмы динамической фильтрации изме-

рений АСН при реализации в модели движения КА модели гравитационного поля Земли порядка 72×72 обеспечивают формирование оценки орбиты, точность которой достигает 5 м.



а



б

Рис. 8.4. Сравнение точности оценок орбиты, полученных по реальным измерениям (*а*) и путем моделирования (*б*), при реализации в фильтре модели гравитационного поля порядка 8×8

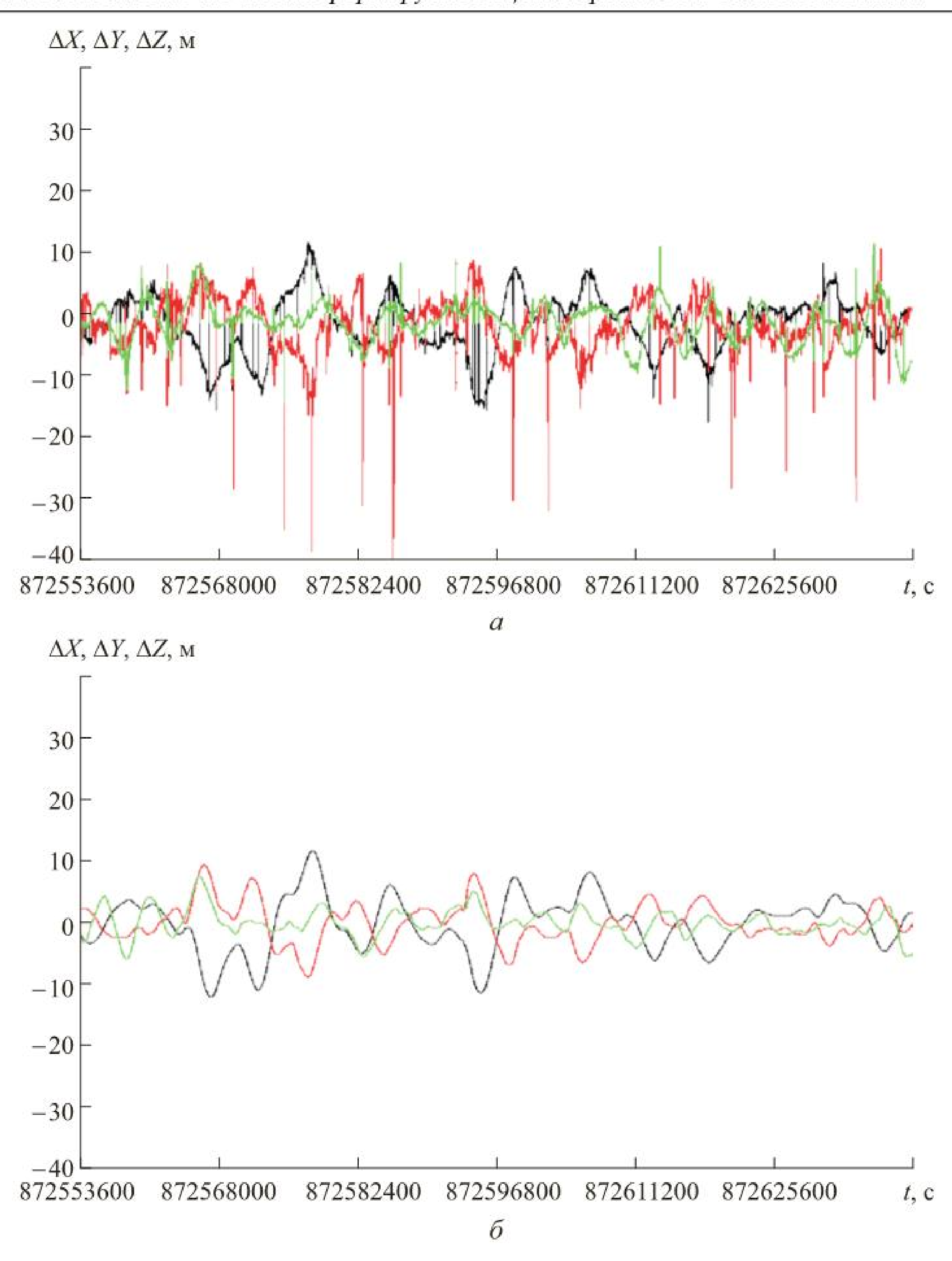


Рис. 8.5. Сравнение точности оценок орбиты, полученных по реальным измерениям (*а*) и путем моделирования (*б*), при реализации в фильтре модели гравитационного поля порядка 36×36

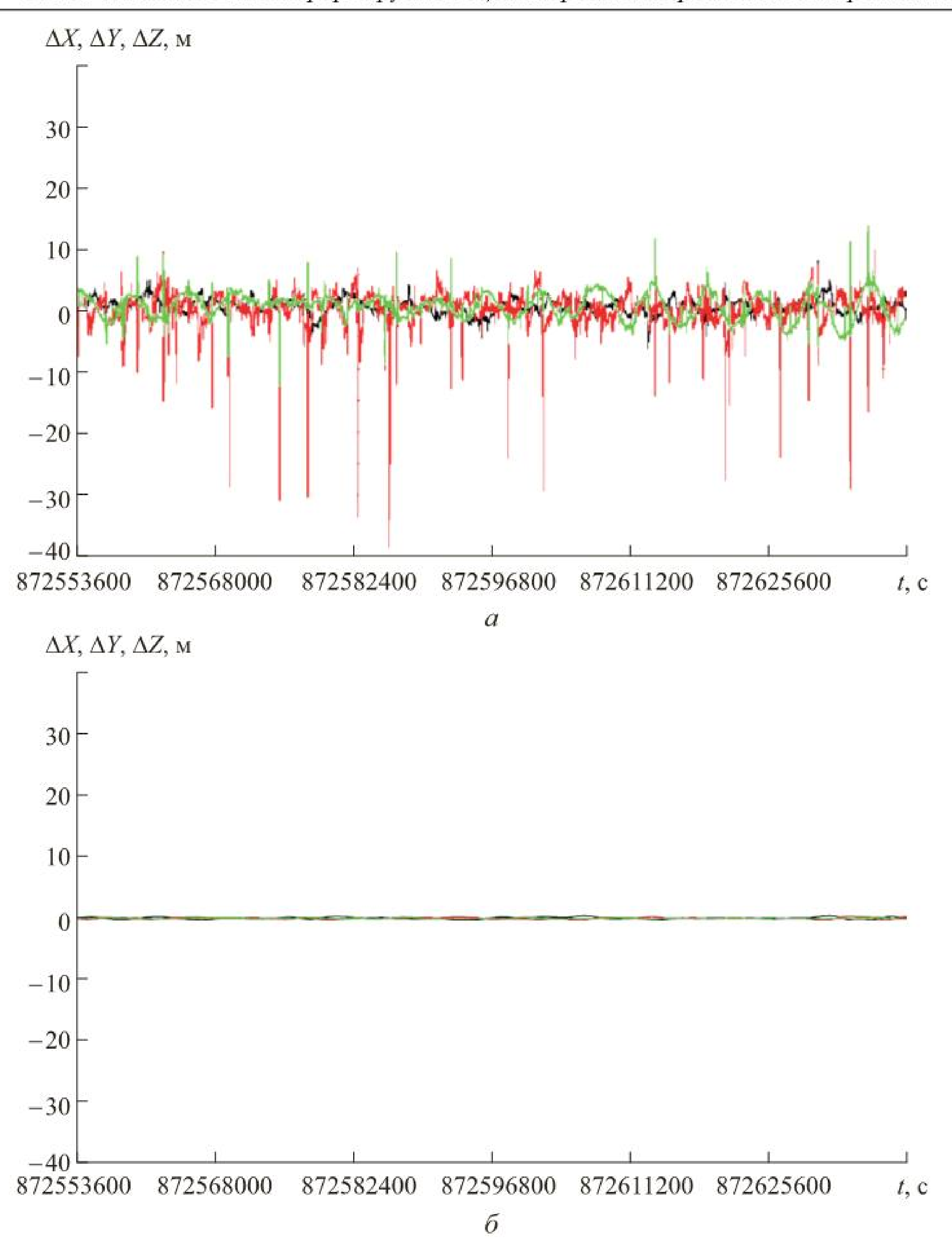


Рис. 8.6. Сравнение точности оценок орбиты, полученных по реальным измерениям (*а*) и путем моделирования (*б*), при реализации в фильтре модели гравитационного поля порядка 72×72

Полученный результат обеспечивается только в том случае, если в алгоритмах динамической фильтрации реализованы алгоритмы самонастройки на аэродинамическое торможение КА.

8.3. Зависимость точности формирования оценки орбиты от аэродинамического торможения КА

Ранее было отмечено, что аэродинамические возмущения орбиты существенно влияют на точность формируемой ее оценки. Для предложенных алгоритмов фильтрации измерений АСН аэродинамическая составляющая оценки орбиты достигает 20 м (см. рис. 7.15). Предложенный алгоритм самонастройки фильтра на реальное аэродинамическое торможение обеспечивает компенсацию постоянной составляющей среднего за виток аэродинамического торможения. При этом нескомпенсированное значение аэродинамической составляющей ошибки оценки орбиты не превышает 2 м (см. рис. 7.23).

Приведенные на рис. 7.18 и 7.23 графики аэродинамических составляющих ошибок оценки орбиты получены путем моделирования. Аналогичный анализ влияния аэродинамического торможения был выполнен по реальным лётным измерениям АСН-М МКС, полученным в одном из экспериментов. На рис. 8.7 показаны графики разности измерений АСН (по координатам X, Y, Z относительно ОСК) с соответствующей оценкой орбиты, полученной по предлагаемому алгоритму без аэродинамической компенсации (с учетом возмущений аномальной части гравитационного поля Земли). Из графиков видна постоянная составляющая аэродинамической ошибки оценки по осям X (продольная ось) и Y (вертикальная ось). Смещение по оси X достигает ~5 м, по Y ~3 м, смещение по оси Z практически отсутствует.

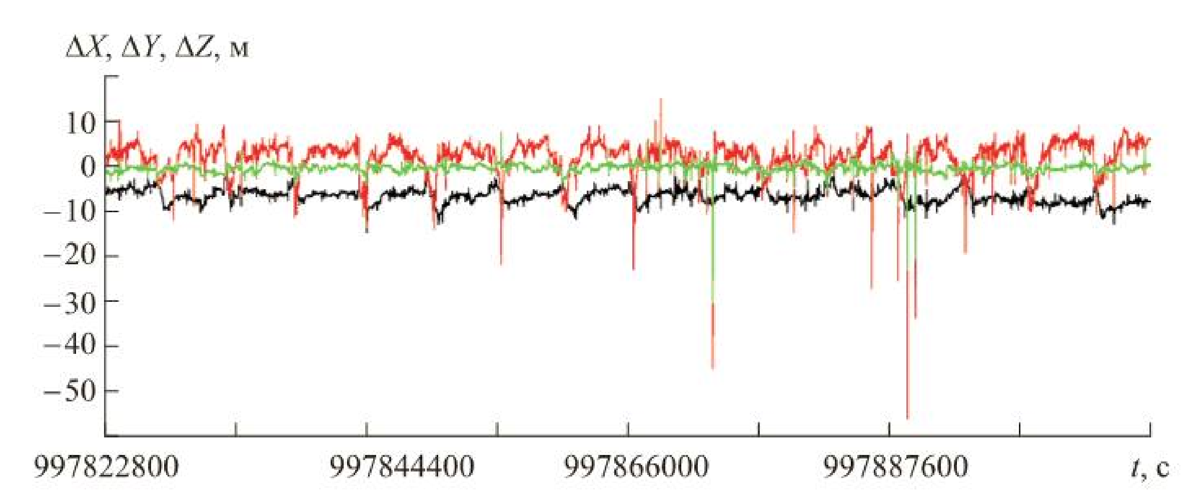


Рис. 8.7. Разность реальных измерений координат и их оценки, полученной по алгоритмам фильтрации без самонастройки на аэродинамическое торможение

На рис. 8.8 приведены графики для оценки орбиты, полученной по аналогичным алгоритмам, но с аэродинамической компенсацией. Из рисунка видно, что аэродинамическое смещение полностью компенсировано и большая часть измерений лежит в диапазоне ±5 м по всем трем осям.

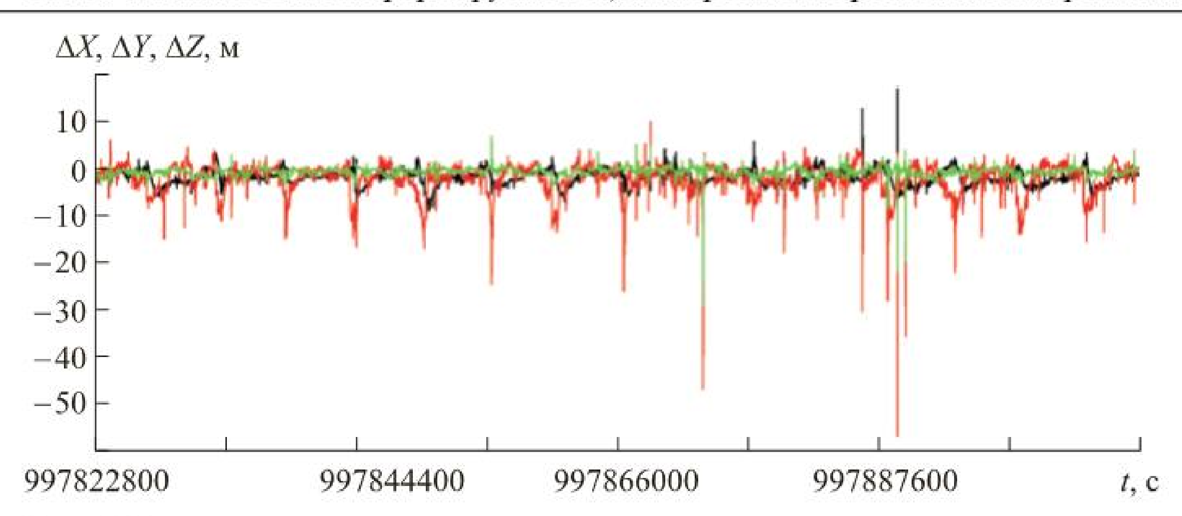


Рис. 8.8. Разность измерений координат и их оценки, полученной по алгоритмам фильтрации с самонастройкой на аэродинамическое торможение

Следует отметить, что предложенный алгоритм аэродинамической компенсации не только устраняет постоянную составляющую аэродинамической ошибки в формируемой оценке орбиты, но также позволяет оценить аэродинамическое торможение в реальном времени. На рис. 8.9 приведен график аэродинамического торможения для того же участка орбиты МКС, из которого видно, что среднее значение аэродинамического торможения составляет $\sim 2{,}5\cdot 10^{-7}$ м/с^2. Ошибки оценки (отклонения от среднего значения) имеют амплитуду $\sim 0{,}5\cdot 10^{-7}$ м/с^2 и обусловлены влиянием на оценку аэродинамического торможения ионосферных ошибок измерений АСН, которые хорошо просматриваются на графиках рис. 8.8.

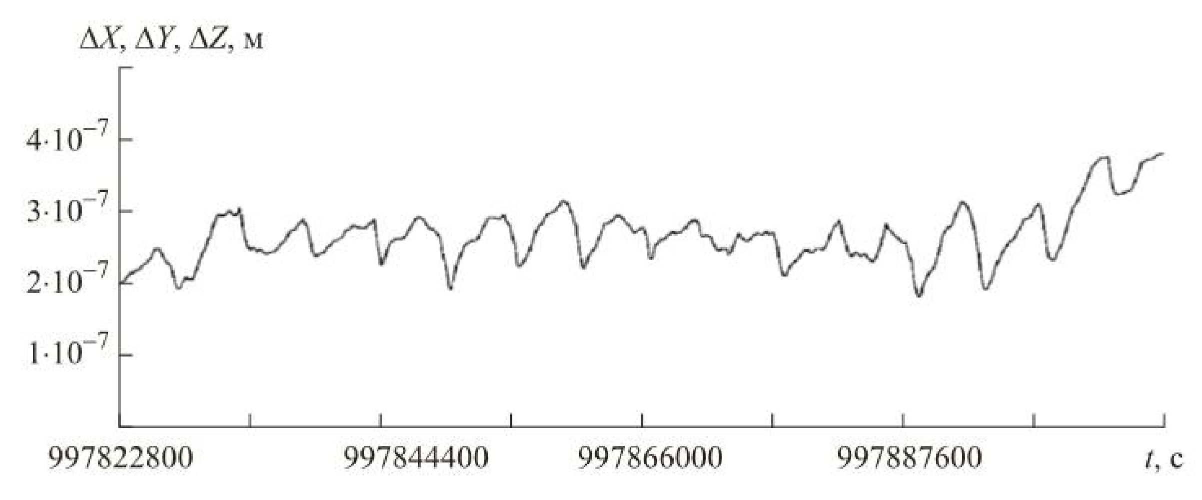


Рис. 8.9. Оценка аэродинамического торможения МКС, полученная по измерениям АСН-М

Таким образом, предложенный алгоритм динамической фильтрации измерений с аэродинамической компенсацией позволяет не только исключить постоянную составляющую аэродинамического торможения КА на точность формируемой оценки орбиты, но и с достоверно высокой точностью в реальном времени оценивать аэродинамическое торможение КА, значение которого $\sim 10^{-8}g$.

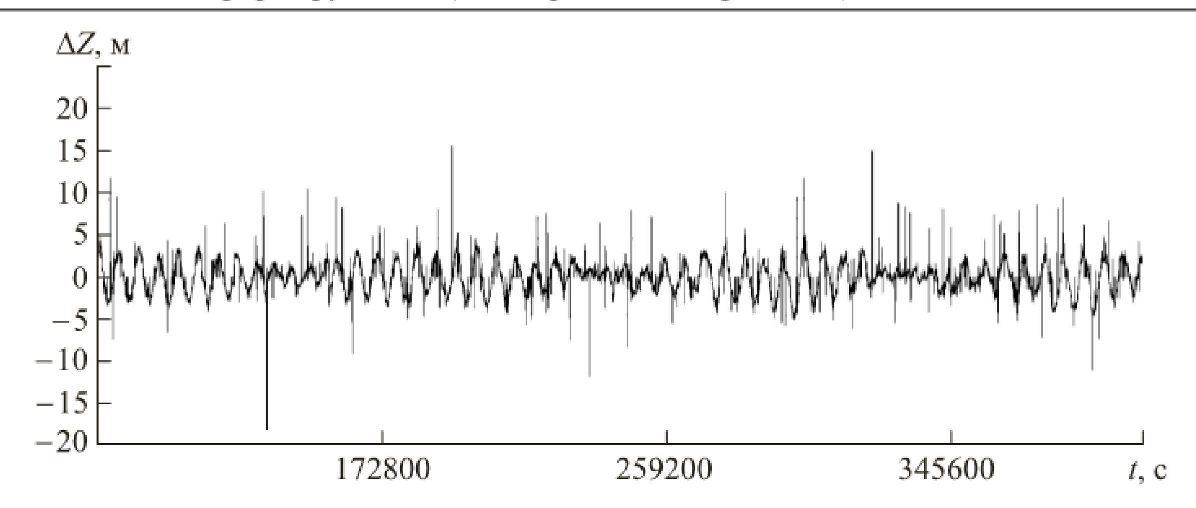


Рис. 8.10. Ошибка оценки орбиты без учета влияния Луны, Солнца и смещения оси вращения Земли

В соответствии с результатами моделирования, полученными ранее, следующими (и близкими) по степени влияния на точность формируемой оценки орбиты возмущающими факторами являются смещение полюса Земли и гравитационное воздействие на КА Луны и Солнца. Рассмотрим влияние этих ошибок при оценке орбиты, полученной по реальным измерениям АСН-М на МКС. Графики, приведенные на рис. 8.6 представляют собой разность координат в ОСК реальных измерений АСН и оценки орбиты, полученной по этим измерениям с использованием модели гравитационного поля Земли порядка 72×72 и аэродинамической компенсации. В полученную разность входят ошибки измерений АСН, нескомпенсированная часть аэродинамического возмущения и все неучтенные в модели движения КА возмущения, в том числе возмущения, обусловленные смещением полюса Земли и гравитационным влиянием Луны и Солнца. На графиках, приведенных на рис. 8.6 для значений ΔX, ΔY, ΔZ, трудно выделить какие-либо закономерности появления ошибок, однако на рис. 8.10 видно, что разность между измерениями АСН и формируемой оценкой в проекции на ось Z ОСК имеет колебательный характер с амплитудой 2…4 м и частотой один виток. Эти регулярные колебания обусловлены влиянием смещения полюса Земли и гравитационным влиянием на орбиту МКС Луны и Солнца. Они могут быть скомпенсированы путем моделирования этих возмущений в модели движения КА при фильтрации измерений АСН.

8.4. Зависимость формируемой оценки орбиты от гравитационного воздействия на КА Луны и Солнца и смещения полюса Земли

Графики рассогласования между измерениями АСН и формируемой оценкой в проекции на ось Z ОСК для случая учета в модели движения КА смещения полюса Земли показаны на рис. 8.11 и одновременного учета смещения полюса и гравитации Луны и Солнца — на рис. 8.12.

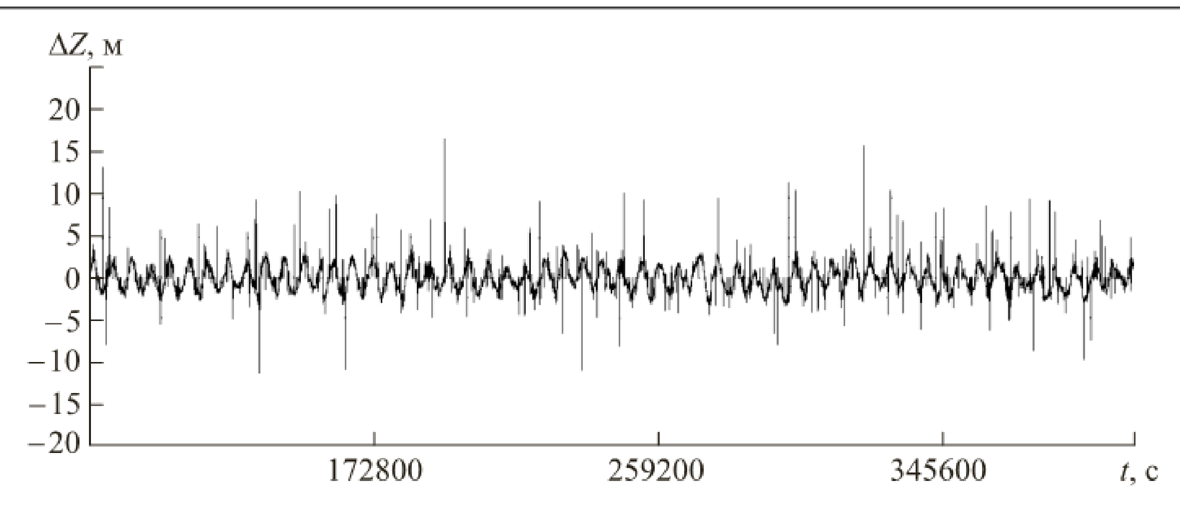


Рис. 8.11. Ошибка оценки орбиты без учета влияния Луны и Солнца, с учетом смещения оси вращения Земли

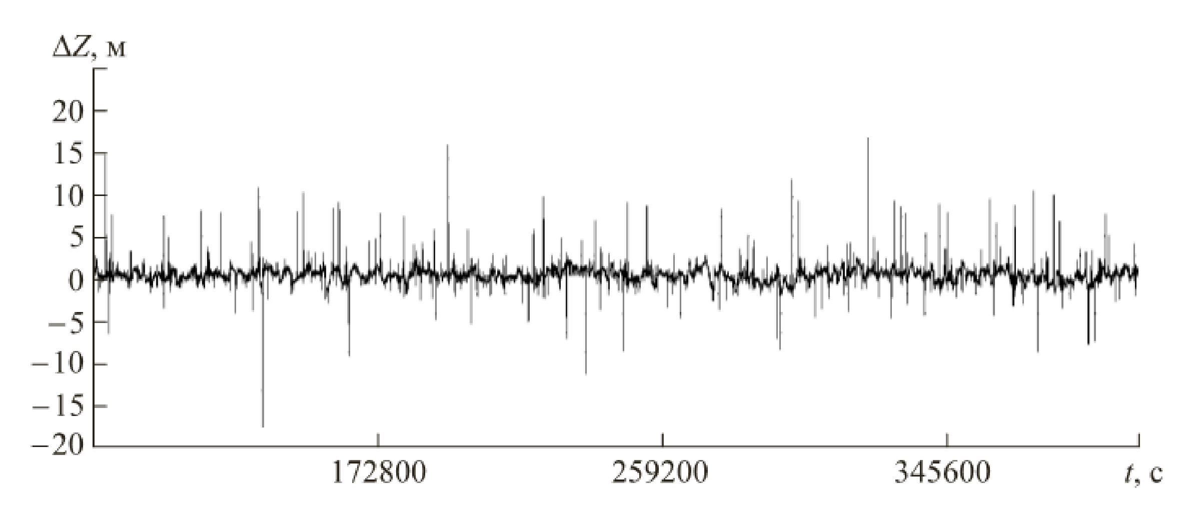


Рис. 8.12. Ошибка оценки орбиты с учетом влияния Луны, Солнца, смещения оси вращения Земли

Из приведенных графиков следует, что учет смещения полюса приводит к уменьшению амплитуды рассогласования ΔZ с ~4 до ~2 м, а дополнительный учет влияния Луны и Солнца обеспечивает отсутствие колебаний рассогласования измерений и оценки.

Влияние на точность формируемой оценки орбиты сил солнечного давления и прецессии оси вращения Земли незначительное. Выделить это влияние на фоне ошибок измерений проблематично.

На рис. 8.11 рассогласование между большинством измерений и оценкой орбиты (полученной с учетом смещения полюса Земли и влияния Луны и Солнца) лежит в диапазоне ±1...2 м. Это экспериментально подтверждает, что при учете в модели движения КА гравитационного поля Земли до порядка 72×72, смещения полюса Земли и влияния Луны и Солнца, а также реализации самонастройки фильтра на реальное аэродинамическое торможение для низкоорбитальных КА, точность формируемой оценки орбиты по положению может достигать ~2 м.

8.5. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от постоянной времени фильтра

Полученные ранее результаты точности оценки орбиты низкоорбитального КА по измерениям АСН не учитывают возмущение орбиты от работы двигателей КА. Анализ точности формируемой оценки орбиты проведен для постоянной времени фильтра $T = 5500$ с (~1 виток). Такая постоянная времени может быть выбрана для участков орбиты, на которых не работают двигатели. Например, МКС большую часть времени полета находится в околоорбитальной ориентации, поддерживаемой с помощью гиродинов. При этом разгрузка гиродинов выполняется с помощью гравитационного момента незначительным отклонением осей МКС от равновесного положения. Двигатели ориентации в этом случае не используются. Коррекция орбиты МКС проводится периодически для подъема орбиты в среднем ~1 раз в месяц. При работе двигателей возникает возмущение орбиты, приводящее к значительному расхождению реальной орбиты и ее оценки. Уменьшение этого расхождения может быть достигнуто снижением постоянной времени фильтра. Поэтому интерес представляет исследование зависимости точности формируемой оценки орбиты КА от постоянной времени.

Ниже приведены результаты такого исследования, полученные по лётным данным АСН-М МКС. Анализ проводился путем сравнения оценок орбиты для постоянных времени T, равных 0, 30, 100 и 1000 с с идеальной орбитой, за которую принималась оценка орбиты с постоянной времени, равной 1. На рис. 8.13 представлены графики ошибок координат ΔX, ΔY, ΔZ сформированных оценок в ОСК, а на рис. 8.14 — графики ошибок скорости ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z.

Графики на рис. 8.13, *а* и 8.14, *а* относятся к ошибкам измерений АСН при $T = 0$. Из этих рисунков видно, что в некоторых случаях ошибки измерений по положению превышают 20 м, по скорости — 20 см/с.

При постоянной времени фильтра $T = 30$ с (рис. 8.13, *б* и 8.14, *б*) ошибки оценки по координатам в целом близки к ошибкам измерений. При этом несколько «обрезаются» кратковременные всплески ошибок, в результате чего максимальные ошибки не превышают 15 м.

В графиках ошибок оценки скорости появляется множество дополнительных всплесков амплитудой до 20 см/с, отсутствующих в графиках ошибок измерений скорости, которые обусловлены ошибками измерений координат, переходящими в ошибки оценки скорости при малых постоянных времени фильтра.

При постоянной времени фильтра $T = 100$ с (рис. 8.13, *в* и 8.14, *в*) ошибки оценки по координатам в целом остаются близкими к ошибкам измерений. При этом наблюдается «сглаживание» кратковременных всплесков ошибок, максимальные значения которых составляют 10…12 м.

В графиках ошибок оценки скорости «сглаживаются» кратковременные всплески, значения ошибок на большей части траектории находится в диапазоне ±3 см/с, максимальные ошибки составляют 5...7 см/с.

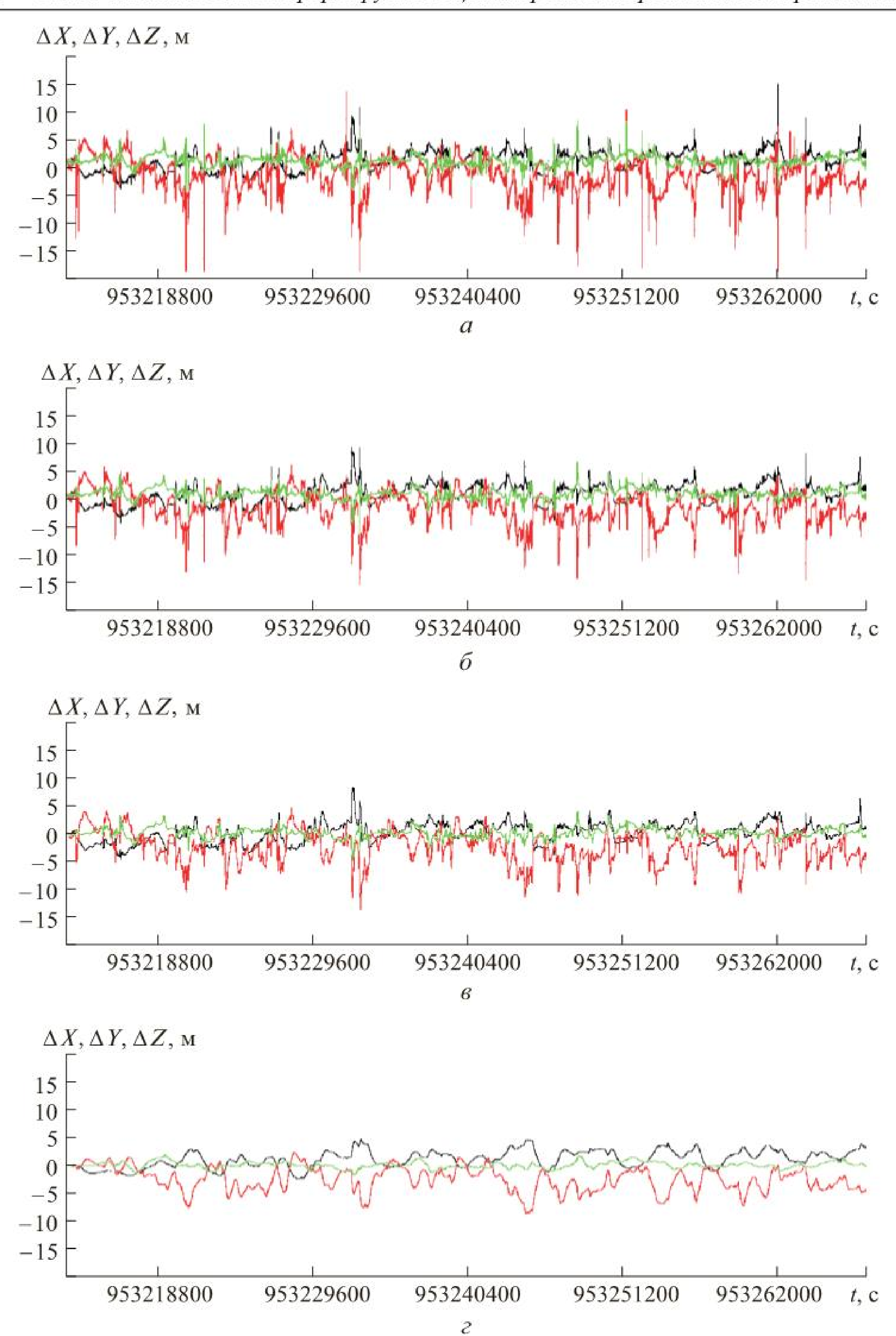
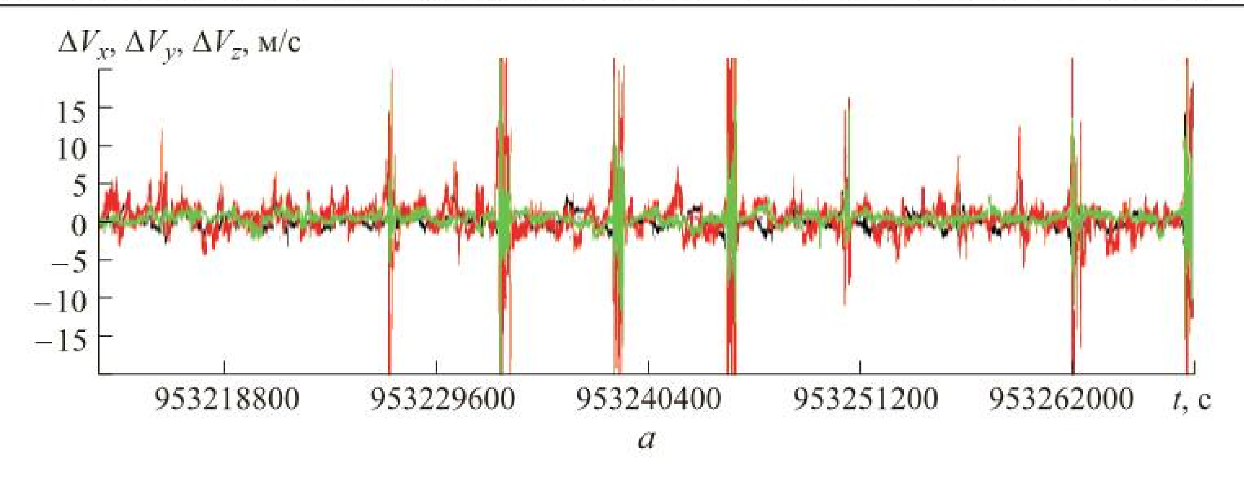
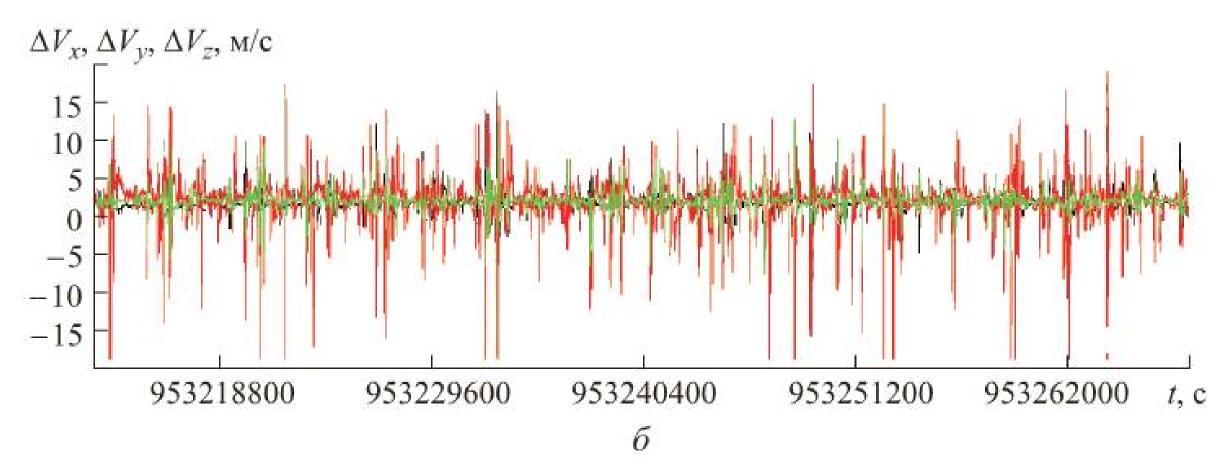


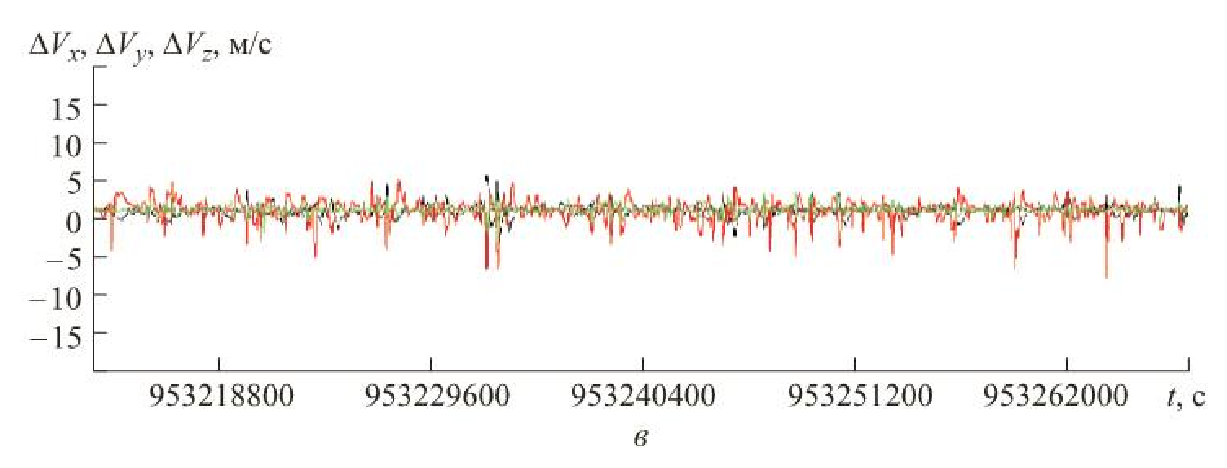
Рис. 8.13. Ошибки оценки орбиты по координатам для разных значений постоянной времени:
а — $T = 0$; *б* — $T = 30$ с; *в* — $T = 100$ с; *г* — $T = 1000$ с



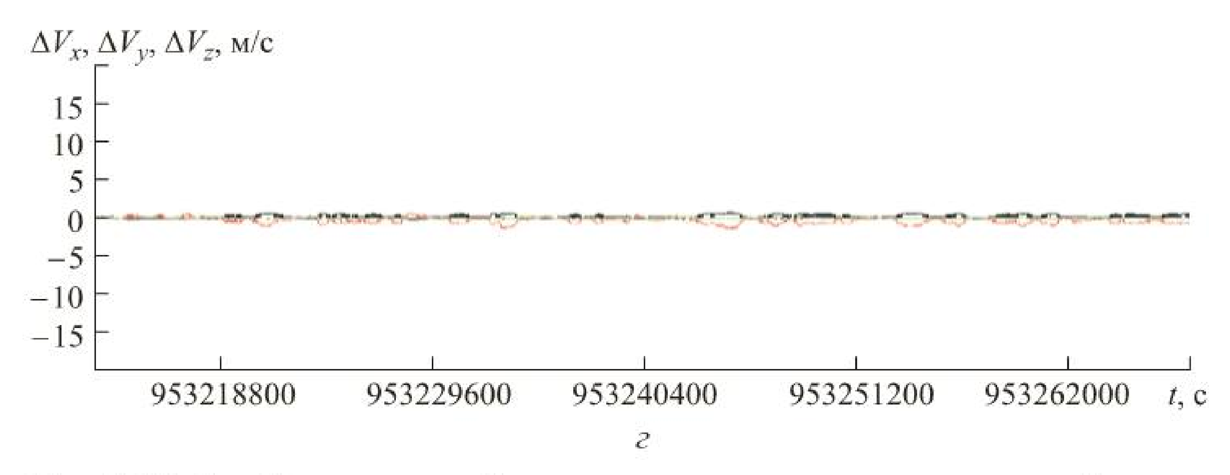
а



б



в



г

Рис. 8.14. Ошибки оценки орбиты по скорости для разных значений постоянной времени:
а — $T = 0$; *б* — $T = 30$ с; *в* — $T = 100$ с; *г* — $T = 1000$ с

При постоянной времени фильтра 1000 с (рис. 8.13, *г* и 8.14, *г*) всплески ошибок оценки по координатам «сглаживаются», значения ошибок на большей части траектории находится в диапазоне ±5 м, максимальные ошибки не превышают 8 м.

Ошибки оценки скорости на большей части траектории находятся в диапазоне ±1 см/с, максимальные ошибки не превышают 2 см/с.

Таким образом, приведенные выше графики демонстрируют уровень ошибок формируемой оценки орбиты по координатам и скорости в зависимости от значения постоянной времени фильтра, выбор которой является важным элементом проектирования системы автономной навигации.

Контрольные вопросы

1. Как зависит оценка орбиты МКС от ошибок измерений АСН-М по результатам лётных испытаний?
2. Как зависит оценка орбиты МКС по результатам лётных испытаний от ошибок модели гравитационного поля Земли?
3. Как зависит оценка орбиты МКС по результатам лётных испытаний от ошибок модели атмосферы?
4. Как зависит оценка орбиты МКС по результатам лётных испытаний от ошибок модели гравитационного воздействия Луны и Солнца?
5. Как зависит оценка орбиты МКС по результатам лётных испытаний от ошибок модели смещения полюса Земли?

Глава 9
Динамическая фильтрация «сырых» измерений аппаратуры спутниковой навигации. Зависимость точности формируемой по «сырым» измерениям оценки орбиты от возмущающих факторов

9.1. Алгоритмы динамической фильтрации измерений псевдодальности

В рассмотренной динамической фильтрации измерений АСН в качестве измеряемого вектора использовался вектор координат КА, формируемый в АСН одномоментно по сигналам видимых в этот момент НС, при этом, если число видимых НС меньше четырех, то вектор координат потребителя не формируется. Для процесса фильтрации это означает, что измерение в данный момент отсутствует. Кроме того, при неблагоприятных конфигурациях видимых НС с большим уровнем GDOP возникают повышенные ошибки формируемых координат даже при хорошем качестве измерений псевдодальностей. Эти повышенные ошибки приводят к снижению точности формируемой оценки орбиты. Поэтому целесообразно исключить промежуточный этап формирования оценки орбиты — формирование данных КСВ, а в качестве измеряемых параметров для выполнения фильтрации использовать непосредственно псевдодальности, являющиеся первичными измерениями в АСН. Однако в состав ошибок псевдодальностей входит составляющая, обусловленная ошибкой часов приемника. Исключить эту ошибку можно, взяв разность псевдодальностей двух НС, т. е. в качестве измерений использовать разность псевдодальностей. Если текущее созвездие видимых НС состоит из n спутников, то в качестве текущего вектора измерения $\overline{\xi}_{\text{и}}$ будем использовать n-мерный вектор попарных разностей псевдодальностей:

$$\overline{\xi}_{\text{и}} = \begin{pmatrix} PR_1 - PR_2 \\ PR_2 - PR_3 \\ \vdots \\ PR_n - PR_1 \end{pmatrix}. \qquad (9.1)$$

Если известна некоторая начальная оценка вектора состояния КА $\overline{\xi}_0^*$, а также эфемериды НС, то легко можно определить оценки псевдодальностей PR_i^* и, соответственно, оценку вектора измерения:

$$\bar{\xi}_и^* = \begin{pmatrix} PR_1^* - PR_2^* \\ PR_2 - PR_3 \\ \vdots \\ PR_n^* - PR_1^* \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Разность вектора измерения и его оценки обозначим как

$$\delta\bar{\xi}_и = \bar{\xi}_и - \bar{\xi}_и^*. \quad (9.3)$$

Искомую поправку вектора состояния представим в виде, аналогичном (7.22):

$$\Delta\bar{\xi}_i = \begin{pmatrix} \Delta\bar{X}_i \\ \Delta\bar{V}_i \\ a_{aero} \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

где $\Delta\bar{X}_i = \bar{X}_i - \bar{X}_{0i}^*$ и $\Delta\bar{V}_i = \bar{V}_i - \bar{V}_{0i}^*$ — искомые ошибки вектора состояния КА относительно известной оценки $\bar{X}_{0i}^*, \bar{V}_{0i}^*$; a_{aero} — искомое среднее за виток аэродинамическое торможение.

Чтобы составить систему уравнений для определения поправки к текущему вектору состояния, необходимо определить связь между расширенным вектором состояния $\Delta\bar{\xi}$ и вектором измерений. Приращение псевдодальности PR_i связано с приращением вектора положения КА следующим соотношением:

$$\Delta PR_i = \frac{\left(\bar{X}_i - \bar{X}\right)^{\mathrm{T}}}{D_i} \Delta\bar{X}, \quad (9.5)$$

где $\bar{X}_i$ — вектор координат НС в момент излучения сигнала, принятого приемником в момент измерения; $\bar{X}$ — вектор координат КА; D_i — расстояние между НС и КА, $D_i = \left|\bar{X}_i - \bar{X}\right|$.

Из соотношений (9.1)–(9.5) получим уравнение связи между вектором измерения и ошибкой вектора координат:

$$\delta\bar{\xi}_и = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_1^*} - \dfrac{\left(\bar{X}_2 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_2^*} \\ \vdots \\ \dfrac{\left(\bar{X}_n - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_n^*} - \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_1^*} \end{pmatrix} \Delta\bar{X}, \quad (9.6)$$

где $\bar{X}^*$ — оценка вектора координат КА; $D_i^* = \left|\bar{X}_i - \bar{X}^*\right|$.

Обозначим

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_1^*} - \dfrac{\left(\bar{X}_2 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_2^*} \\ \vdots \\ \dfrac{\left(\bar{X}_n - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_n^*} - \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_1^*} \end{pmatrix}. \tag{9.7}$$

Матрица направляющих косинусов C имеет размер $n\times3$, тогда уравнение (9.6) можно представить как

$$\bar{\xi}_{\text{и}} = C\Delta\bar{X}. \tag{9.8}$$

Учитывая, что $\Delta\bar{X} = \mathrm{A}\Delta\bar{\xi}$, уравнение (9.8) можно записать в виде

$$\delta\bar{\xi}_{\text{и}} = CA\Delta\bar{\xi}, \tag{9.9}$$

где $A = (E_3 0_{3\times4})$ — матрица размером 3×7; E_3 — единичная матрица размером 3×3; $0_{3\times4}$ — нулевая матрица размером 3×4.

Уравнение (9.9) определяет связь между вектором измерений, выполненных в один момент времени, и ошибкой вектора состояния. Для серии из m измерений можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\delta\bar{\xi}_{\text{и}1} = C_1 \mathrm{A}\,\Delta\bar{\xi}_1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\delta\bar{\xi}_{\text{и}m} = C_m \mathrm{A}\,\Delta\xi_m. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Система уравнений (9.10) аналогична системе уравнений (7.23) с той лишь разницей, что в правой части каждого уравнения системы (9.10) дополнительно появляется матрица направляющих косинусов C_i.

Если в системе уравнений (7.23) связь между вектором измерений и вектором состояния обеспечивает матица A, то в системе уравнений (9.10) эту связь обеспечивают матрицы C_iA. Поэтому решение системы (9.10) может быть выполнено по алгоритму, аналогичному алгоритму (7.26) с заменой матрицы A на матрицу C_iA. Тогда алгоритм формирования оценки вектора состояния на $(m+1)$-й шаг через параметры m шага будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\bar{P}_{m+1} = A^{\mathrm{T}} C_{m+1}^{\mathrm{T}} \left(\bar{\xi}_{\text{и}m+1} - \hat{\xi}_{m+1}^*\right); \\ &W_{m+1} = \lambda^2 B_{mm+1}^{-1\,\mathrm{T}} W_m B_{mm+1}^{-1} + A^{\mathrm{T}} C_{m+1}^{\mathrm{T}} C_{m+1} A; \\ &\Delta\bar{\xi}_{m+1}^* = W_{m+1}^{-1} \bar{P}_{m+1}; \\ &\bar{\xi}_{m+1}^* = \hat{\xi}_{m+1}^* + \Delta\bar{\xi}_{m+1}^*. \end{aligned} \tag{9.11}$$

На нулевом шаге матрица W_0 — нулевая матрица размером 7×7; $\hat{\xi}_{m+1}^*$ — оценка вектора измерения на шаге $(m + 1)$, полученная из оценки вектора состояния $\bar{\xi}_m^*$, сформированного на m-м шаге путем прогноза; $\lambda = T/(T+1)$, где T — постоянная времени фильтра.

Алгоритм (9.11) позволяет осуществлять коррекцию текущего вектора состояния КА при неполной системе измерений (число НС меньше четырех), а также при любых уровнях GDOP (включая бесконечность).

Для формирования вектора измерений достаточно, чтобы на текущем шаге были проведены достоверные измерения псевдодальностей хотя бы для двух НС. Если число НС меньше двух или на текущем шаге вектор измерений отсутствует, то в алгоритме (9.11) матрица C_{m+1} принимается равной нулю.

Алгоритм (9.11) позволяет точно оценить орбиту КА по «сырым» измерениям АСН в случае, если измерения выполняются абсолютно точно и известна модель движения КА. В реальных условиях ошибки измерений и ошибки модели приводят к ошибкам оценки орбиты. Ниже исследована зависимость точности формируемой оценки от ошибок измерений и точности моделирования движения КА при выполнении динамической фильтрации по приведенным в предыдущем разделе алгоритмам, а также сравнение точности этих оценок с точностью оценок орбит, формируемых по измерениям КСВ.

9.2. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок измерений и числа навигационных спутников в группировке

В 9.1 было высказано предположение, что формирование оценки орбиты динамической фильтрацией по «сырым» измерениям должно обеспечить точность выше по сравнению с оценкой, формируемой по КСВ. Проверка этого утверждения была выполнена моделированием работы АСН для орбиты МКС. При моделировании рассматривался альманах из 30 НС GPS. МКС находилась в орбитальной ориентации, антенна АСН при этом была направлена в зенит. Моделировались максимально возможные ошибки измерений АСН, включая ионосферные ошибки для года с максимальной солнечной активностью и ошибки, обусловленные переотражениями сигналов НС от элементов конструкции МКС. В процессе динамической фильтрации была реализована точная модель движения МКС. На рис. 9.1 приведены графики числа НС, сигналы которых попадают в поле зрения антенны и используются для решения навигационной задачи (рис. 9.1, *а*), графики ошибок (относительно ОСК) оценки орбиты, сформированной по КСВ (рис. 9.1, *б*), а также графики ошибок оценки орбиты, сформированной по «сырым» измерениям (рис. 9.1, *в*).

Из рисунка видно, что среднее число видимых антенной АСН составило 8–9 НС, максимальное число НС достигало 11–12, минимальное 5–6 (хотя есть короткий участок, где число НС достигало 3). Для оценки, формируемой по КСВ (см. рис. 9.1, *б*) ошибки по вертикали (ΔY) и боковой дальности (ΔZ) находились в диапазоне ±2 м, по продольной дальности — в диапазоне ±5 м. Ошибки оценки, формируемой по «сырым» измерениям (см. рис. 9.1, *в*),

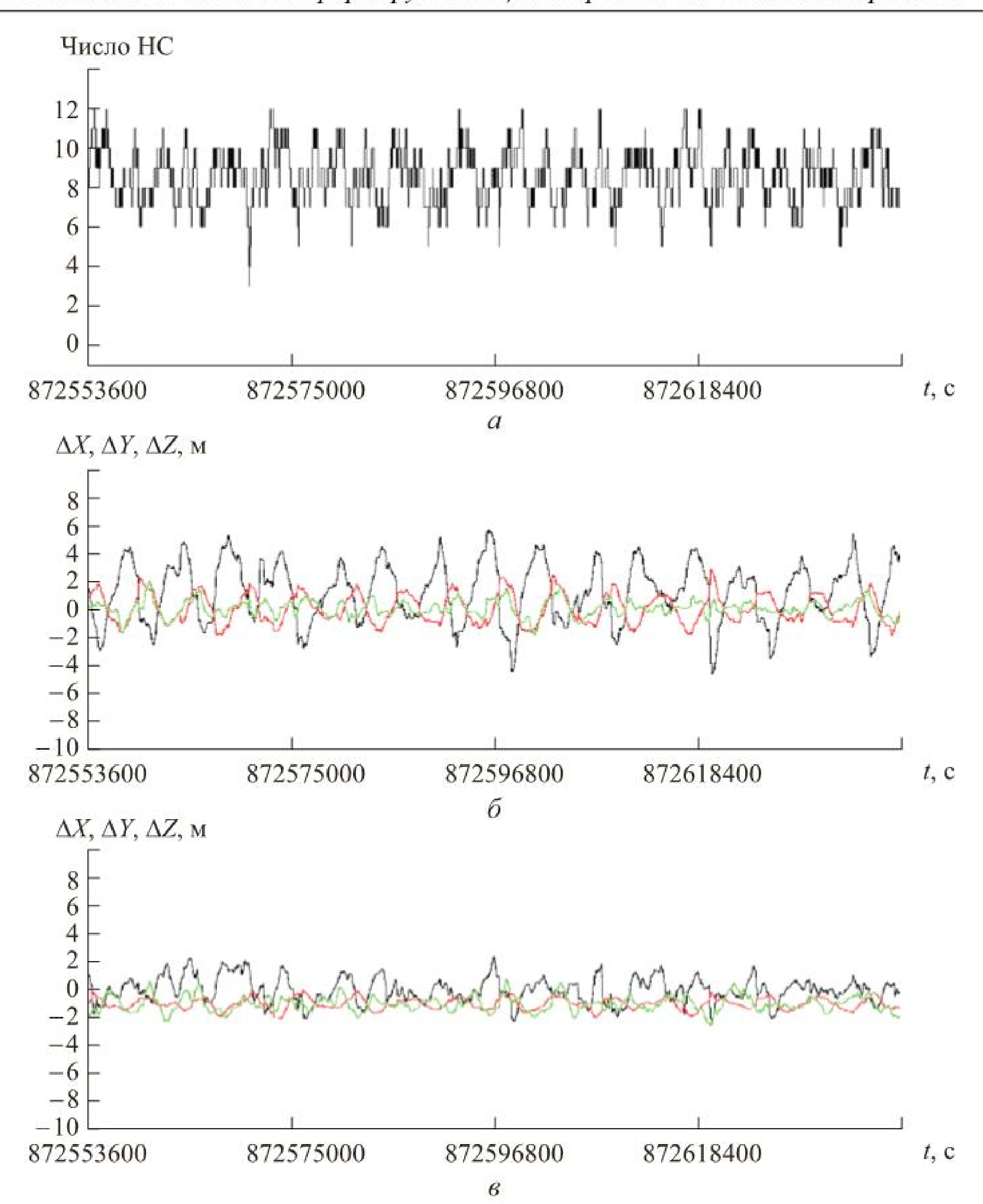


Рис. 9.1. Число НС (*а*), ошибки оценки, сформированной по КСВ (*б*), и ошибки оценки, сформированной по «сырым» измерениям (*в*) для группировки из 30 НС

примерно в 2 раза меньше ошибок оценки, формируемой по КСВ, т. е. результаты моделирования подтвердили предположение о повышении точности оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям.

Графики, приведенные на рис. 9.1, соответствуют 30 НС в спутниковой группировке. Обычно такое число НС функционирует в системе GPS. В системе ГЛОНАСС максимальное число НС в группировке равно 24. Уменьшение числа спутников приводит к снижению числа одновременно видимых антенной АСН спутников, из-за чего увеличивается уровень GDOP и, следо-

вательно, снижается точность формируемых КСВ. Это приводит к снижению точности оценки орбиты, формируемой по КСВ.

На рис. 9.2 для группировки из 24 НС приведены графики, аналогичные графикам на рис. 9.1. Из рисунка видно, что среднее число видимых НС составляет ~7 спутников, т. е. на 1–2 спутника меньше, чем для группировки из 30 НС. Максимальное число НС составило 9–10 спутников, минимальное — 3–5. Соответственно, увеличились ошибки оценки орбиты, формируемой по КСВ (рис. 9.2, *б*). Наблюдаются резкие всплески ошибок: ошибки по

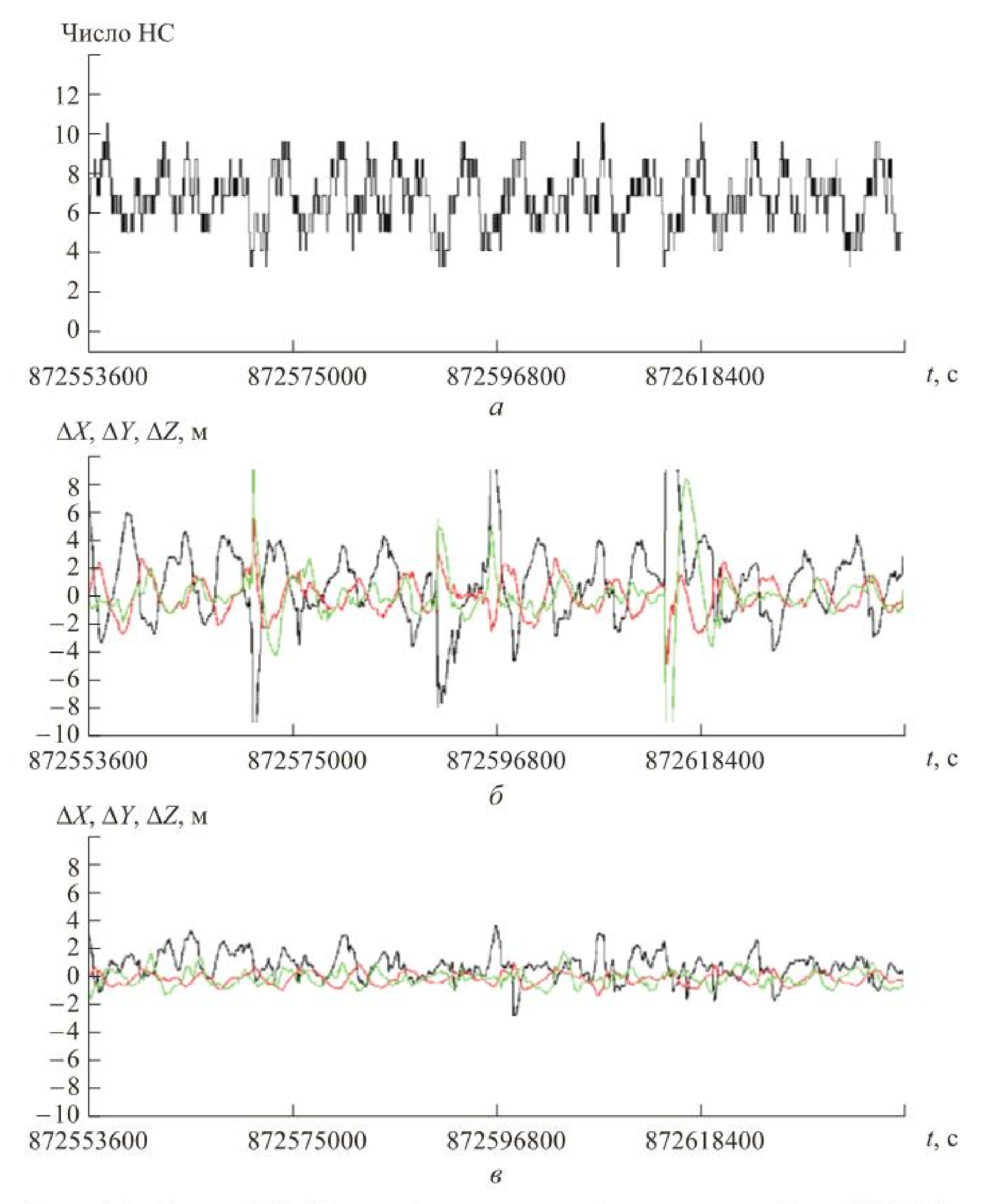


Рис. 9.2. Число НС (*а*), ошибки оценки, сформированной по КСВ (*б*), и ошибки оценки, сформированной по «сырым» измерениям (*в*) для группировки из 24 НС

продольной дальности достигали ~20 м, по вертикали ~10 м. Ошибки оценки, формируемой по «сырым» измерениям, практически не изменились (рис. 9.2, *в*): ошибки по вертикали (ΔY) и боковой дальности (ΔZ) лежат в диапазоне ±2 м, по продольной дальности (ΔX) — в диапазоне ±4 м, т. е. точность оценки, формируемой по «сырым» измерениям, для 24 НС примерно в 5 раз выше точности оценки, формируемой по КСВ.

Полученный результат показывает, что для системы ГЛОНАСС, включающей 24 НС, метод динамической фильтрации «сырых» измерений обеспечивает существенное повышение точности формируемой оценки орбиты по сравнению с методом динамической фильтрации КСВ.

Были рассмотрены варианты 30 и 24 НС в группировке, что соответствует количеству спутников в системах GPS и ГЛОНАСС. При этом предполагалось, что антенна АСН направлена в зенит, а ее поле зрения близко к полусфере (конус угла при вершине 170°).

В реальности, во-первых, в группировке НС может быть меньшее число спутников, во-вторых, поле зрения антенны может быть значительно меньше полусферы или существенно затенено элементами конструкции КА, в-третьих, антенна на КА может быть установлена таким образом, что в основном режиме ориентации КА она не направлена в зенит, в-четвертых, КА может иметь ориентацию, при которой антенна также не будет направлена в зенит. Во всех этих случаях число НС, попадающих в поле зрения антенны АСН, может быть значительно меньше, чем в рассмотренных случаях. Это приводит к снижению точности формируемых оценок орбиты (как при фильтрации по КСВ, так и при фильтрации по «сырым» измерениям). Ниже приведены результаты исследования точности формируемой оценки (по КСВ и «сырым» измерениям) в условиях пониженного числа НС, попадающих в поле зрения антенны АСН в процессе полета. Сокращение числа НС моделировалось уменьшением количества спутников в группировке. Были рассмотрены варианты, когда группировка состояла из 16, 8, и 4 спутников. Графики числа видимых НС, ошибок оценки по КСВ и ошибок оценки по «сырым» измерениям приведены для этих трех группировок соответственно на рис. 9.3–9.5.

Из приведенных графиков видно, что для группировки из 16 НС среднее число видимых НС составляет 4–5 спутников, а максимальное — 7–9 спутников, минимальное количество — 1–3 спутника. Отмечается достаточно много интервалов, на которых число НС < 4. В этих условиях резко возрастают ошибки оценки, формируемой по КСВ. Максимальные ошибки составляют 60...160 м. Ошибки оценки, формируемой по «сырым» измерениям не превышают 5 м, т. е. точность такой оценки в десятки раз выше оценки, формируемой по КСВ.

Похожий результат наблюдается для группировки из 8 НС. В этом случае среднее число видимых НС составляет 2–3 спутника, максимальное — 4, минимальное — 0–1 спутник. Длительность интервалов, на которых могут фор-

мироваться КСВ, составляет 5…7 % от общего времени полета. Тем не менее, формирование оценки орбиты по КСВ выполняется, хотя ошибки этой оценки так же, как и в предыдущем случае, достигают ~160 м. Оценка орбиты по «сырым» измерениям выполняется с высокой точностью. Ошибки оценки по продольной дальности (ΔX) не превышают 7 м, по вертикали и боковой дальности (ΔY, ΔZ) — 4 м.

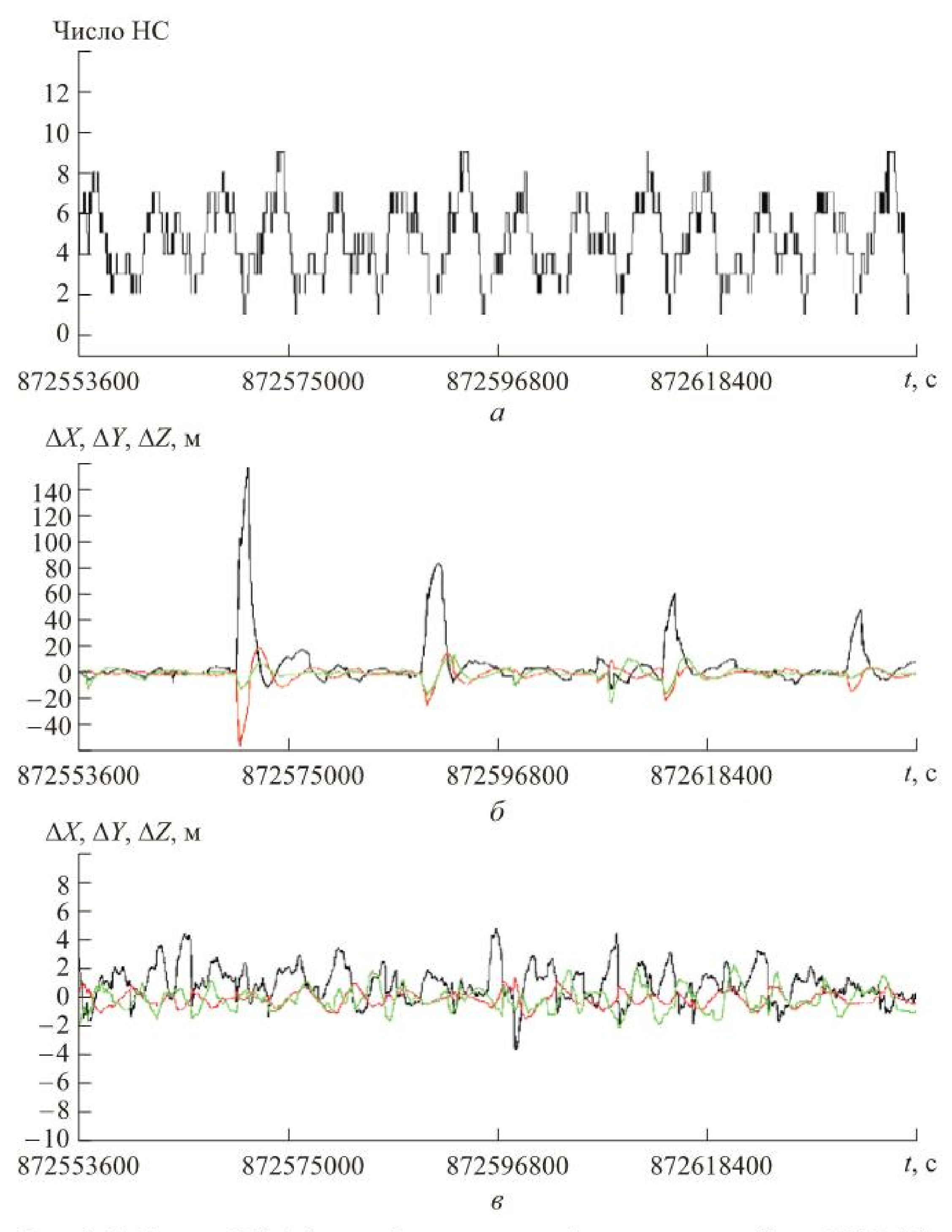


Рис. 9.3. Число НС (*а*), ошибки оценки, сформированной по КСВ (*б*), и ошибки оценки, сформированной по «сырым» измерениям (*в*) для группировки из 16 НС

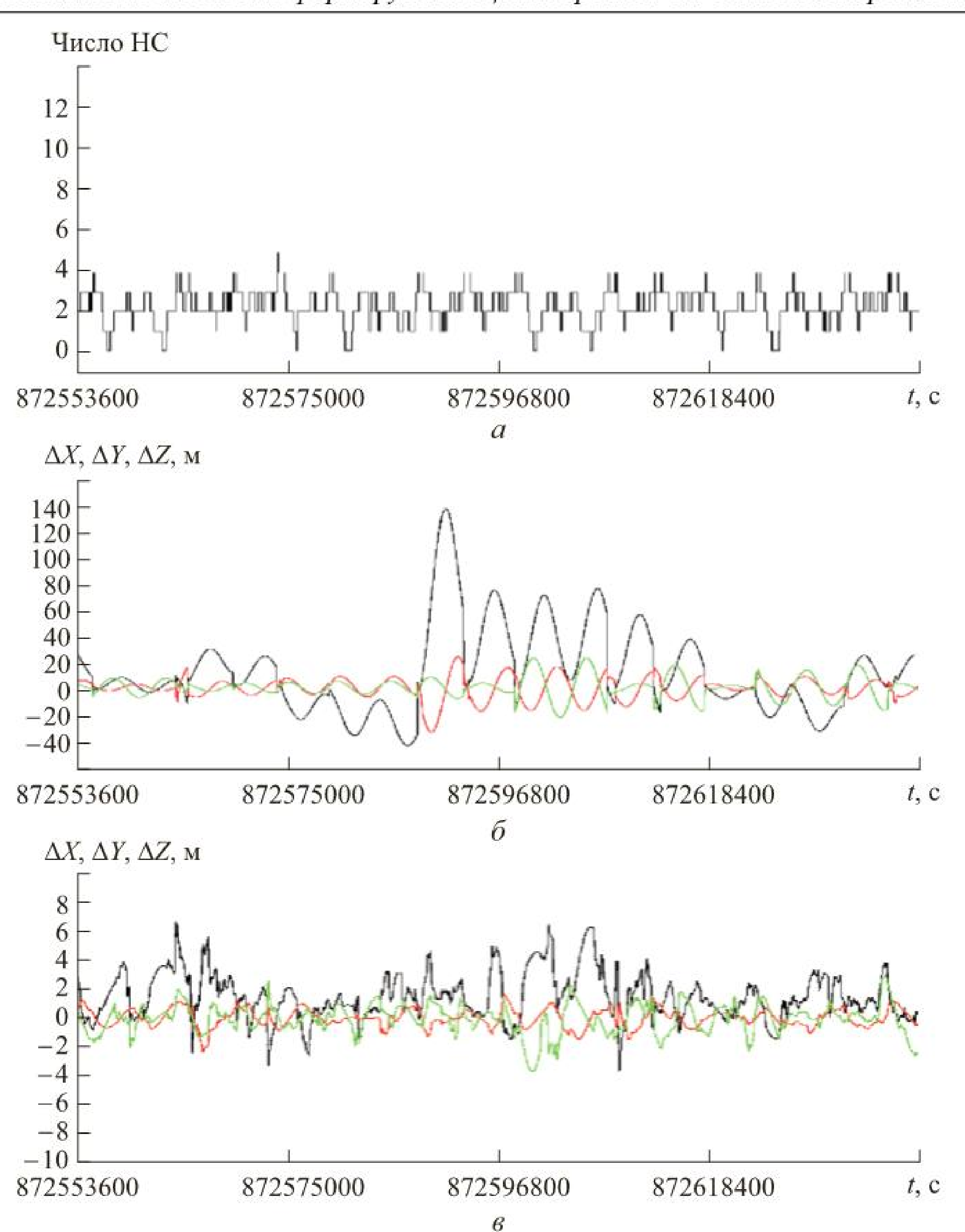


Рис. 9.4. Число НС (*а*), ошибки оценки, сформированной по КСВ (*б*), и ошибки оценки, сформированной по «сырым» измерениям (*в*) для группировки из 8 НС

Для группировки из 4 НС число видимых НС составляет 1–2 спутника, максимальное — 3 спутника. В этих условиях КСВ не могут быть сформированы, соответственно, не может быть сформирована орбита по КСВ. По «сырым» измерениям оценка орбиты продолжает формироваться и в этом случае, хотя и с меньшей точностью — ошибки оценки достигают 20 м.

Таким образом, результаты проведенного моделирования показали, что точность оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям, заметно выше точности оценки, формируемой по КСВ. Разница достигаемой точности существенно зависит от числа НС в группировке.

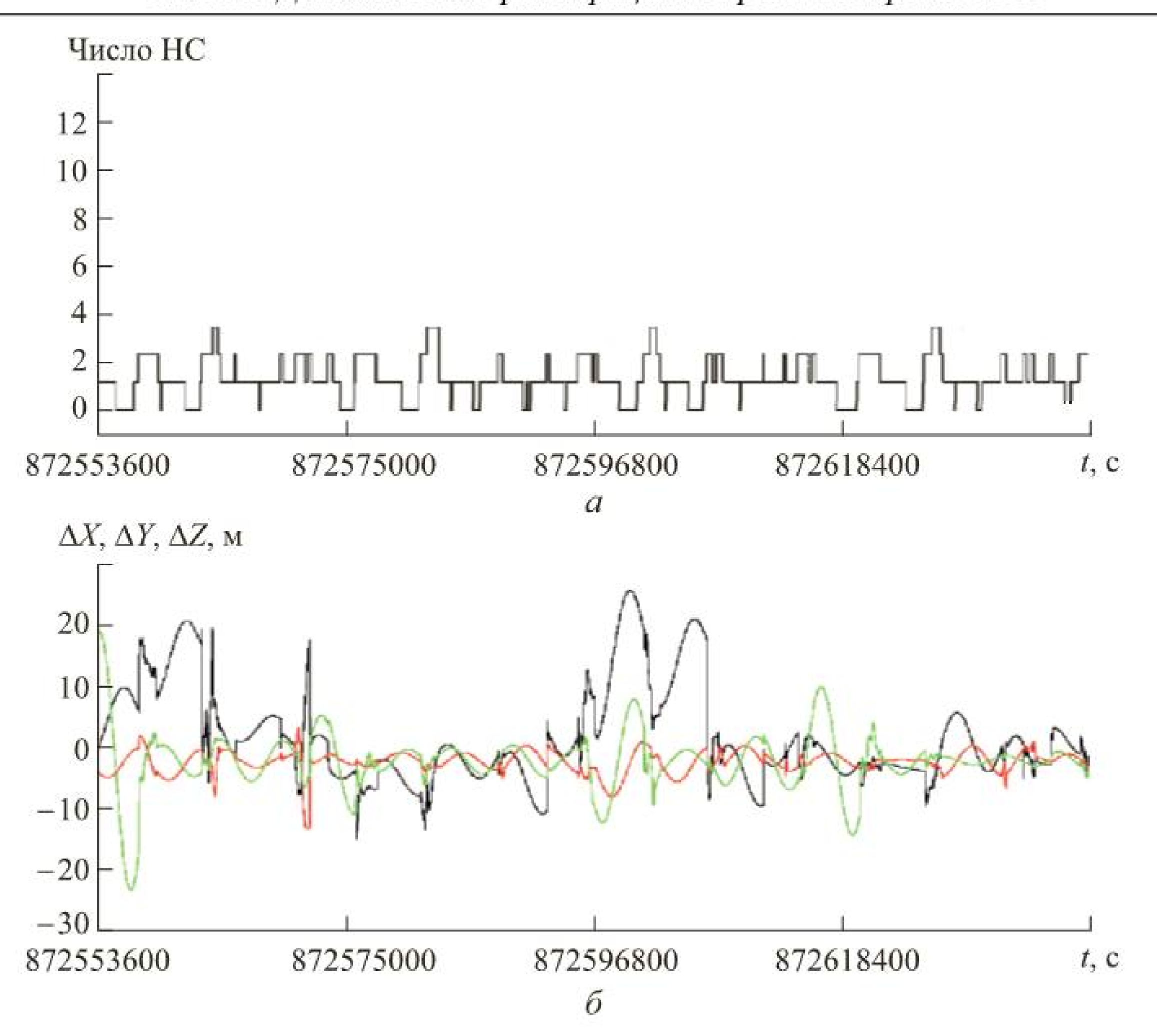


Рис. 9.5. Число НС (*а*) и ошибки оценки, сформированной по «сырым» измерениям для группировки из четырех НС (*б*)

Для зенитной антенны АСН примерные значения ошибок формируемых оценок, обусловленные ошибками измерений в зависимости от числа НС в группировке, приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Значения ошибок формируемых оценок, обусловленные ошибками измерений в зависимости от числа НС в группировке

Число НС в группировке	Ошибки оценки орбиты, формируемой по КСВ, м	Ошибки оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям, м
30	4	2
24	20	3
16	160	4
8	160	7
4	—	20

Устойчивость алгоритмов динамической фильтрации по «сырым» измерениям к снижению числа НС в группировке или числа одновременно видимых НС вследствие углового маневрирования КА является важным каче-

ством для навигации КА. Во-первых, этот алгоритм обеспечивает высокоточную оценку орбиты КА практически при любом количестве отказов спутников в навигационной группировке, во-вторых, высокая точность оценки орбиты обеспечивается при значительном угловом маневрировании КА, приводящем к резкому снижению одновременно видимых НС.

9.3. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от ошибок модели гравитационного поля Земли

В 7.2 было рассмотрено влияние точности формирования модели гравитационного поля Земли на точность формируемой оценки орбиты по измерениям КСВ. При формировании оценки орбиты по «сырым» измерениям ошибки оценки, обусловленные ошибками модели поля, могут отличаться от соответствующих ошибок оценки, формируемой по КСВ. Поэтому такое исследование путем моделирования было проведено и для оценки, формируемой по «сырым» измерениям. Моделирование проведено для того же участка орбиты МКС, что и моделирование по КСВ.

На рис. 9.6 приведены графики ошибок оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям, для модели гравитационного поля Земли, реализуемой в процессе динамической фильтрации порядка 8×8.

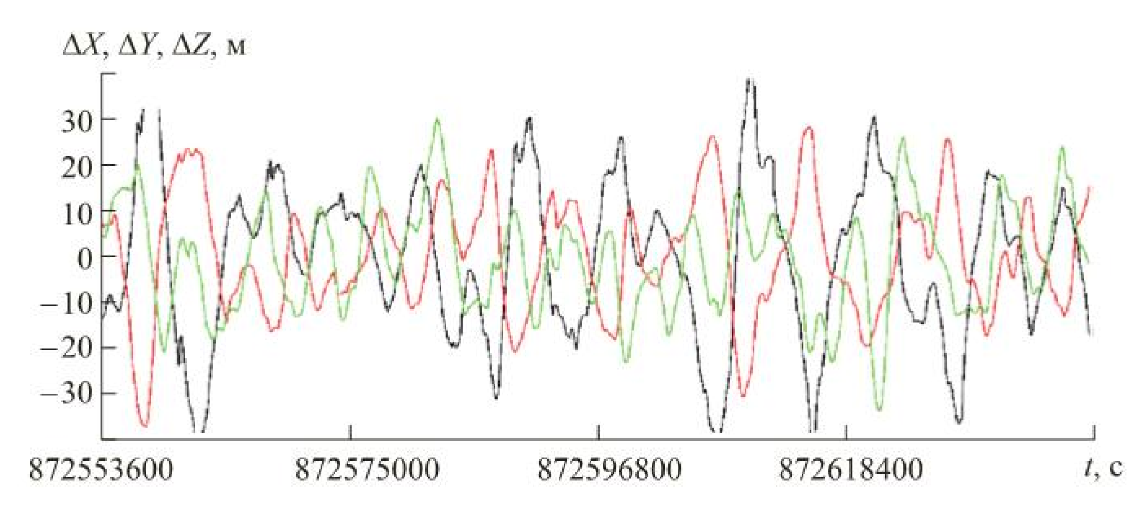


Рис. 9.6. Составляющая ошибки оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям, обусловленная ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 8×8

Сравнив графики ошибок оценки орбиты по «сырым» измерениям (см. рис. 9.6) с аналогичными графиками ошибок оценки по КСВ (см. рис. 7.15), можно отметить, что они практически совпадают. При этом оценки имеют незначительную шумовую составляющую, обусловленную изменениями во времени числа видимых НС и, соответственно, изменением веса измерений в процессе фильтрации. При исследовании точности оценки по КСВ предполагалось, что измерения КСВ абсолютно точные и непрерывные с частотой 1 Гц. Поэтому вес каждого измерения был одинаков, а графики ошибок оценки — плавные.

Аналогичный результат получен для модели гравитационного поля Земли порядка 36×36. На рис. 9.7 приведены графики ошибок оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям. Сравнив их с аналогичными графиками ошибок оценки по КСВ (см. рис. 7.16), можно отметить, что ошибки практически совпадают. С повышением точности модели поля уменьшилась и шумовая составляющая ошибки оценки.

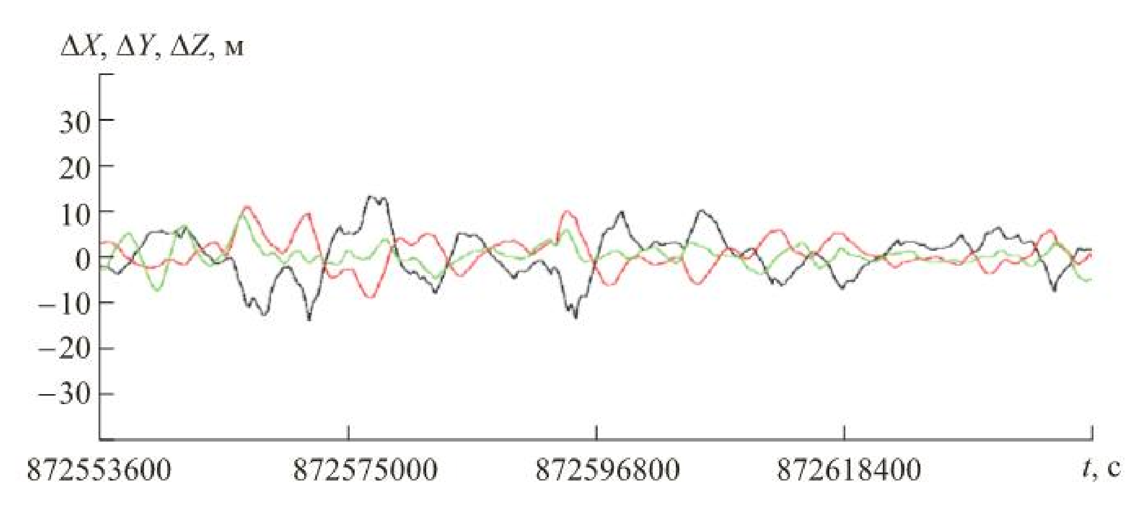


Рис. 9.7. Составляющая ошибки оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям, обусловленная ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 36×36

На рис. 9.8 приведены графики ошибок оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям для модели гравитационного поля порядка 72×72.

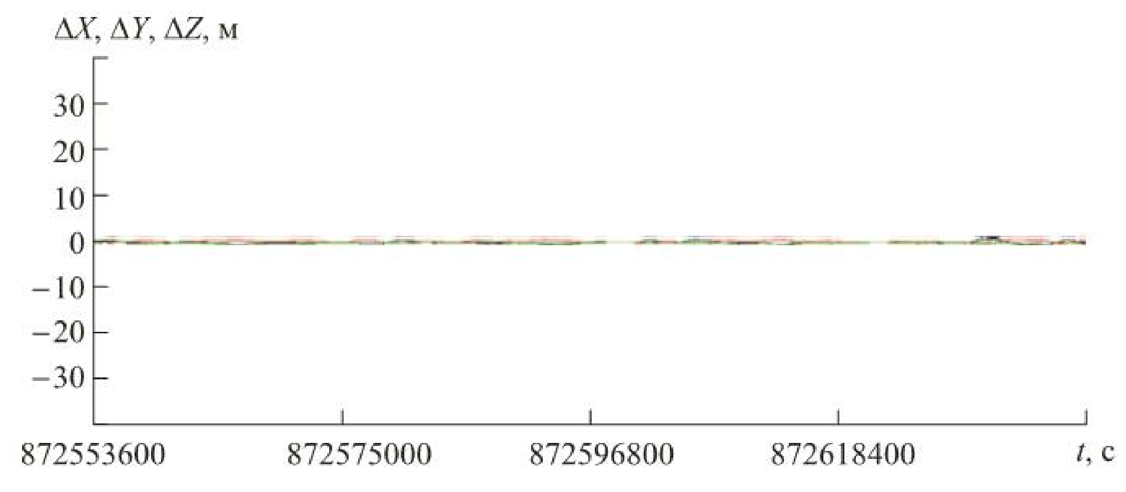


Рис. 9.8. Составляющая ошибки оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям, обусловленная ошибками модели гравитационного поля Земли порядка 72×72

Из рисунка следует, что ошибки оценки, обусловленные такой моделью поля, не превышают 1 м, что соответствует ошибкам оценки, формируемой по КСВ (см. рис. 7.17), практически исчезла шумовая составляющая ошибки оценки, наблюдавшаяся для моделей гравитационного поля Земли порядка 8×8 и 36×36.

9.4. Зависимость точности формируемой оценки орбиты от аэродинамического торможения КА

Для низкоорбитальных КА аэродинамическое торможение является вторым по степени влияния на орбиту КА возмущающим фактором. Оно существенно превышает возмущения от Луны и Солнца, от смещения полюса Земли и т. п. В то же время это возмущение моделируется и прогнозируется с большой ошибкой, из-за которой учет более мелких возмущающих факторов теряет всякий смысл. В 7.3 было рассмотрено влияние аэродинамического торможения на точность оценки орбиты, формируемой по КСВ (см. рис. 7.18). Анализ проведен путем моделирования, аэродинамическое торможение задавалось в виде средней константы, равной 10^{-6} м/с^2, на которую наложена синусоидальная модуляция амплитудой $0{,}5\cdot10^{-6}$ м/с^2 и частотой 1 виток. Выбранное значение среднего аэродинамического торможения соответствует максимальному значению аэродинамического торможения МКС. Модуляция среднего значения имитирует повышение аэродинамического торможения на светлой части орбиты и уменьшение на затененной части. В результате такой модуляции аэродинамическое торможение в тени оказывается в 4 раза меньше, чем на свету, что примерно соответствует перепадам плотности атмосферы в тени и на свету (см. табл. 2.3).

Моделирование для этого же представления аэродинамического торможения проведено и для алгоритмов формирования оценки орбиты по «сырым» измерениям. На рис. 9.9 показаны графики ошибок оценки орбиты относительно ОСК. Из графиков видно, что аэродинамическое торможение обусловливает ошибку по продольной дальности $\Delta X \approx -20$ м, по вертикали $\Delta Y \approx 15$ м. Если при формировании по КСВ на эти средние значения ошибок

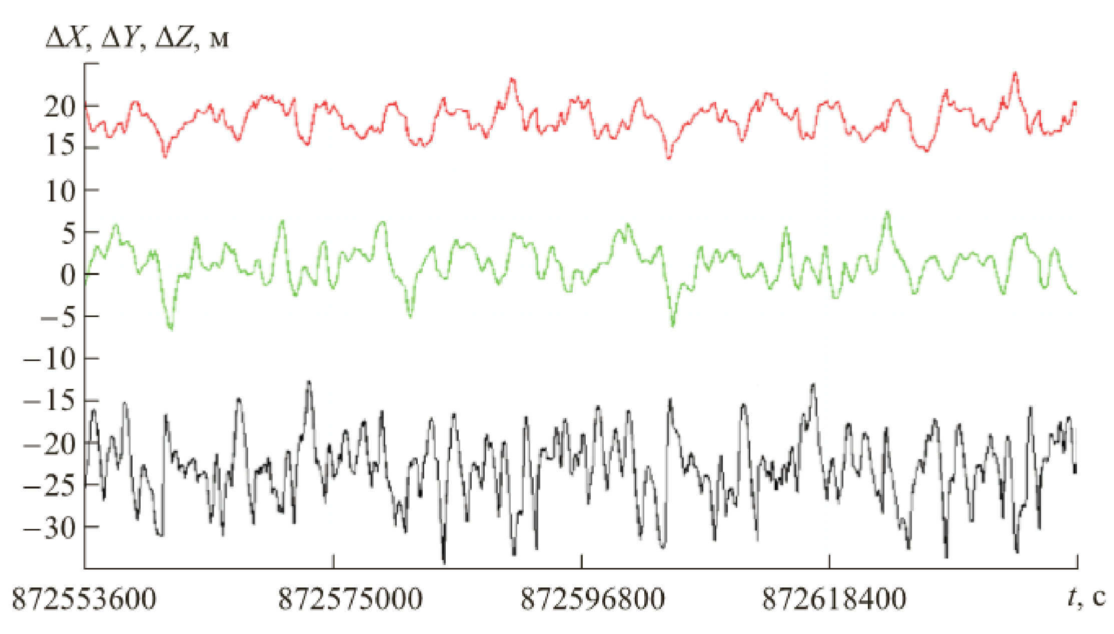


Рис. 9.9. Составляющие ошибки оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям без аэродинамической компенсации, обусловленные аэродинамическим торможением МКС в атмосфере Земли

была наложена синусоидальная составляющая амплитудой ~2 м, а по боковой дальности ΔZ ошибка была практически нулевой (см. рис. 7.18), то в данном случае для оценки по «сырым» измерениям на составляющие ошибок по всем трем осям наложена еще и шумовая составляющая амплитудой ~5 м, обусловленная переменным весом измерений вследствие изменения числа видимых НС в процессе полета КА.

Рассмотренные в 7.4 алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН с самонастройкой на текущее аэродинамическое торможение позволили исключить постоянное смещение ошибок оценки орбиты по осям X и Y, обусловленных аэродинамическим торможением (см. рис. 7.23). В результате ошибки оценки орбиты по осям X и Y представляли собой синусоиды амплитудой ~2 м и частотой один виток. Составляющая ошибки по оси Z оставалась нулевой.

При выводе алгоритмов динамической фильтрации по «сырым» измерениям аэродинамическое торможение изначально было введено в искомый вектор состояния (9.4). Поэтому при реализации этих алгоритмов автоматически выполняется оценка аэродинамического торможения и его компенсация в модели движения КА. Благодаря этому существенно снижается аэродинамическая составляющая ошибки оценки орбиты.

На рис. 9.10 приведены графики аэродинамических ошибок оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям с самонастройкой на текущее аэродинамическое торможение.

Так же, как и при формировании оценки орбиты по КСВ, для оценки по «сырым» измерениям ошибки оценки по осям X и Y близки к синусоидам амплитудой ~2 м, ошибки по оси Z не превышают 0,3 м. На эти ошибки также наложена шумовая составляющая амплитудой ~0,3 м, обусловленная измене-

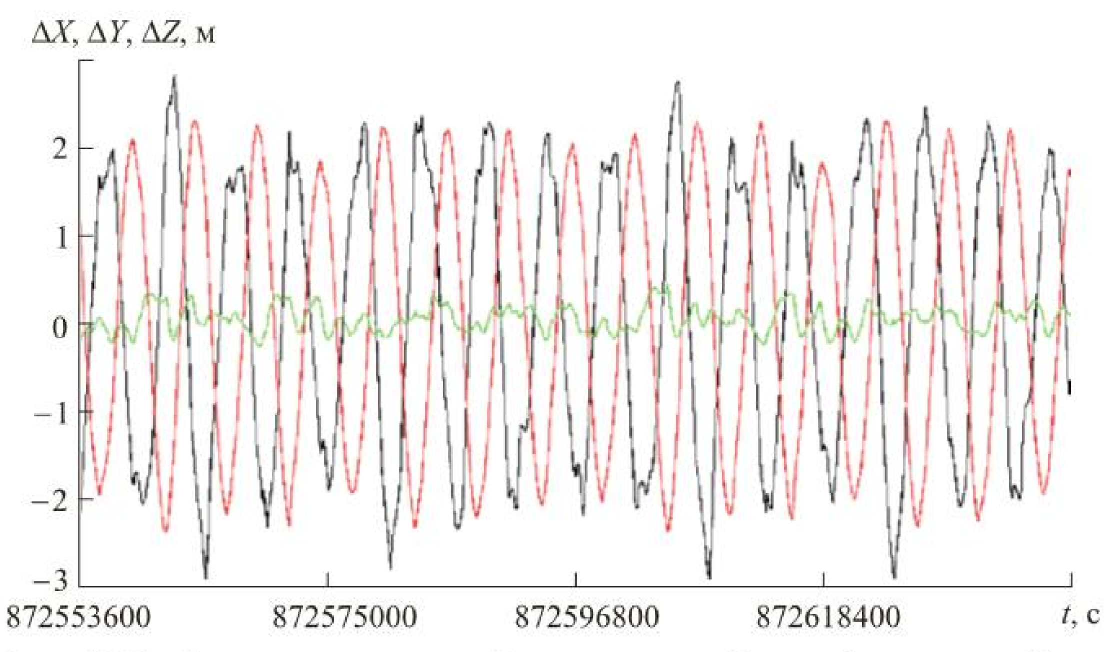


Рис. 9.10. Составляющие ошибки оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям с аэродинамической компенсацией, обусловленные аэродинамическим торможением МКС в атмосфере Земли

нием во времени числа измерений (т. е. видимых НС). Учитывая малость шумовой составляющей, можно считать, что при динамической фильтрации по «сырым» измерениям с аэродинамической самонастройкой ошибки формируемой оценки орбиты соответствуют ошибкам оценки орбиты, формируемой по КСВ.

9.5. Влияние на точность формируемой оценки орбиты гравитационных возмущений от Луны и Солнца, солнечного давления, параметров вращения Земли

Установлено, что ошибки оценки орбиты, формируемой по «сырым» измерениям, близки к ошибкам оценки, формируемой по КСВ, с той лишь разницей, что при формировании оценки по «сырым» измерениям ошибки оценки, обусловленные соответствующими возмущениями, имеют шумовую составляющую по амплитуде на порядок меньшую основной составляющей ошибки. Отличие ошибок оценки орбиты по «сырым» измерениям, обусловленных влиянием всех рассматриваемых мелких возмущений от соответствующих составляющих ошибок оценки орбиты по КСВ, аналогично — на основную составляющую ошибки накладывается шумовая составляющая, существенно меньшая по сравнению с основной. Но так как рассматриваемые составляющие ошибок оценки сами по себе малы, шумовыми составляющими этих ошибок можно пренебречь. Поэтому будем считать, что и при формировании оценки орбиты по «сырым» измерениям составляющие ошибок оценки, обусловленные влиянием Луны и Солнца, силами солнечного давления, параметрами вращения Земли аналогичны ошибкам оценки, формируемой по КСВ (см. рис. 7.19–7.22).

Контрольные вопросы

1. Каковы алгоритмы динамической фильтрации измерений псевдодальности?

2. Как зависит оценка орбиты, полученная методом динамической фильтрации измерений псевдодальностей, от ошибок модели гравитационного поля Земли?

3. Как зависит оценка орбиты, полученная методом динамической фильтрации измерений псевдодальностей, от ошибок модели атмосферы?

4. Как зависит оценка орбиты, полученная методом динамической фильтрации измерений псевдодальностей, от ошибок модели гравитационного воздействия Луны и Солнца?

5. Как зависит оценка орбиты, полученная методом динамической фильтрации измерений псевдодальностей, от ошибок модели смещения полюса Земли?

Глава 10
Формирование оценки орбиты в приращениях с учетом измерений БИНС и коррекцией оценки по полным «сырым» измерениям

10.1. Общие сведения

Алгоритмы формирования оценки орбиты по измерениям координат и по измерениям псевдодальностей разработаны применительно к АСН-М МКС, находящейся в пассивном полете. Они обеспечивают формирование высокоточной оценки орбиты МКС как по координатам, так и по скорости, что демонстрируют графики, приведенные на рис. 8.6. Высокая точность этих алгоритмов достигается благодаря высокоточному моделированию уравнений движения КА при фильтрации измерений с большой постоянной времени (T = 5500 с). Однако такая постоянная времени может быть реализована только на пассивных КА, движение которых можно легко смоделировать с высокой точностью. На динамичных КА, у которых часто работают двигатели, на любых КА при коррекции орбиты, а также на участках орбиты КА, где воздействуют большие возмущающие ускорения (например, при спуске в атмосфере), большие постоянные времени недопустимы.

При уменьшении постоянной времени точность оценки существенно снижается как по координатам, так и по скорости. Например, графики, приведенные на рис. 8.13 и 8.14, демонстрируют ошибки оценки орбиты МКС по координатам и скорости, формируемой при разных значениях постоянной времени. Графики показывают, что существенное повышение точности оценки орбиты достигается при постоянных времени фильтра $T > 1000$ с. А при малых постоянных времени (T = 30 с) точность оценки по координатам остается такой же, как и точность измерений АСН, а оценка по скорости значительно ухудшается. Это объясняется тем, что вектор измерений, реализуемый в рассмотренных алгоритмах, включает только измерения АСН по координатам или по псевдодальности, тогда как для динамичных объектов, допускающих фильтрацию измерений только с малой постоянной времени, повышение точности оценки может быть достигнуто за счет включения скорости в состав вектора измерений или приращений интегральных фаз, в случае фильтрации «сырых» измерений АСН.

В гл. 9 было также показано, что динамическая фильтрация псевдодальностей имеет целый ряд преимуществ по сравнению с динамической фильтрацией векторов координат, формируемых АСН. Это и более высокая точность формируемой оценки орбиты, независимость от числа НС и геометри-

ческого фактора GDOP, а также возможность формирования оценки орбиты высокоорбитальных КА. Поэтому в настоящей главе будем рассматривать динамическую фильтрацию не по координатам и скорости, а по полному составу «сырых» измерений АСН — псевдодальности и приращения интегральных фаз сигналов НС. Следует отметить, что приращения интегральных фаз за такт работы АСН (за 1 с внутренних часов АСН) определяют приращение вектора координат КА. Поэтому при динамической фильтрации полного состава «сырых» измерений АСН удобно в качестве вектора состояния КА использовать вектор координат и вектор приращения координат за такт работы АСН. В этом случае измеряемые псевдодальности непосредственно обеспечивают измерение вектора координат КА, а измеряемые приращения интегральных фаз — измерения вектора приращений координат КА. Рассмотрим алгоритмы динамической фильтрации полного состава «сырых» измерений АСН.

10.2. Алгоритмы динамической фильтрации измерений псевдодальностей и интегральных фаз

Пусть в данный момент t_i созвездие достоверно отслеживаемых НС состоит из n спутников. В качестве текущего вектора измерений будем использовать $2n$-мерный вектор

$$\bar{\xi}_{\text{и}} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{\text{и}1} \\ \bar{\xi}_{\text{и}2} \end{pmatrix}, \tag{10.1}$$

где

$$\bar{\xi}_{\text{и}1} = \begin{pmatrix} PR_1 - PR_2 \\ PR_2 - PR_3 \\ \vdots \\ PR_n - PR_1 \end{pmatrix}$$ — n-мерный вектор попарных разностей псевдодальностей; (10.2)

$$\bar{\xi}_{\text{и}2} = \begin{pmatrix} \Delta CP_1 - \Delta CP_2 \\ \Delta CP_2 - \Delta CP_3 \\ \vdots \\ \Delta CP_n - \Delta CP_1 \end{pmatrix}$$ — n-мерный вектор попарных разностей приращений интегральных фаз на i-м такте измерений АСН.

Пусть также имеется оценка вектора состояния КА $\bar{\xi}^*$ на момент времени t_i:

$$\bar{\xi}_i^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_i^* \\ \Delta\bar{X}_i^* \end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

Для низкоорбитальных КА эта оценка может быть сформирована, например, по измерениям КСВ АСН в момент t_i:

$$\bar{\xi}_i^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_{\text{КСВ}} \\ \bar{V}_{\text{КСВ}} \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

По известной оценке вектора состояния КА $\bar{\xi}_i^*$ и по известным векторам координат и скорости НС, формируемым по соответствующим эфемеридам, легко может быть определена оценка $2n$-мерного вектора измерений:

$$\bar{\xi}_{\text{и}}^* = \begin{pmatrix} PR_1^* - PR_2^* \\ \vdots \\ PR_n^* - PR_1^* \\ \Delta CP_1^* - \Delta CP_2^* \\ \vdots \\ \Delta CP_n^* - \Delta CP_1^* \end{pmatrix}, \tag{10.5}$$

где $PR_i^*, \Delta CP_i^*$ — оценки соответственно псевдодальностей и приращений интегральных фаз, полученные по оценке вектора состояния $\bar{\xi}_i^*$ и эфемеридам НС.

Пусть также $\bar{X}, \Delta\bar{X}$ — истинные значения составляющих истинного вектора состояния:

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \Delta\bar{X} \end{pmatrix}. \tag{10.6}$$

Введем векторы ошибок векторов состояния и измерений в i-й момент времени:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\xi}_i &= \bar{\xi}_i - \bar{\xi}_i^*; \\ \delta\bar{\xi}_{\text{и}i} &= \bar{\xi}_{\text{и}i} - \bar{\xi}_{\text{и}i}^*. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Если пренебречь собственно ошибками измерений, предположив, что этот вектор в АСН измеряется точно, то можно записать систему уравнений, аналогичную (9.10), связывающую ошибки вектора состояния с ошибками вектора измерений:

$$\delta\xi_{\text{и}i} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \delta\bar{\xi}_i = C_0 \delta\bar{\xi}_i, \tag{10.8}$$

где $C_0 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ — матрица размером $2n\times 6$; 0 — нулевая матрица размером $n\times 3$;

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_1^*} - \dfrac{\left(\bar{X}_2 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_2^*} \\ \vdots \\ \dfrac{\left(\bar{X}_n - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_n^*} - \dfrac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}^*\right)^{\mathrm{T}}}{D_1^*} \end{pmatrix}$$ — известная матрица направляющих косинусов размером $n\times 3$ ($\bar{X}_j$ — координаты j-го НС, определяемого по эфемеридам; $\bar{X}^*$ — оценка координат КА; $D_j^* = \left|\bar{X}_j - \bar{X}^*\right|$).

В уравнении (10.8) предполагается, что измерения псевдодальностей и интегральных фаз достоверны для всех n спутников видимого созвездия, поэтому матрица C_0 состоит из двух одинаковых матриц C.

Первые n уравнений системы (10.8) определяют связь между ошибками оценки координат и ошибками псевдодальностей, вторые n уравнений — связь между ошибками оценки приращений координат и ошибками измерений приращений интегральных фаз. Чтобы обе системы были равноценными, целесообразно привести их к безразмерному виду. Рассмотрим КА, средний радиус орбиты которого равен R_0, а круговая скорость для орбиты радиусом R_0

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}. \qquad (10.9)$$

Тогда введем безразмерные вектор состояния и вектор измерений, а также оценки этих векторов:

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \Delta\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{X}}{R_0} \\ \dfrac{\Delta\bar{X}}{V_0} \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}^* = \begin{pmatrix} \bar{x}^* \\ \Delta\bar{x}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{X}^*}{R_0} \\ \dfrac{\Delta\bar{X}^*}{V_0} \end{pmatrix};$$
$$\bar{\xi}_{\text{и}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{\text{и}1} \\ \bar{x}_{\text{и}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{\xi}_{\text{и}1}}{R_0} \\ \dfrac{\bar{\xi}_{\text{и}2}}{V_0} \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_{\text{и}}^* = \begin{pmatrix} \bar{x}_{\text{и}1}^* \\ \bar{x}_{\text{и}2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{\xi}_{\text{и}1}^*}{R_0} \\ \dfrac{\bar{\xi}_{\text{и}2}^*}{V_0} \end{pmatrix}. \qquad (10.10)$$

В принятых обозначениях вид системы уравнений (10.8) для i-го измерения не изменится, а уравнения связи для координат и скорости равноценны и имеют одинаковый вес.

Для m измерений система уравнений, связывающая векторы ошибок измерений $\delta\bar{\xi}_{\text{и}}$ с ошибками оценки орбиты, примет вид

$$\begin{aligned} &\delta\bar{\xi}_{\text{и}1} = C_{01}\delta\bar{\xi}_1; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\delta\bar{\xi}_{\text{и}m} = C_{0m}\delta\bar{\xi}_m. \end{aligned} \qquad (10.11)$$

Система уравнений (10.11), связывающая ошибки измерений псевдодальностей и интегральных фаз с искомым вектором состояния, имеет такой же вид, как и (9.10) для измерений только псевдодальностей. Поэтому рекуррентный алгоритм решения этой системы аналогичен алгоритму (9.11) решения системы (9.10) для измерений псевдодальностей:

$$\begin{aligned} &\overline{P} = C_{0m+1}^{\mathrm{T}}\left(\overline{\xi}_{\text{и}m+1} - \hat{\xi}_{\text{и}m+1}^{*}\right); \\ &W_{m+1} = B_{mm+1}^{-1\,\mathrm{T}}\lambda W_m \lambda B_{mm+1}^{-1} + C_{0m+1}^{\mathrm{T}} C_{0m+1}; \\ &\delta\overline{\xi}_{m+1}^{*} = W_{m+1}^{-1}\overline{P}; \\ &\overline{\xi}_{m+1}^{*} = \hat{\xi}_{m+1}^{*} + \delta\overline{\xi}_{m+1}^{*}, \end{aligned} \qquad (10.12)$$

где $\overline{P}$ — промежуточный вектор размерностью 6; W_i — накапливаемая матрица размером 6×6 (на нулевом шаге эта матрица равна 0); $\overline{\xi}_{\text{и}m+1}$ — вектор измерения на (m+1)-м шаге; $\hat{\xi}_{m+1}^{*}$ — оценка вектора состояния на (m+1)-м шаге, полученная из вектора состояния $\overline{\xi}_{m}^{*}$, сформированного на m-м шаге, путем прогноза на (m+1)-й шаг; $\hat{\xi}_{\text{и}m+1}^{*}$ — оценка вектора измерения на (m+1)-м шаге, полученная из оценки вектора состояния $\hat{\xi}_{m+1}^{*}$.

Коэффициент λ в алгоритме (9.11) определяется постоянной времени фильтра T:

$$\lambda = \frac{T}{T+1}, \qquad (10.13)$$

которая одинакова для всех измерений псевдодальностей. В данном случае динамической фильтрации измерений псевдодальностей и интегральных фаз целесообразно ввести две постоянные времени: T_X — для измерения псевдодальностей и T_V — интегральных фаз. Этим постоянным времени соответствуют два коэффициента λ:

$$\lambda_X = \frac{T_X}{T_X+1}; \quad \lambda_V = \frac{T_V}{T_V+1}. \qquad (10.14)$$

Тогда λ в уравнении (10.12) будет представлять собой матрицу

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_X E & 0 \\ 0 & \lambda_V E \end{pmatrix}, \qquad (10.15)$$

где E — единичная матрица размером 3×3; 0 — нулевая матрица размером 3×3.

Матрица B_{mm+1} в алгоритме (10.12) представляет собой матрицу (размером 6×6) преобразования ошибок вектора состояния на шаге m к ошибкам на (m+1)-м шаге:

$$B_{mm+1} = \frac{\partial\overline{\xi}_{m+1}}{\partial\overline{\xi}_m}. \qquad (10.16)$$

Ранее, когда в качестве вектора состояния рассматривались векторы координат $\bar{X}$ и скорости $\bar{V}$, эта матрица формировалась путем семикратного интегрирования вектора состояния от шага m к шагу $m + 1$ с последовательным варьированием вектора $\bar{\xi}_m$. Интегрирование выполнялось методом Рунге — Кутты четвертого порядка и требовало на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнений движения (вектора возмущающих ускорений). После формирования этой матрицы размером 6×6 требовалось вычисление ее обратной матрицы, что также требовало значительных вычислительных ресурсов. При использовании вектора состояния в приращениях $(\bar{X}, \Delta\bar{X})$ формирование матрицы $B_{m\,m+1}$ существенно упрощается, так как она может быть представлена в явном виде. Рассмотрим алгоритмы формирования матрицы преобразования ошибок вектора состояния $B_{m\ m+1}$ и обратной матрицы $B^{-1}_{m\,m+1}$. Алгоритмы прогноза вектора координат и вектора приращений координат с шага m на шаг $m + 1$ имеют вид

$$\begin{aligned}&\Delta\bar{X}_{m+1} = \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta\bar{X}_m - \left(E + \Omega\right)\Omega^2\bar{X}_m + \left(E + \Omega\right)A_{\text{ИСК–ГСК}}\bar{a}_m;\\ &\bar{X}_{m+1} = \bar{X}_m + \Delta\bar{X}_{m+1},\end{aligned} \tag{10.17}$$

где $\bar{X}$ — вектор координат КА относительно ГСК; $\Delta\bar{X}$ — вектор приращения координат КА за шаг относительно ГСК; E — единичная матрица размером 3×3; $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Delta t$ — матрица поворота Земли за такт Δt; ω_3 — угловая скорость вращения Земли; $A_{\text{ИСК–ГСК}}$ — текущая матрица перехода от ИСК БИНС к ГСК; $\bar{a}$ — вектор ускорений КА в ИСК БИНС.

Вектор $\bar{a}_i$ определяется по формуле

$$\bar{a}_m = \bar{a}_{\text{г}m}\Delta t^2 + \bar{a}_{\text{и}m}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{г}m}\Delta t^4 + \frac{1}{12}\ddot{\bar{a}}_{\text{и}m}\Delta t^4, \tag{10.18}$$

где $\bar{a}_{\text{г}m}$ — суммарный вектор гравитационных возмущений, действующих на КА; $\bar{a}_{\text{и}m}$ — вектор инерциальных возмущений, измеряемых БИНС.

В равенстве (10.18) векторы $\bar{a}_{\text{г}}$ и $\ddot{\bar{a}}_{\text{г}}$ являются функциями координат КА, векторы $\bar{a}_{\text{и}}$ и $\ddot{\bar{a}}_{\text{и}}$ — измеряются БИНС и не являются функциями вектора состояния. Для выполнения точного прогноза вектора состояния вектор $\bar{a}_{\text{г}}$ должен рассчитываться с высокой точностью. Однако при вычислении матрицы $B_{m\ m+1}$ он может быть представлен приближенно относительно ГСК в виде

$$\bar{a}_{\text{г}} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{X}, \tag{10.19}$$

где $r = \left|\bar{X}\right|$.

Вектором $\ddot{\bar{a}}_\text{г}$ при вычислении матрицы $B_{m\ m+1}$ ввиду его малости можно пренебречь. Тогда для вычисления матрицы $B_{m\ m+1}$ зависимость вектора состояния $\bar{\xi}_{m+1}$ на $(m+1)$-м шаге от его значений на m-м шаге может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Delta\bar{X}_{m+1} &= \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta\bar{X}_m - \left(E+\Omega\right)\Omega^2\bar{X}_m - \left(E+\Omega\right)\frac{\mu}{r^3}\bar{X}_m\Delta t^2; \\ \bar{X}_{m+1} &= \bar{X}_m + \Delta\bar{X}_{m+1}. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Для перехода к безразмерным параметрам движения $\bar{x}$ и $\Delta\bar{x}$ в алгоритме (10.20) заменим переменные:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= R_0\bar{x}; \\ \Delta\bar{X} &= V_0\Delta t\Delta\bar{x}. \end{aligned} \tag{10.21}$$

Подставив значения векторов $\bar{X}$ и $\Delta\bar{X}$ из (10.21) в соотношения (10.20), получим уравнения связи между безразмерными составляющими вектора состояния $\bar{x}$ и $\Delta\bar{x}$ на $(m+1)$-м и m-м шагах:

$$\begin{aligned} \Delta x_{m+1} &= \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta x_m - \frac{R_0}{V_0\Delta t}\left(E+\Omega\right)\Omega^2\bar{x}_m - \frac{\mu}{V_0R_0^2}\left(E+\Omega\right)\frac{\bar{x}_m}{r_0^3}\Delta t; \\ \bar{x}_{m+1} &= \bar{x}_m + \frac{V_0}{R_0}\Delta\bar{x}_{m+1}\Delta t, \end{aligned} \tag{10.22}$$

где $r_0 = |\bar{x}_i|$.

Обозначим

$$\omega_0 = \frac{V_0}{R_0} = \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}}, \tag{10.23}$$

тогда соотношения (10.22) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \Delta\bar{x}_{m+1} &= \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta x_m - \frac{1}{\omega_0\Delta t}\left(E+\Omega\right)\Omega^2\bar{x}_m - \omega_0\left(E+\Omega\right)\frac{\bar{x}_m}{r_0^3}\Delta t; \\ \bar{x}_{m+1} &= \bar{x}_m + \omega_0\Delta\bar{x}_{m+1}\Delta t. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Вычислим производные $\dfrac{\partial\Delta x_{m+1}}{\partial\Delta x_m}, \dfrac{\partial\Delta x_{m+1}}{\partial x_m}, \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial\Delta x_m}, \dfrac{\partial x_{m+1}}{\partial x_m}$.

Из уравнений (10.24) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\bar{x}_{m+1}}{\partial\Delta\bar{x}_m} &= \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right); \\ \frac{\partial\Delta\bar{x}_{m+1}}{\partial\bar{x}_m} &= -\frac{1}{\omega_0\Delta t}\left(E+\Omega\right)\Omega^2 - \omega_0\left(\frac{E+\Omega}{r_0^3}\right)\left(E - 3\frac{x_m\bar{x}_m^\text{T}}{r_0^2}\right)\Delta t; \\ \frac{\partial\bar{x}_{m+1}}{\partial\Delta\bar{x}_m} &= \omega_0\left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta t; \\ \frac{\partial\bar{x}_{m+1}}{\partial\bar{x}_m} &= E + \omega_0\frac{\partial\Delta x_{m+1}}{\partial x_m}\Delta t. \end{aligned} \tag{10.25}$$

Тогда матрица $B_{m\,m+1}$ будет иметь вид

$$B_{m\,m+1} = \frac{\partial \bar{\xi}_{m+1}}{\partial \bar{\xi}_m} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \dfrac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} \\ \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E + \omega_0 \Delta t \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \omega_0 \Delta t \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2 \right) \\ \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & E + 2\Omega + 2\Omega^2 \end{pmatrix}. \qquad (10.26)$$

Матрица $\dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m}$, входящая в состав матрицы $B_{m\ m+1}$, определяется вторым равенством соотношений (10.25).

Матрица $B_{m\ m+1}$ может быть представлена в виде суммы единичной матрицы E размером 6×6 и малой матрицей $\delta B_{m\ m+1}$, максимальные значения компонент которой имеют порядок $\omega_0 \Delta t$ ($\sim 10^{-3}$). Для этих матриц можно записать следующее соотношение:

$$\delta B_{m\ m+1} = B_{m\ m+1} - E. \qquad (10.27)$$

С точностью до значений ω_0^3 обратная матрица

$$B_{m\,m+1}^{-1} = E - \delta B_{m\,m+1} + \delta B_{m\,m+1} \delta B_{m\,m+1}. \qquad (10.28)$$

Соотношения (10.25), (10.26), (10.28) определяют алгоритм формирования матрицы $B_{m\,m+1}^{-1}$, которая в данном случае вычисляется в явном виде, т. е. при динамической фильтрации вектора состояния КА, выраженного через вектор координат $\bar{X}$ и вектор приращений координат $\Delta \bar{X}$, матрица преобразования ошибок $B_{m\,m+1}^{-1}$ вычисляется в явном виде как функция координат КА. Для ее формирования не требуется проводить семикратное численное интегрирование уравнений движения, а также выполнять вычисление обратной матрицы размером 6×6. Это позволяет более чем в 20 раз уменьшить объем вычислений, необходимых для ее формирования, что чрезвычайно важно для реализации динамической фильтрации в реальном времени на борту КА с использованием бортовых вычислительных средств.

Анализ результатов фильтрации «сырых» измерений (10.12), полученных как на моделирующем стенде, так и в реальном полете МКС, показал, что при больших постоянных времени фильтра T_X и T_V достигается высокая точность формируемой оценки орбиты КА. При этом она практически совпадает с оценкой, полученной при фильтрации по алгоритму (9.11), реализуемому без использования измеренных приращений интегральных фаз.

Наличие возмущающих ускорений, неучтенных в алгоритмах прогноза орбиты, приводит к значительным ошибкам формируемой оценки. Уменьшение постоянных времени значительно снижает влияние возмущающих ускорений на точность оценки, что будет показано ниже. Однако одновременно возрастает влияние шумов псевдодальностей на точность формируемой оценки скорости. Проведенный анализ показал, что это влияние может быть значительно снижено сглаживанием измеренных псевдодальностей измеренными приращениями фазы. Такое сглаживание обеспечивается путем «смешивания» с определенными весовыми коэффициентами измеренных псевдодальностей и приращений интегральных фаз. В этом случае несколько изменится алгоритм формирования вектора измерений $\bar{\xi}_и$ и его оценки $\bar{\xi}_и^*$. В рассмотренном выше варианте фильтра эти векторы формировались в соответствии с алгоритмом (10.10), в модифицированном фильтре они имеют следующий вид:

$$\bar{\xi}_и = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_P}\frac{\bar{\xi}_{и1}}{R_0} + \frac{T_P - 1}{T_P}\frac{\bar{\xi}_{и2}}{V_0}\omega_0 \\ \frac{\bar{\xi}_{и2}}{V_0} \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_и^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_P}\frac{\bar{\xi}_{и1}^*}{R_0} + \frac{T_P - 1}{T_P}\frac{\bar{\xi}_{и2}^*}{V_0}\omega_0 \\ \frac{\bar{\xi}_{и2}^*}{V_0} \end{pmatrix}, \qquad (10.29)$$

где T_P — постоянная времени сглаживания псевдодальности.

Векторы $\bar{\xi}_{и1}$, $\bar{\xi}_{и2}$, $\bar{\xi}_{и1}^*$, $\bar{\xi}_{и2}^*$ определяются по формулам

$$\bar{\xi}_{и1} = \begin{pmatrix} PR_1 - PR_2 \\ \vdots \\ PR_n - PR_1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_{и2} = \begin{pmatrix} \Delta CP_1 - \Delta CP_2 \\ \vdots \\ \Delta CP_n - \Delta CP_1 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\xi}_{и1}^* = \begin{pmatrix} PR_1^* - PR_2^* \\ \vdots \\ PR_n^* - PR_1^* \end{pmatrix}; \quad \bar{\xi}_{и2}^* = \begin{pmatrix} \Delta CP_1^* - \Delta CP_2^* \\ \vdots \\ \Delta CP_n^* - \Delta CP_1^* \end{pmatrix}. \qquad (10.30)$$

Тогда вектор измерений, входящий в уравнение (10.11) будет иметь вид

$$\delta\bar{\xi}_и = \bar{\xi}_и - \bar{\xi}_и^*, \qquad (10.31)$$

где векторы $\bar{\xi}_и$ и $\bar{\xi}_и^*$ формируются по алгоритму (10.29).

Ниже приведено неформальное описание алгоритма динамической фильтрации полных «сырых» измерений АСН, являющееся одним из необходимых этапов разработки соответствующего программного обеспечения.

10.3. Алгоритмы динамической фильтрации измерений псевдодальностей и интегральных фаз с самонастройкой на аэродинамическое торможение

Алгоритмы динамической фильтрации «сырых» измерений АСН в модели движения КА (10.17) учитывают гравитационные составляющие вектора ускорений, входящие в состав вектора $\bar{a}$, представленного в ИСК. Матрица $A_{\text{ИСК–ГСК}}$ преобразует этот вектор в ГСК. Однако для низкоорбитальных КА кроме гравитационных ускорений $\bar{a}$, существенное влияние на движение КА оказывает аэродинамическое торможение, моделирование которого со сколько-нибудь приемлемой точностью представляет собой сложную задачу. Поэтому, например, в подразд. 7.5 были рассмотрены алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН с самонастройкой на текущее аэродинамическое ускорение. Тогда в качестве измерений АСН рассматривался вектор координат. Предложенные алгоритмы позволяли вычислять с определенной точностью текущее аэродинамическое торможение, учитываемое в уравнениях движения КА. При этом благодаря компенсации аэродинамического возмущения существенно повышалась точность формируемой оценки орбиты. Аналогичную оценку аэродинамического торможения можно выполнять при динамической фильтрации «сырых» измерений АСН. Для этого в качестве вектора состояния КА будем рассматривать 7-мерный вектор

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \Delta\bar{x} \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{X}}{R_0} \\ \dfrac{\Delta\bar{X}}{V_0} \\ \dfrac{1}{k} a_{aero} \end{pmatrix}, \qquad (10.32)$$

где $\bar{X}$ — текущий вектор координат КА в ГСК; $\Delta\bar{X}$ — текущее приращение вектора координат за такт в ГСК; a — среднее за виток аэродинамическое торможение КА; R_0 — средний радиус орбиты КА; V_0 — круговая скорость КА для орбиты радиусом R_0, $V_0 = \sqrt{\mu/R_0}$; $k = \text{const}$ — весовой коэффициент, порядок которого равен порядку величины a_{aero} рассматриваемого КА (для МКС $k = 10^{-6}$ м/с^2).

Среднее за виток аэродинамическое торможение КА a_{aero} считаем медленно меняющимся от витка к витку. Именно этот параметр будем оценивать по «сырым» измерениям АСН совместно с оценкой текущего вектора координат $\bar{X}$ и вектора приращения координат $\Delta\bar{X}$.

В качестве вектора измерений будем рассматривать вектор, составленный из измеренных значений псевдодальностей и интегральных фаз в соответствии с алгоритмами (10.2), (10.10), (10.29). Тогда систему уравнений

движения для оценки текущего вектора состояния можно записать в том же виде, что и уравнение (10.11):

$$\begin{aligned} &\delta\xi_{и1} = C_{0i}\delta\overline{\xi}_i;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\delta\xi_{иm} = C_{0n}\delta\xi_m. \end{aligned} \qquad (10.33)$$

Однако в системе уравнений (10.33) векторы $\delta\overline{\xi}_i$ размерностью 7, а матрицы C_{0i} — $2n_i\times 7$, где n_i — число НС измерений в i-й момент времени, имеют вид

$$C_{0i} = \begin{pmatrix} C_i & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & C_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad (10.34)$$

где C_i — матрица направляющих косинусов, формируемая по алгоритму (10.8).

Алгоритм формирования оценки вектора состояния, являющийся решением системы уравнений (10.33), аналогичен алгоритму (10.12). Отличие состоит в том, что вектор P размерностью 7, а матрицы W, λ, $B_{m\,m+1}$ — 7×7.

Матрица λ определяется по формуле

$$\lambda = \begin{pmatrix} & & & & & & 0 \\ & \lambda_X E & & & 0 & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & 0 & & & \lambda_V E & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_a \end{pmatrix}, \qquad (10.35)$$

где λ_X, λ_V, λ_a вычисляют по формулам

$$\lambda_X = \frac{T_X}{T_X + 1}; \quad \lambda_V = \frac{T_V}{T_V + 1}; \quad \lambda_a = \frac{T_a}{T_a + 1}, \qquad (10.36)$$

T_X, T_V, T_a — постоянные времени формирования оценок координат, скорости и аэродинамического торможения соответственно.

Матрица $B_{m\,m+1}$ представляет собой матрицу преобразования ошибок вектора состояния от момента m к моменту $m + 1$:

$$B_{m\,m+1} = \frac{\partial\overline{\xi}_{m+1}}{\partial\overline{\xi}_m}. \qquad (10.37)$$

При фильтрации «сырых» измерений без оценки аэродинамического торможения эта матрица была размером 6×6 и формировалась по алгоритмам (10.25) и (10.26). При оценивании аэродинамического торможения к ней добавляются 7-я строка и 7-й столбец.

Для получения алгоритма формирования этих дополнительных элементов матрицы $B_{m\,m+1}$ рассмотрим уравнение движения КА в приращениях (10.17) относительно ГСК с учетом аэродинамического торможения. Вектор аэродинамического торможения относительно ГСК представим в виде, аналогичном (7.25):

$$\bar{a}_a = -\frac{\Delta\bar{X}}{\left|\Delta\bar{X}\right|} a_{aero}. \tag{10.38}$$

В соответствии с рассматриваемой моделью вектор аэродинамического торможения направлен против вектора скорости КА относительно ГСК.

С учетом аэродинамического торможения уравнение (10.17) примет вид

$$\begin{gathered}\Delta\bar{X}_{m+1} = \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta\bar{X}_m - \left(E + \Omega\right)\Omega^2\bar{X}_i + \\ + \left(E + \Omega\right) A_{\text{ИСК-ГСК}}\bar{a} - \frac{\Delta\bar{X}}{\left|\Delta\bar{X}\right|} a_{aero}; \\ \bar{X}_{m+1} = \bar{X}_m + \Delta\bar{X}_{m+1}.\end{gathered} \tag{10.39}$$

Для перехода к равноценным безразмерным переменным проведем замену переменных:

$$\bar{X} = R_0\bar{x}; \quad \Delta X = V_0\Delta\bar{x}; \quad a_{aero} = a_0 \cdot K. \tag{10.40}$$

Подставив значения $\bar{X}$, $\Delta\bar{X}$ и a_{aero}, выраженные через новые переменные, в уравнение (10.39), получим уравнение движения КА в безразмерных параметрах $\bar{x}$, $\Delta\bar{x}$, a_0:

$$\begin{gathered}\Delta\bar{x}_{m+1} = \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta\bar{x}_m - \frac{1}{\omega_0}\left(E + \Omega\right)\Omega^2\bar{x}_m + \\ + \frac{1}{V_0}\left(E + \Omega\right) A_{\text{ИСК-ГСК}}\bar{a} - \frac{\Delta\bar{x}_m}{\left|\Delta\bar{x}_m\right|}\frac{a_0}{V_0}K; \\ \bar{x}_{m+1} = \bar{x}_m + \omega_0\Delta\bar{x}_{m+1},\end{gathered} \tag{10.41}$$

где $\omega_0 = \dfrac{V_0}{R_0}$ — средняя орбитальная скорость КА.

Матрицу $B_{m\,m+1}$ можно представить в следующем виде:

$$B_{m\,m+1} = \frac{\partial\bar{\xi}_{m+1}}{\partial\bar{\xi}_m} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\bar{x}_{m+1}}{\partial\bar{x}_m} & \dfrac{\partial\bar{x}_{m+1}}{\partial\Delta\bar{x}_m} & \dfrac{\partial\bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} \\ \dfrac{\partial\Delta\bar{x}_{m+1}}{\partial\bar{x}_m} & \dfrac{\partial\Delta\bar{x}_{m+1}}{\partial\Delta\bar{x}_m} & \dfrac{\partial\Delta\bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} \\ \dfrac{\partial a_0}{\partial\bar{x}_m} & \dfrac{\partial a_0}{\partial\Delta\bar{x}_m} & \dfrac{\partial a_0}{\partial a_0} \end{pmatrix}. \tag{10.42}$$

Векторы $\frac{\partial \overline{x}_{m+1}}{\partial \overline{x}_m}, \frac{\partial \Delta \overline{x}_{m+1}}{\partial \overline{x}_m}, \frac{\partial \overline{x}_{m+1}}{\partial \Delta \overline{x}_m}, \frac{\partial \Delta \overline{x}_{m+1}}{\partial \Delta \overline{x}_m}$ определяются равенствами (10.25). Векторы $\frac{\partial \overline{x}_{m+1}}{\partial a_0}, \frac{\partial \Delta \overline{x}_{m+1}}{\partial a_0}, \frac{\partial a_0}{\partial a_0}, \frac{\partial a_0}{\partial \overline{x}_m}, \frac{\partial a_0}{\partial \Delta \overline{x}_m}$ легко получить из уравнения (10.41):

$$\frac{\partial \Delta \overline{x}_{m+1}}{\partial a_0} = -k\Delta \overline{x}_m; \quad \frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial a_0} = -k\omega_0 \Delta \overline{x}_m;$$
$$\frac{\partial a_0}{\partial a_0} = 1; \quad \frac{\partial a_0}{\partial \overline{x}_m} = 0; \quad \frac{\partial a_0}{\partial \Delta \overline{x}_m} = 0; \quad \frac{\partial a_0}{\partial \overline{x}_m} = 0, \tag{10.43}$$

т. е. 7-й столбец матрицы $B_{m\,m+1}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -k\omega_0 \Delta \overline{x}_m \\ -k\Delta \overline{x}_m \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10.44}$$

Первые шесть элементов 7-й строки матрицы $B_{m\,m+1}$ равны нулю. Элементы первых шести строк и шести столбцов матрицы $B_{m\,m+1}$ соответствуют элементам матрицы $B_{m\,m+1}$, формируемой при фильтрации без оценки аэродинамического торможения по алгоритму (10.26). При задании коэффициента $k = 0$ фильтрация измерений АСН будет выполняться без настройки на аэродинамическое торможение.

10.4. Неформальное описание алгоритмов динамической фильтрации полных «сырых» измерений АСН при формировании оценки орбиты КА в приращениях

В 3.8 было приведено неформальное описание алгоритмов интегрирования уравнений движения КА в приращениях относительно ГСК с учетом измерений БИНС. Эти алгоритмы включали программу обработки измерений аппаратуры БИНС, реализуемую в ЦВМ КА, и программу собственно интегрирования уравнений движения КА, реализуемую в АСН, и оформлены как программные функции *f_BINS* и *f_INTEGR*. Выходом этих программ является оценка орбиты КА, спрогнозированная на один шаг интегрирования уравнений движения КА. При наличии измерений АСН эта спрогнозированная оценка должна на каждом шаге корректироваться по проведенным измерениям. Рассматриваемое в настоящей главе ПО обеспечивает эту коррекцию. Для удобства реализации программы в процессоре АСН целесообразно ее также оформить в виде программной функции, вызываемой после проведения измерений АСН на текущем шаге, и выполнения прогноза на текущий шаг оценки орбиты, полученной на предыдущем шаге. Условно назовем эту функцию *f_RAW_CORRECTION*.

10.4.1. Назначение ПО и методы решения задачи

Разрабатываемое ПО предназначено для формирования оценки орбиты КА, представленной в приращениях в виде вектора координат КА в ГСК и приращений координат за текущий шаг интегрирования, корректируемой по полным «сырым» измерениям АСН — псевдодальностям и приращениям интегральных фаз текущего видимого созвездия НС. ПО выполнено в виде программной функции *f_RAW_CORRECTION*, реализующей рекуррентный алгоритм динамической фильтрации измерений АСН модифицированным методом наименьших квадратов. Функция включает три параметра:

T_X — постоянная времени фильтра по координатам;

T_V — постоянная времени фильтра по скорости;

T_p — постоянная времени сглаживания псевдодальностей;

T_{aero} — постоянная времени фильтра аэродинамического торможения.

Данные параметры могут выбираться пользователем в зависимости от орбиты КА, его динамики и требований к характеристикам фильтра. Характер влияния указанных параметров на точностные и динамические характеристики фильтра рассмотрен ниже на примере реальных измерений АСН-М МКС.

10.4.2. Описание интерфейса программы

Программная функция использует ряд констант:

$\omega_З$ — угловую скорость вращения Земли;

R_0 — средний радиус орбиты КА;

V_0 — среднюю круговую скорость КА;

$\omega_0 = V_0/R$ — среднюю орбитальную угловую скорость КА;

Δt — такт измерений АСН в аппаратной шкале времени.

Также использует параметры, задаваемые пользователем в зависимости от требований к характеристикам фильтра:

T_X — постоянную времени фильтра по координатам;

T_V — постоянную времени фильтра по скорости;

T_P — постоянную времени сглаживания псевдодальностей;

T_{aero} — постоянную времени фильтра аэродинамического торможения.

По параметрам T_X и T_V формируются коэффициенты λ_X и λ_V:

$$\lambda_X = \frac{T_X}{T_X + 1}; \quad \lambda_V = \frac{T_V}{T_V + 1}. \tag{10.45}$$

Для того, чтобы не вычислять эти параметры на каждом шаге, они формируются отдельно при инициализации всего ПО АСН (при запуске АСН), а в функцию входят как входные параметры *Lam_X*, *Lam_V*. Описание интерфейсных параметров функции *f_RAW_CORRECTION* приведено в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Параметры интерфейса функции *f_RAW_CORRECTION*

Идентификатор	Название	Вход-выход	Размер	Тип	Размерность
Lam_X	Коэффициент «старения» накопленных измерений по координатам	I	1	double	—
Lam_V	Коэффициент «старения» накопленных измерений по скорости	I	1	»	—
TAU_P	Постоянная времени сглаживания псевдодальностей	I	1	»	s
TAU_aero	Постоянная времени фильтра аэродинамического торможения	I	1	»	s
drift_ASN	Дрейф часов АСН относительно системного времени	I	1	»	s/s
n_SV_namb	Число НС в измеренном созвездии	I	1	short	—
mes_vect_PR	Вектор измерений псевдодальности	I	16	double	m
mes_vect_CP	Вектор измерения приращений интегральной фазы	I	16	»	m
estim_vect_PR	Оценка вектора измерения псевдодальности	I	16	»	m
estim_vect_CP	Оценка вектора измерения приращения интегральной фазы	I	16	»	m
estim_prev_vect_X	Оценка вектора координат от предыдущего шага	I/0	3	»	m
estim_prev_vect_delta_X	Оценка вектора приращения координат от предыдущего шага	I/0	3	»	m
cos_matr	Матрица направляющих косинусов	I	16×3	»	—
prev_accum_matr	Накапливаемая матрица от предыдущего шага	I/0	6×6	»	—

Размер матриц измерений и направляющих косинусов равен соответствующему числу каналов АСН (в данном случае 16). Реальное число отслеживаемых НС *n_SV_namb* меньше максимального. Это число используется как входной параметр стандартных функций реализующих действия с матрицами.

10.4.3. Алгоритм функции f_RAW_CORRECTION

Данная функция запускается на каждом шаге измерений АСН после выполнения текущих измерений, формирования векторов псевдодальностей и приращений интегральных фаз, формирования оценки орбиты КА на момент измерений АСН на текущем шаге путем прогноза предыдущего шага с использованием функции *f_INTEGR*, обработки эфемерид НС и формирования оценки координат НС в момент излучения сигнала, после получения оценки векторов измерений псевдодальностей и приращений интегральных фаз. Следует отметить, что так как оценка приращений интегральных фаз требует использования измерений интегральных фаз на предыдущем шаге, в случае изменения созвездия достоверных НС на текущем шаге по отношению к предыдущему, новый НС вводится в созвездие только со следующего шага, а в случае исчезновения НС измерения, соответствующие этим НС, исключаются из состава измерений предыдущего шага.

Первый запуск функции выполняется после получения от АСН достоверных значений КСВ, которые используются в качестве нулевого приближения на нулевом шаге. Значение накапливаемой матрицы — *prev_accum_matr* — на нулевом шаге принимается равным нулю.

Последовательность реализации программы следующая.

1. Начало.

Введение обозначений:

$\bar{x}_{u1} = mes_vect_PR;$

$\bar{x}_{u2} = mes_vect_CP;$

$\bar{x}^*_{u1} = estim_vect_PR;$

$\bar{x}^*_{u2} = estim_vect_CP;$

$\bar{X}^* = estim_prev_vect_X;$

$\Delta\bar{X}^* = estim_prev_vect_delta_X;$

$C = \cos_matr;$

$W = prev_accum_matr;$

$T_P = TAU_P;$

$T_{aero} = TAU_aero.$

2. Вычисление шага интегрирования в системной шкале времени:

$$\Delta t_c = \Delta t\left(1 + drift_ASN\right).$$

3. Формирование матриц

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta t_c$$ — матрица угла поворота Земли за такт;

$C_0 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ — матрица направляющих косинусов размером $2n \times 6$;

$\Lambda = \begin{pmatrix} Lam_X & 0 & 0 \\ 0 & Lam_V & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{T_{aero}}{T_{aero}+1} \end{pmatrix}$ — матрица «старения» накоплений размером 6×6.

4. Формирование ошибки безразмерного вектора измерений:

$$\delta\bar{\xi}_{\text{и}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{T_P} \dfrac{\bar{x}_{\text{и}1} - \bar{x}^*_{\text{и}1}}{R_0} + \dfrac{T_P - 1}{T_P} \dfrac{\bar{X}_{\text{и}2} - X^*_{\text{и}2}}{R_0} \\ \dfrac{\bar{x}_{\text{и}2} - \bar{x}^*_{\text{и}2}}{V_0} \end{pmatrix}. \tag{10.46}$$

5. Вычисление вектора

$$\bar{P} = C_0^{\text{T}} \delta\bar{\xi}_{\text{и}}. \tag{10.47}$$

6. Формирование оценки безразмерного вектора координат и его модуля:

$$\bar{x} = \frac{\bar{X}^*}{R_0}; \qquad r_0 = |\bar{x}|. \tag{10.48}$$

7. Вычисление матрицы

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} = \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right); \\
&\frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} = -\frac{1}{\omega_0 \Delta t_c}(E+\Omega)\Omega^2 - \omega_0 \frac{E+\Omega}{r_0^3}\left(E - 3\frac{x_m \bar{x}_m^{\text{T}}}{r_0^2}\right)\Delta t_c; \\
&\frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} = \omega_0 \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2\right)\Delta t_c; \\
&\frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} = E + \omega_0 \frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial x_m}\Delta t_c.
\end{aligned} \tag{10.49}$$

8. Формирование матрицы преобразования ошибок:

$$B_{m\,m+1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \dfrac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} & \dfrac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} \\ \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} & \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial a_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.50}$$

9. Вычисление обратной матрицы преобразования ошибок:

$$\begin{aligned} &\delta B = B_{m\,m+1} - E; \\ &B_{m\,m+1}^{-1} = E - \delta B + \delta B\,\delta B. \end{aligned} \tag{10.51}$$

10. Вычисление накапливаемой матрицы

$$W = B_{m\,m+1}^{-1\,\mathrm{T}} \Lambda W \Lambda B_{m\,m+1}^{-1} + C_0^{\mathrm{T}} C_0. \tag{10.52}$$

11. Нахождение поправки к прогнозируемому вектору состояния:

$$\delta\bar{\xi} = W^{-1} P = \begin{pmatrix} \delta\bar{\xi}_X \\ \delta\bar{\xi}_V \end{pmatrix}. \tag{10.53}$$

12. Вычисление оценки вектора состояния:

$$\begin{aligned} &\bar{X}^* = \bar{X}^* + R_0 \delta\bar{\xi}_X; \\ &\Delta\bar{X}^* = \Delta\bar{X}^* + V_0 \delta\bar{\xi}_V. \end{aligned} \tag{10.54}$$

13. Формирование выходных параметров:

$$\begin{aligned} &estim_prev_vect_X = \bar{X}^*; \\ &estim_prev_vect_delta_X = \Delta\bar{X}^*; \\ &prev_accum_matr = W. \end{aligned} \tag{10.55}$$

14. Конец.

10.4.4. Методы верификации программной функции f_RAW_CORRECTION

Верификация функции *f_RAW_CORRECTION* может выполняться в несколько этапов. Первый этап — верификация в режим *ideal*, когда в модели вектора измерений $\bar{\xi}_{и}$ отключаются все ошибки. Тогда формируемая оценка орбиты должна идеально совпадать с моделируемой точной орбитой КА.

На следующих этапах верификации можно сравнить формируемую выходную оценку орбиты с оценкой, формируемой аналогичными разработанными ранее программами. Результаты динамической фильтрации реальных измерений псевдодальностей, полученных АСН-М МКС, приведены в гл. 9. Графики ошибок формируемой оценки орбиты МКС для измерений от разного числа НС в группировке спутников GPS показаны на рис. 9.1–9.5. Далее будут приведены результаты исследования точностных характеристик оценки орбиты, формируемой рассматриваемой функцией для разных значений ее параметров.

10.5. Зависимость точности формируемой оценки орбиты и устойчивости по отношению к внешним возмущающим ускорениям от постоянных времени динамического фильтра с использованием реальных «сырых» измерений АСН-М МКС

Динамическая фильтрация измерений псевдодальностей и интегральных фаз обладает существенными преимуществами по сравнению с динамической фильтрацией измеряемых координат. Эти преимущества обусловлены в первую очередь расширением вектора измеряемых параметров. Рассмотренный метод полностью реализует возможности АСН в части измерений параметров движения КА. Метод фильтрации измерений координат с фильтрацией с большой постоянной времени фильтра обеспечивает формирование высокоточной оценки орбит пассивных КА. Но если на каком-то участке траектории возникают дополнительные возмущения орбиты, не учтенные в модели движения КА, например, начинает работать корректирующий двигатель, а создаваемое им ускорение не моделируется, то они приводят к значительной ошибке оценки орбиты. В этом случае возрастает разница между измеряемым АСН вектором координат и его оценкой (рис. 10.1). Оценка орбиты МКС в АСН-М формировалась по измеряемому вектору координат в соответствии с алгоритмом (7.18), в которых постоянная времени фильтра *T* задана равной единице (5500 с). На указанном участке траектории в 06:25:00 по Гринвичу выполнялась коррекция орбиты станции двигателями грузового корабля «Прогресс». Импульс, выданный во время коррекции скорости, равен 0,82 м/с. Длительность работы двигателей составила 596 с. В процессе выдачи корректирующего импульса МКС стабилизировалась в орбитальной системе координат. В результате возмущения орбиты МКС от двигателей, которые не моделировались в динамическом фильтре, возникли значительные рассогласования между измеряемым АСН-М вектором координат и его оценкой (см. рис. 10.1). Из графиков видно, что первоначально, когда МКС находилась в свободном орбитальном полете и стабилизировалась на гиродинах, не возмущающих орбиту станции, формируемая оценка орбиты практически совпадала с измеряемым вектором координат. За виток до выдачи корректирующего импульса управление станцией стало выполняться реактивными двигателями, которые привели к некоторому возмущению орбиты станции, и на приведенных графиках появились рассогласования между измеряемым вектором и оценкой орбиты. Через виток после перехода на управляющие двигатели ориентации началась коррекция орбиты, при которой неучтенное в модели движения станции возмущающее ускорение составило $1{,}376\cdot10^{-3}$ м/с^2. Это возмущающее ускорение привело к значительному разлету фильтра, и разность между измеряемым текущим вектором координат и его оценкой через полвитка достигла 14 км по продольной дальности и 3 км по высоте. Дальше

фильтр «сошелся» только через 4 ч, и фильтруемая оценка вновь стала близка к измеряемому АСН вектору координат МКС.

График на рис. 10.1 демонстрирует сказанное выше: фильтрация измерений АСН по алгоритму (7.18) с большой постоянной времени обеспечивает формирование высокоточной орбиты КА только при отсутствии неучтенных в фильтре возмущений. Даже небольшое возмущающее ускорение, равное ~10^{-3}м/с^2, приводит к значительному «разлету» фильтра.

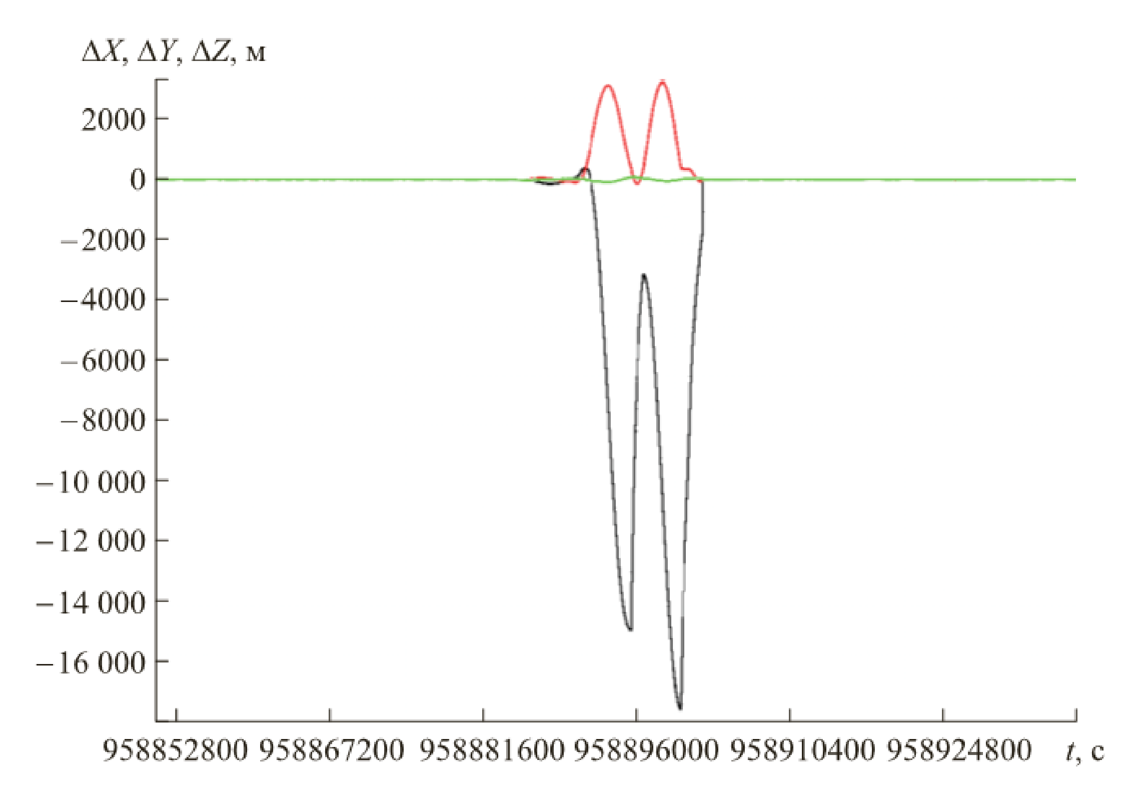


Рис. 10.1. Графики ошибок оценки орбиты МКС по измерениям координат АСН-М при коррекции орбиты двигателями корабля «Прогресс» (ΔX — продольная дальность, ΔY — местная вертикаль)

Алгоритмы динамической фильтрации полного состава «сырых» измерений АСН обеспечивают формирование оценки орбиты с существенно более высокой точностью при воздействии на КА неучтенных возмущающих ускорений.

Повышение точности достигается благодаря использованию в качестве вектора измерений полного состава «сырых» измерений АСН, включающего псевдодальности и интегральные фазы, а также за счет выбора определенного сочетания постоянных времени фильтра T_X, T_V, T_P, T_{aero}. Для существенного снижения ошибок, обусловленных внешними неучтенными в фильтре возмущениями, необходимо уменьшить постоянную времени T_X по сравнению с постоянной времени T, реализованной в АСН-М МКС для работы на пассивном участке полета станции. В результате на этом участке орбиты происходит некоторое снижение точности формируемой оценки орбиты. Но задачей рассматриваемого фильтра является значительное повышение точности фор-

мируемой оценки при воздействии неучтенных внешних возмущений орбиты. При этом может допускаться незначительное снижение точности формируемой оценки на пассивных участках полета. Для этого было проведено исследование зависимости ошибок оценки орбиты, формируемой по полному составу «сырых» измерений, при разном сочетании постоянных времени фильтра T_X, T_V, T_P, T_{aero}. В исследовании использованы реальные данные АСН-М МКС для рассмотренного выше участка орбиты.

В результате проведенного исследования определены значения постоянных времени, обеспечивающих наилучшие характеристики фильтра как в условиях отсутствия возмущений, так и при проведении коррекции орбиты МКС от двигателей.

Для условий пассивного участка полета наилучшими значениями постоянных времени оказались значения $T_X = 5500$ с, $T_V = 5500$ с, T_{aero} — 11 000 с, для которых формируемая оценка орбиты отличалась от оценки, формируемой по измеренному вектору координат МКС не более, чем на 3 м. При этом было сложно оценить, какая из оценок точнее, ввиду отсутствия точной базы для сравнения. Тем не менее «разлет» формируемой оценки из-за коррекции орбиты при фильтрации по «сырым» измерениям оказался значительно меньшим по сравнению с «развалом» при фильтрации по вектору координат. На рис. 10.2 представлены графики ошибок оценки (для векторов координат и скорости) орбиты относительно ОСК, формируемой по «сырым» измерениям, для приведенных выше значений параметров фильтра. Вертикальными линиями на графиках отмечен участок работы корректирующего двигателя. Из рисунка видно, что «разлет» оценки орбиты по координатам, обусловленный работой двигателя коррекции, составил 2,8 км, в то время как по измеренному вектору координат — превысил 16 км (см. рис. 10.1).

«Разлет» фильтра может быть существенно снижен при уменьшении постоянных времени фильтра T_X, T_V. Однако здесь необходимо найти оптимум, так как уменьшение постоянных времени приводит к ухудшению качества фильтрации на участках свободного полета КА. Поэтому для активных КА, у которых периодически происходит срабатывание управляющих двигателей (коррекции или ориентации), были определены примерные значения параметров, обеспечивающие достаточно высокую точность формируемой оценки орбиты как на участках свободного полета КА, так и на участках коррекции траектории. На рис. 10.3 приведены графики ошибок оценки орбиты по координатам и скорости относительно КСВ, формируемой по «сырым» измерениям, на участке коррекции орбиты МКС при $T_X = 1000$ с, $T_V = 10$ с, $T_P = 300$ с. Из приведенных графиков видно, что «разлет» формируемой оценки орбиты не превысил 20 м, что почти в 1000 раз меньше «разлета» при фильтрации по координатам.

На рис. 10.4 для тех же постоянных времени фильтра приведены графики ошибок оценки орбиты по координатам и скорости (относительно «точной» оценки, формируемой фильтром с постоянными времени T_X, T_V, T_{aero} порядка

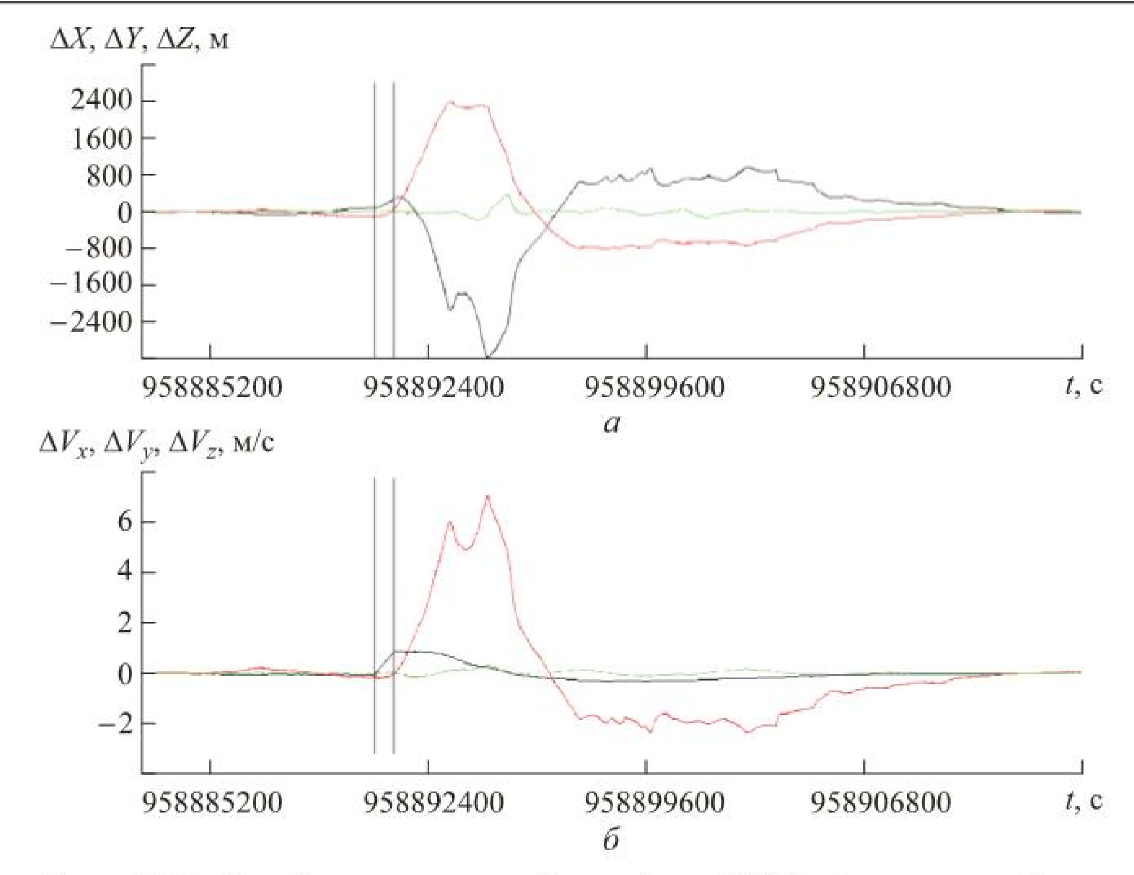


Рис. 10.2. Ошибки оценки орбиты (для КСВ), формируемой по «сырым» измерениям АСН-М (в ОСК) на участке коррекции орбиты МКС при постоянных времени фильтра порядка витка:
а — по координатам; *б* — по скорости

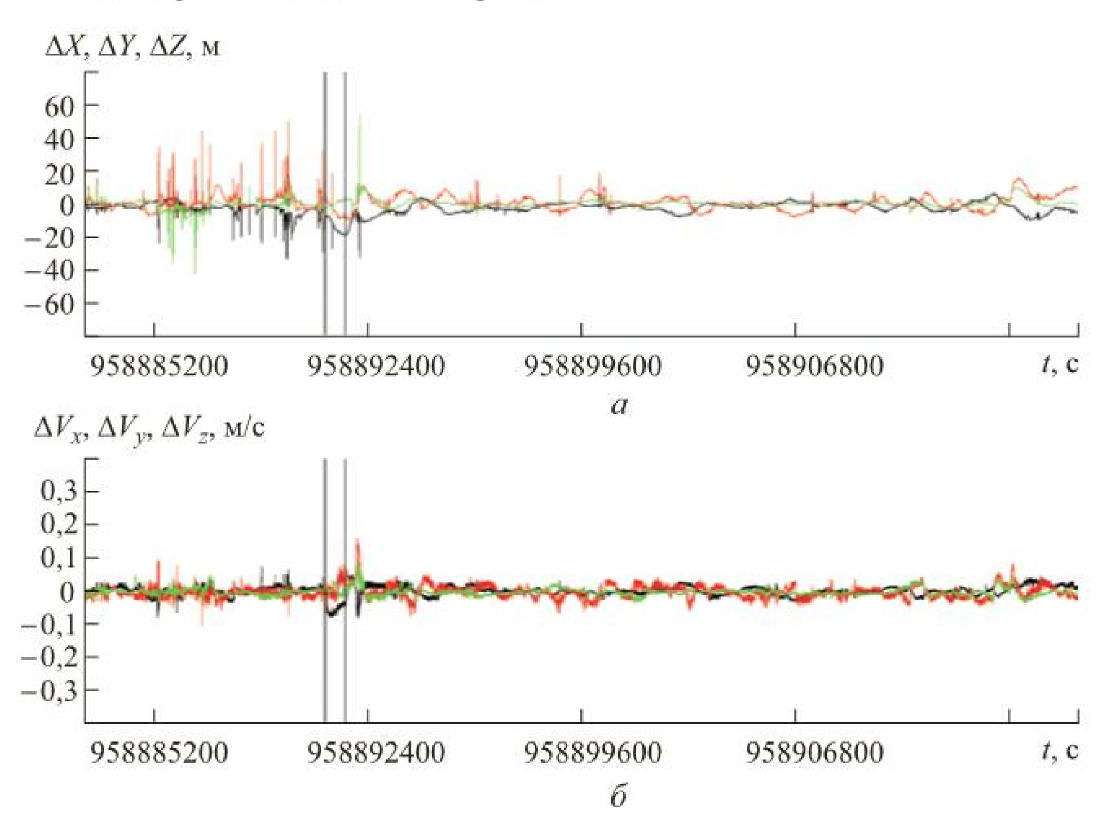


Рис. 10.3. Ошибки оценки орбиты МКС (для КСВ), формируемой по «сырым» измерениям АСН-М (в ОСК) на участке коррекции орбиты МКС при $T_X = 1000$ с, $T_V = 10$ с, $T_P = 300$ с:
а — по координатам; *б* — по скорости

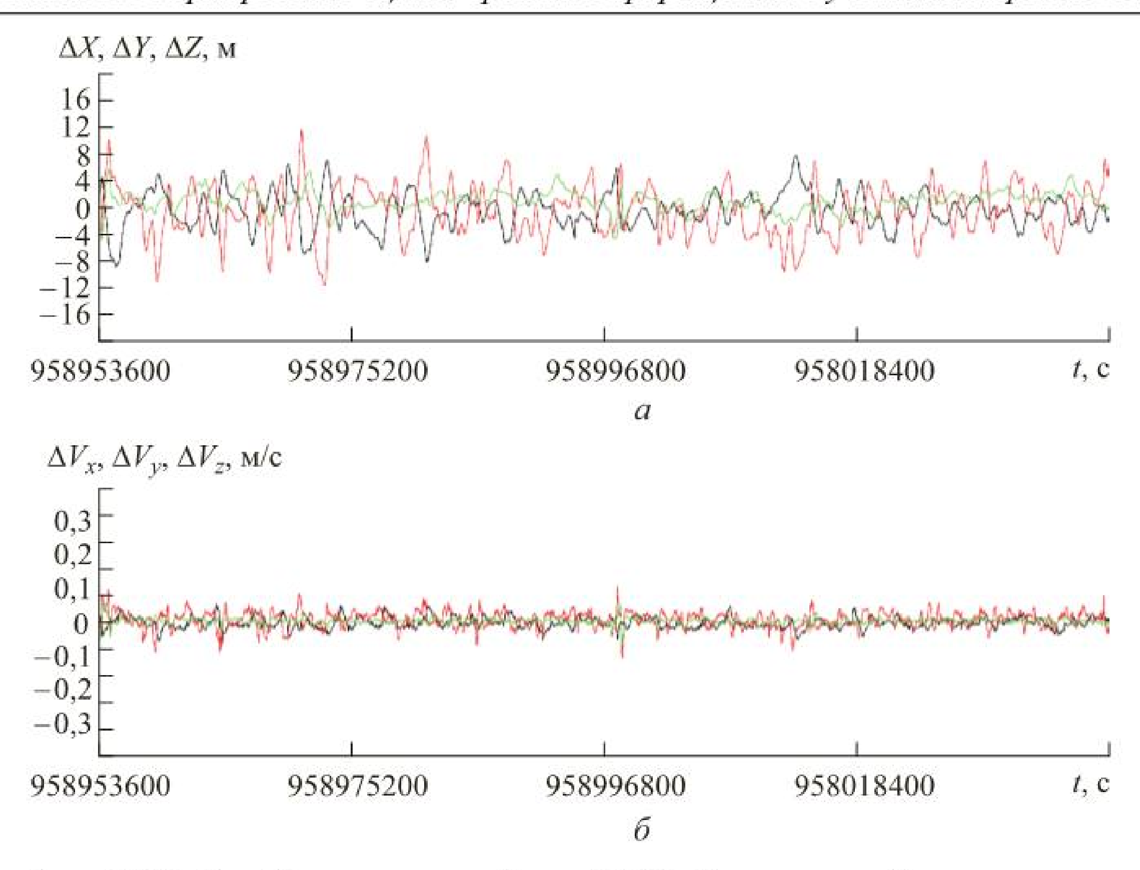


Рис. 10.4. Ошибки оценки орбиты МКС, формируемой по «сырым» измерениям АСН-М для альманаха из 30 НС (в ОСК) на участке свободного полета МКС при $T_X = 1000$ с, $T_V = 10$ с, $T_P = 300$ с:
а — по координатам; *б* — по скорости

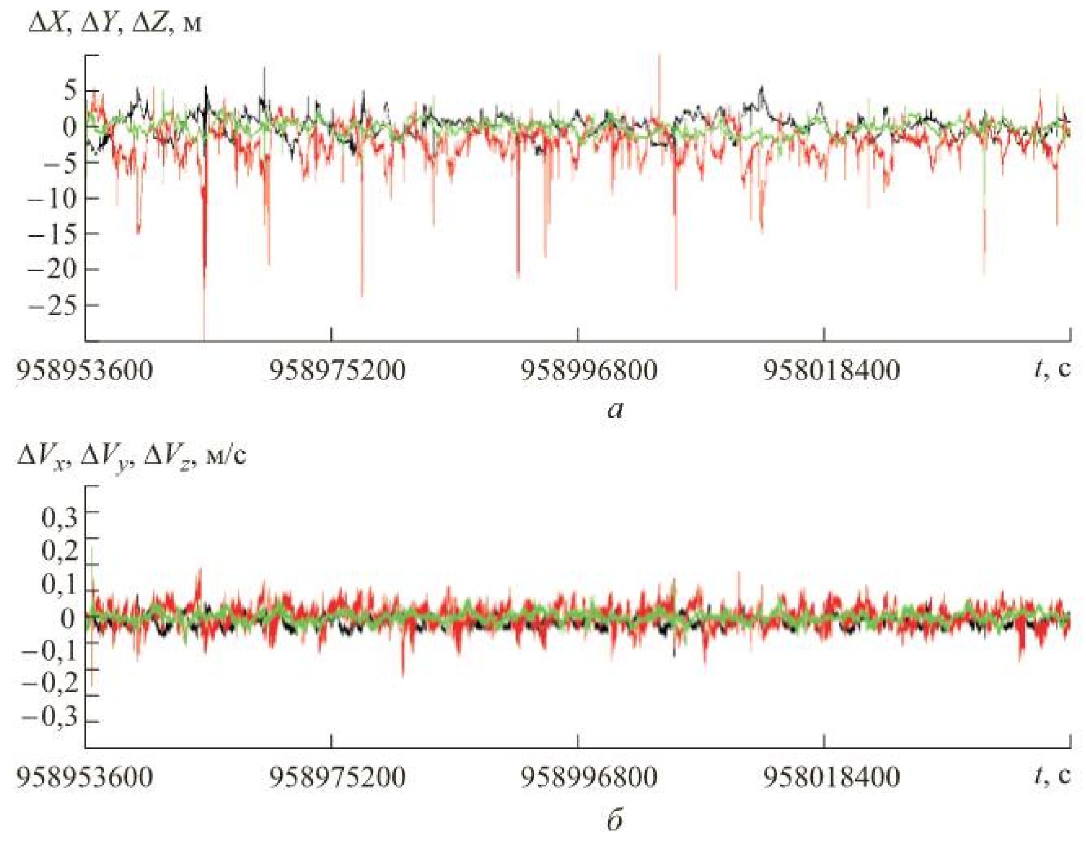


Рис. 10.5. Ошибки КСВ АСН-М МКС на суточном участке пассивного полета станции:
а — по координатам; *б* — по скорости

витка) для участка пассивного полета МКС. Из приведенных графиков видно, что ошибки оценки на суточном интервале не превышают 12 м по координатам и 5 см/с — по скорости. При этом, в течение ~95 % указанного времени эти ошибки не превышают 8 м по координатам и 2 см/с по скорости. Чтобы оценить эффективность фильтра, рассмотрим ошибки КСВ, сформированных АСН-М МКС на том же участке орбиты.

На рис. 10.5 приведены графики ошибок КСВ по координатам и скорости относительно «точной» оценки, из которых видно, что нефильтрованные измерения координат и скорости (КСВ) имеют значительную шумовую составляющую, а также ошибки в виде кратковременных выбросов, достигающих на рассматриваемом участке орбиты 30 м по координатам и 8 см/с по скорости.

Сравнивая эти графики с графиками ошибок оценки орбиты, формируемой рассматриваемым фильтром (см. рис. 10.4), можно констатировать, что данная оценка имеет значительно более высокую точность, отсутствие «выбросов» и шумовой составляющей ошибок.

10.6. Зависимость точности формируемой оценки орбиты и устойчивости по отношению к внешним возмущающим ускорениям от числа видимых НС

В 9.2 исследовали вопрос влияния числа НС в группировке на точность формируемой оценки орбиты при фильтрации «сырых» измерений с большой (порядка витка) постоянной времени фильтра. Было показано, что в этом случае число НС в группировке слабо влияет на точность формируемой оценки. Уменьшение числа НС почти в 2 раза практически не ухудшало достигаемую точность. Даже при наличии в общей группировке всего четырех НС фильтр обеспечивал формирование оценки орбиты МКС с приемлемой точностью ~25 м (см. рис. 9.5). Такая устойчивость фильтра по отношению к числу спутников обеспечивается благодаря большой постоянной времени фильтра. Ситуация меняется при уменьшении постоянных времени фильтра, обеспечивающих устойчивость к внешним возмущающим ускорениям. При этом из всего объема записанных измерений АСН-М были исключены измерения семи НС. В результате, группировка НС GPS включала 23 спутника вместо 30. Графики числа используемых для формирования оценки НС в случае группировки из 30 и 23 НС приведены на рис. 10.6.

В этом случае число НС в группировке оказывает существенное влияние как на точность формируемой оценки орбиты на участках пассивного полета КА, так и на устойчивость фильтра к внешним возмущающим ускорениям, что показано на рис. 10.7 и 10.8, на которых приведены графики ошибок формируемых оценок орбиты МКС, полученных по лётным данным АСН-М МКС для того же участка орбиты, что и графики, приведенные на рис. 10.3 и 10.4.

Параметры фильтра были выбраны такие же, как и при формировании оценки по измерениям от группировки из 30 НС. Из приведенных графиков видно, что «разлет» фильтра из-за работы двигателя коррекции увеличился с 20 до 65 м. На 20…30 % в среднем увеличились ошибки формируемой оценки орбиты как по координатам, так и по скорости. В основном ошибки по координатам не превышали 12 м, хотя наблюдались два всплеска по высоте длительностью ~10 мин и амплитудой 20 м. Приведенный пример показывает, что точность формируемой оценки и устойчивость фильтра к возмущениям существенно зависит от числа НС в группировке. Снижение числа НС приводит к увеличению ошибок. Соответственно, увеличение числа НС должно обеспечить повышение точности, однако, к сожалению, подтвердить это предположение по имеющимся лётным данным АСН-М МКС не представляется возможным, так как в проведенном на МКС эксперименте был реализован режим GPS (число спутников в группировке на тот момент составляло 30 НС), а не режим GPS+ГЛОНАСС, в котором число НС в общей группировке спутников могло быть увеличено до 54. Ввиду этого точностные характеристики оценки орбиты, формируемой рассматриваемым фильтром в режиме GPS+ГЛОНАСС при общем числе НС до 56 НС, были получены путем моделирования.

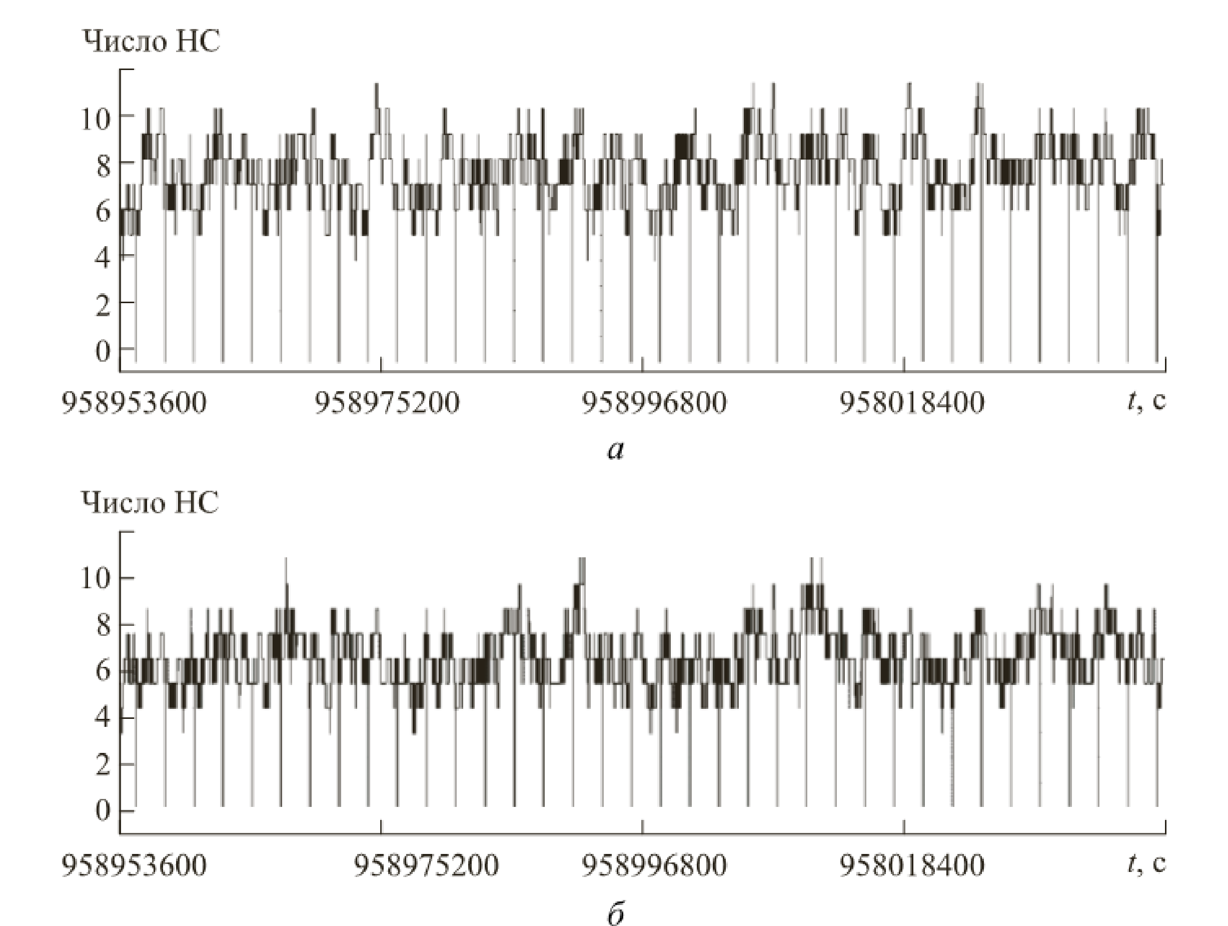


Рис. 10.6. График числа видимых навигационных спутников для альманаха GPS из 30 (*а*) и 23 (*б*) НС

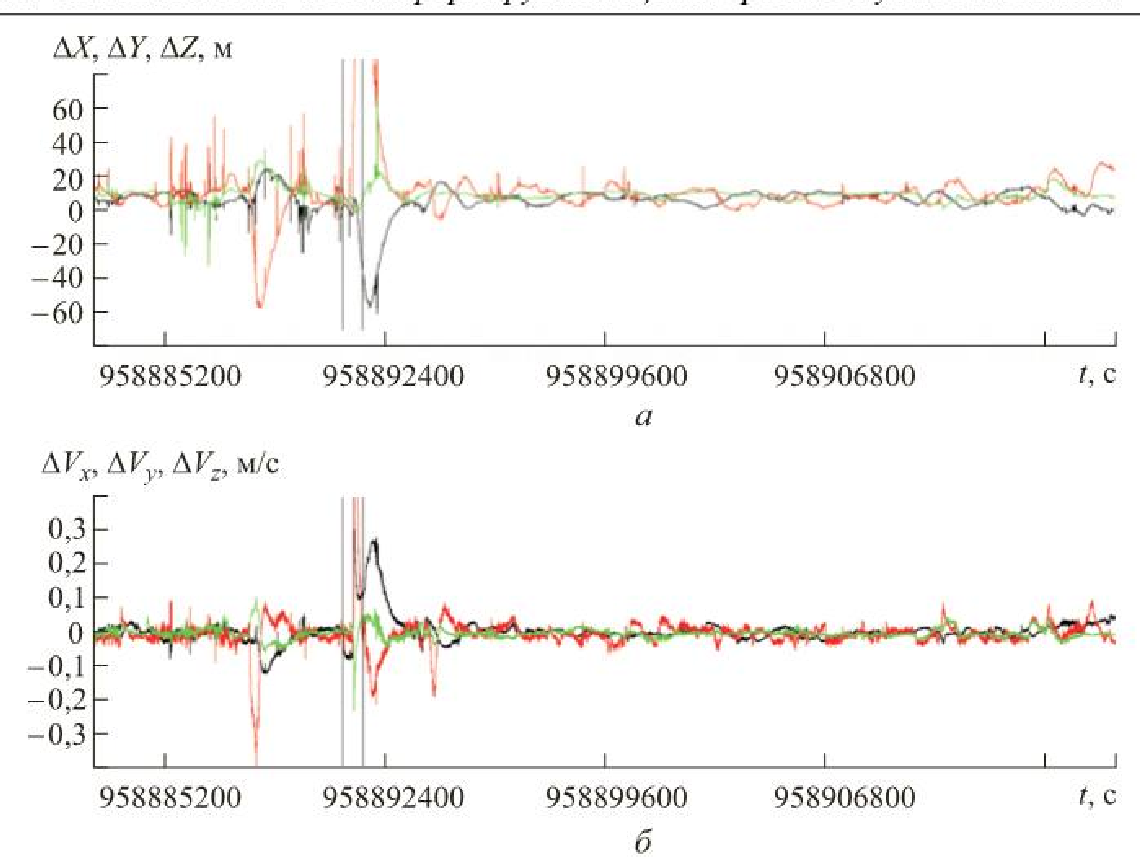


Рис. 10.7. Ошибки оценки орбиты МКС по «сырым» измерениям АСН-М (для КСВ), для альманаха из 23 НС GPS:
а — по координатам; *б* — по скорости

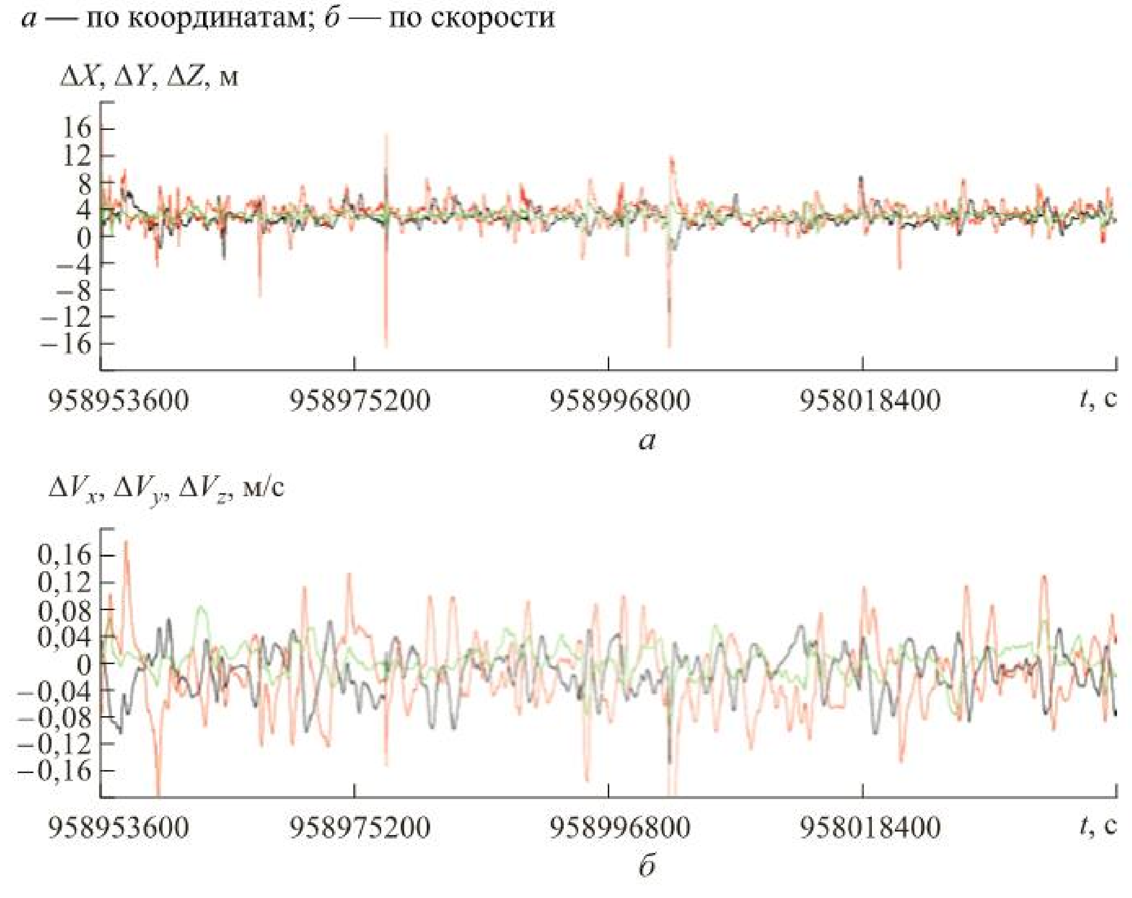


Рис. 10.8. Ошибки оценки орбиты МКС, формируемой по «сырым» измерениям АСН-М (в ОСК) на участке свободного полета МКС для альманаха из 23 НС GPS:
а — по координатам; *б* — по скорости

Моделирование проводилось для того же суточного участка орбиты МКС в режимах GPS для альманахов из 30 НС и 23 НС, а также в режиме GPS+ГЛОНАСС для альманаха из 54 НС в группировке. Оценка орбиты МКС формировалась по моделируемым «сырым» измерениям АСН с постоянными времени T_X = 1000 с, T_V = 10 с, T_P = 300 с. На рис. 10.9 и 10.10 приведены графики ошибок оценок по координатам и приращенным координатам, полученным по моделируемым «сырым» измерениям АСН для альманахов GPS из 30 и 23 НС соответственно. Сравнив эти графики с аналогичными графиками, полученными путем фильтрации реальных «сырых» измерений АСН-М МКС, приведенными на рис. 10.4 и 10.8, можно сделать вывод, что используемая модель АСН-М МКС с хорошей репрезентативностью моделирует измерения АСН, так как графики ошибок оценок для обоих альманахов близки к соответствующим графикам, полученным по реальным лётным данным. Можно считать, что приведенные ниже результаты моделирования с хорошей точностью отражают соответствующую моделируемую ситуацию.

На рис. 10.11 приведены графики ошибок по координатам и скорости оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС для альманаха из 54 НС при постоянных времени фильтра T_X = 1000 с, T_V = 10 с, T_P = 300 с. Сравнивая эти графики с графиками на рис. 10.10 и 10.11, можно сделать вывод, что с увеличением числа НС в альманахе повышаются точность формируемой оценки как по координатам, так и по скорости. В данном случае точность в режиме GPS+ГЛОНАСС повысилась в ~1,5 раза по сравнению с точностью в режиме GPS с альманахом из 30 НС и в 2–2,5 раза по сравнению с точностью в режиме GPS с альманахом из 23 НС.

Оценим устойчивость формируемой оценки орбиты по отношению к внешним возмущающим ускорениям. Из графиков, приведенных на рис. 10.3 видно, что для постоянных времени T_X = 1000 с, T_V = 10 с, T_P = 300 с при коррекции орбиты МКС с ускорением от двигателей ~$1{,}3 \cdot 10^{-3}$ м/с^2 в течение ~600 с «разлет» фильтра по продольной дальности ΔX составил ~20 м. При моделировании работы АСН в режиме GPS также была реализована коррекция орбиты МКС длительностью ~600 с, но с увеличенным ускорением 10^{-2} м/с^2. Графики «разлета» оценки для этого случая приведены на рис. 10.12, из которого видно, что «разлет» по продольной дальности составил 160 м, т. е. увеличился пропорционально возмущающему ускорению. Аналогичное моделирование было проведено для режима GPS+ГЛОНАСС с альманахом из 54 НС. Графики «разлета» оценки орбиты для этого случая приведены на рис. 10.13. Из них видно, что «разлет» не изменился.

Тем не менее «разлет» оценки может быть существенно уменьшен при уменьшении постоянной времени T_V. На рис. 10.14 приведены графики ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС на участке коррекции с ускорением от двигателей коррекции 10^{-2} м/с^2 в течение 600 с при постоянных времени фильтра T_X = 1000 с, T_V = 10 с, T_P = 300 с.

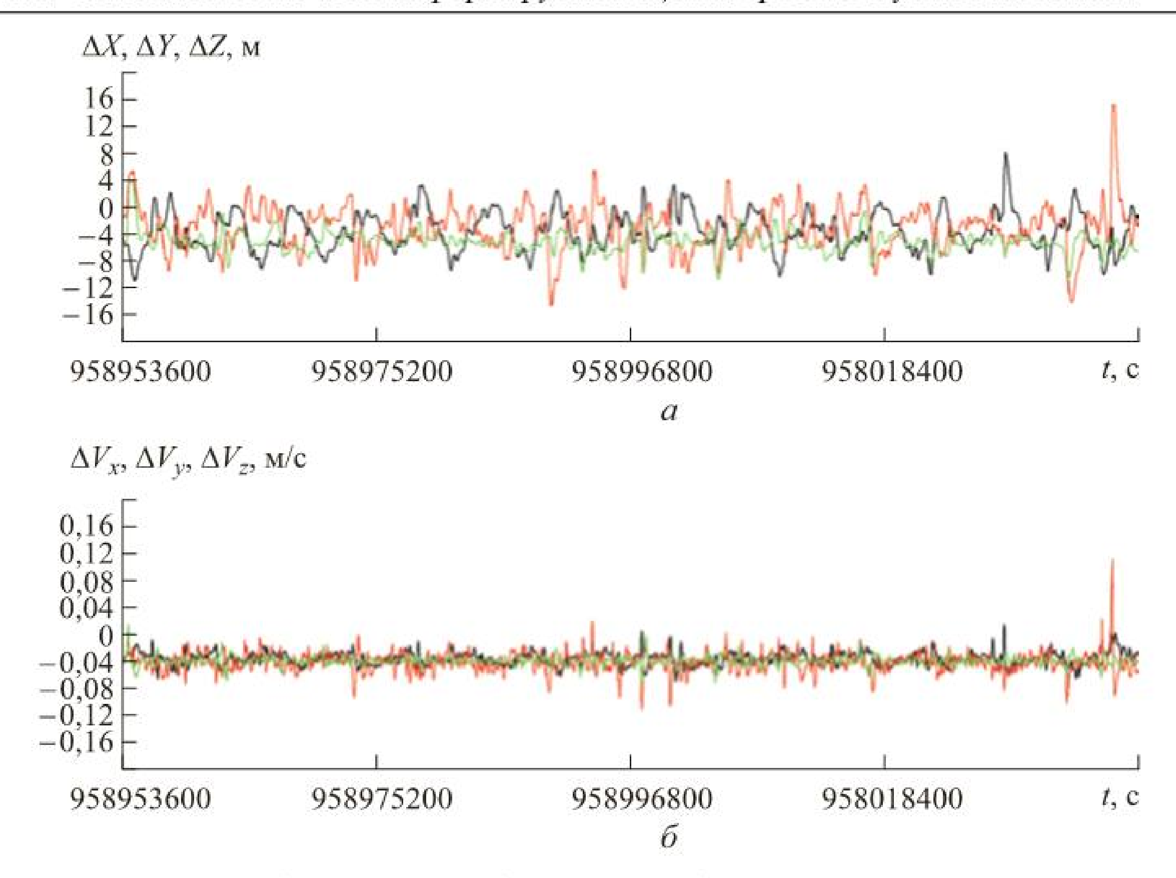


Рис. 10.9. Ошибки оценки орбиты МКС, сформированной по моделируемым «сырым» измерениям АСН (в ОСК) для альманаха GPS из 30 НС на участке свободного полета МКС при $T_X = 1000$ с, $T_V = 10$ с, $T_P = 300$ с: *а* — по координатам; *б* — по скорости

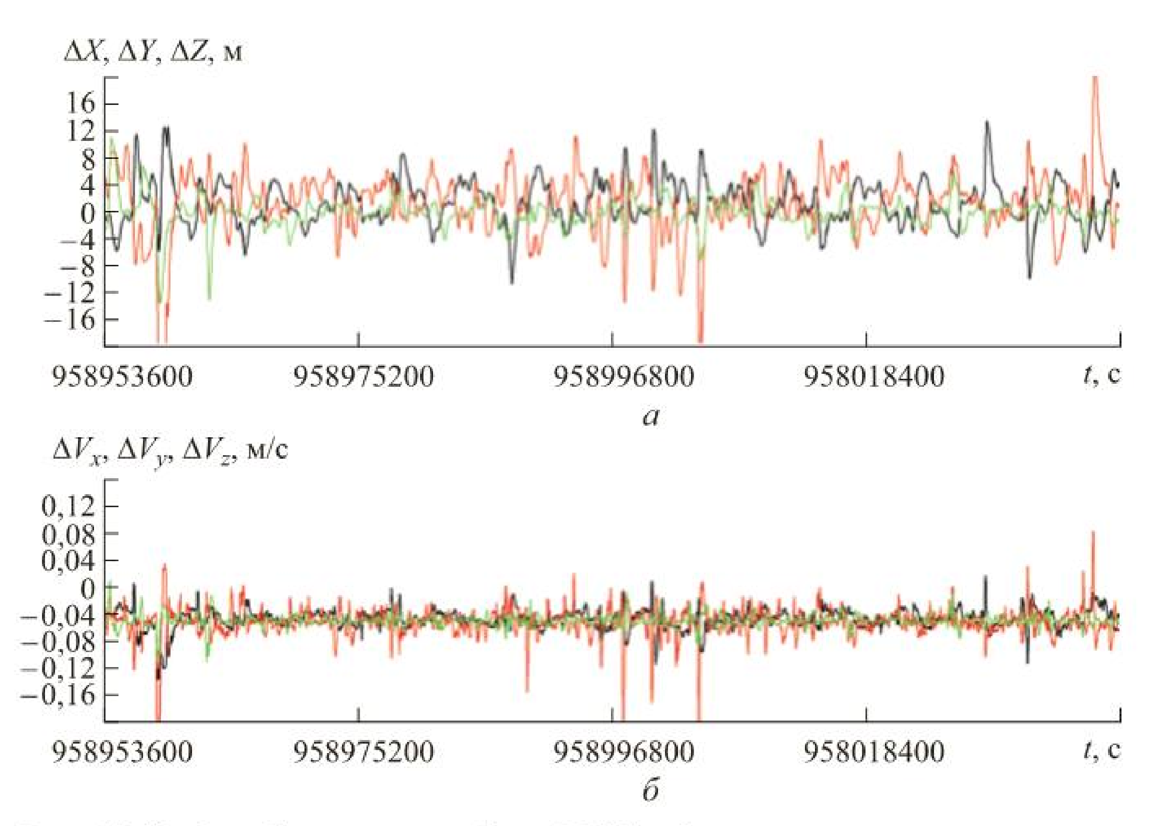


Рис. 10.10. Ошибки оценки орбиты МКС, сформированные по моделируемым «сырым» измерениям АСН (в ОСК) для альманаха GPS из 23 НС на участке свободного полета МКС при $T_X = 1000$ с, $T_V = 10$ с, $T_P = 300$ с *а* — по координатам; *б* — по скорости

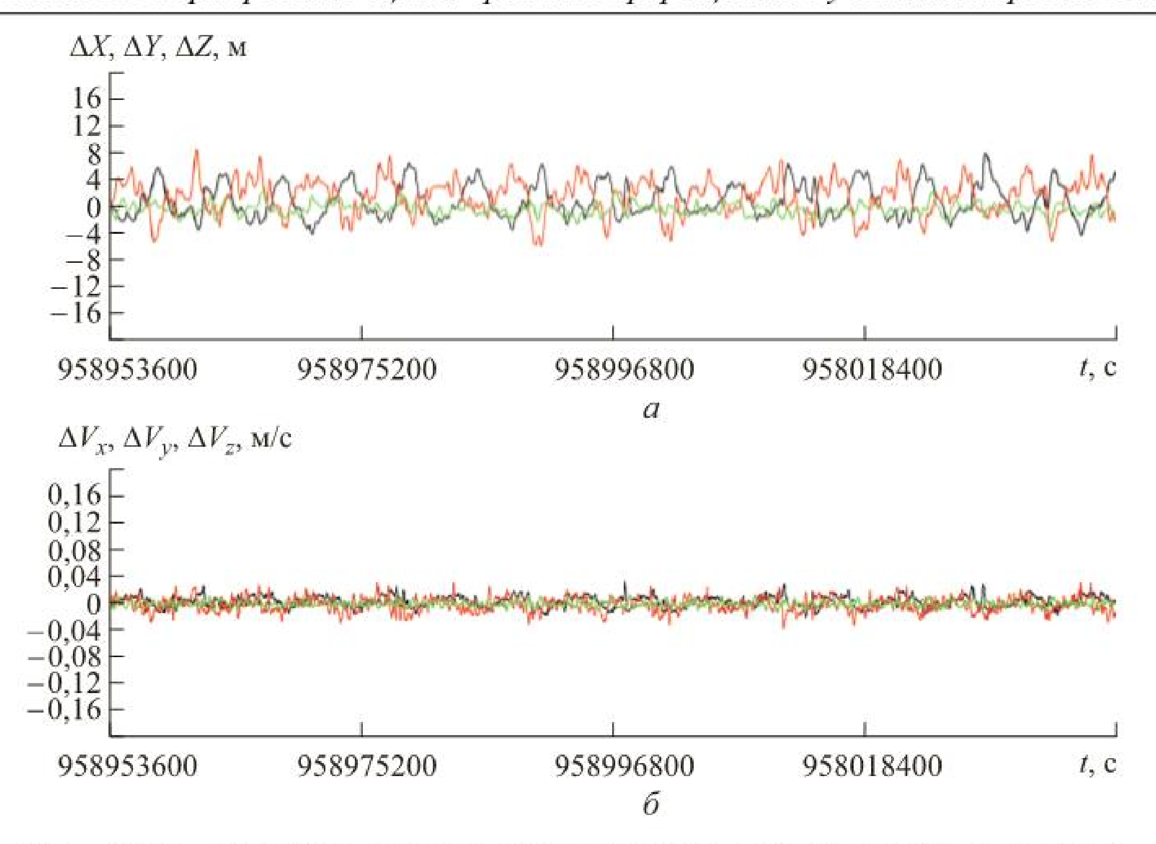


Рис. 10.11. Ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС для альманаха из 54 НС на участке пассивного полета МКС при постоянных времени фильтра $T_X = 1000$ с, $T_V = 10$ с, $T_P = 300$ с: *а* — по координатам; *б* — по скорости

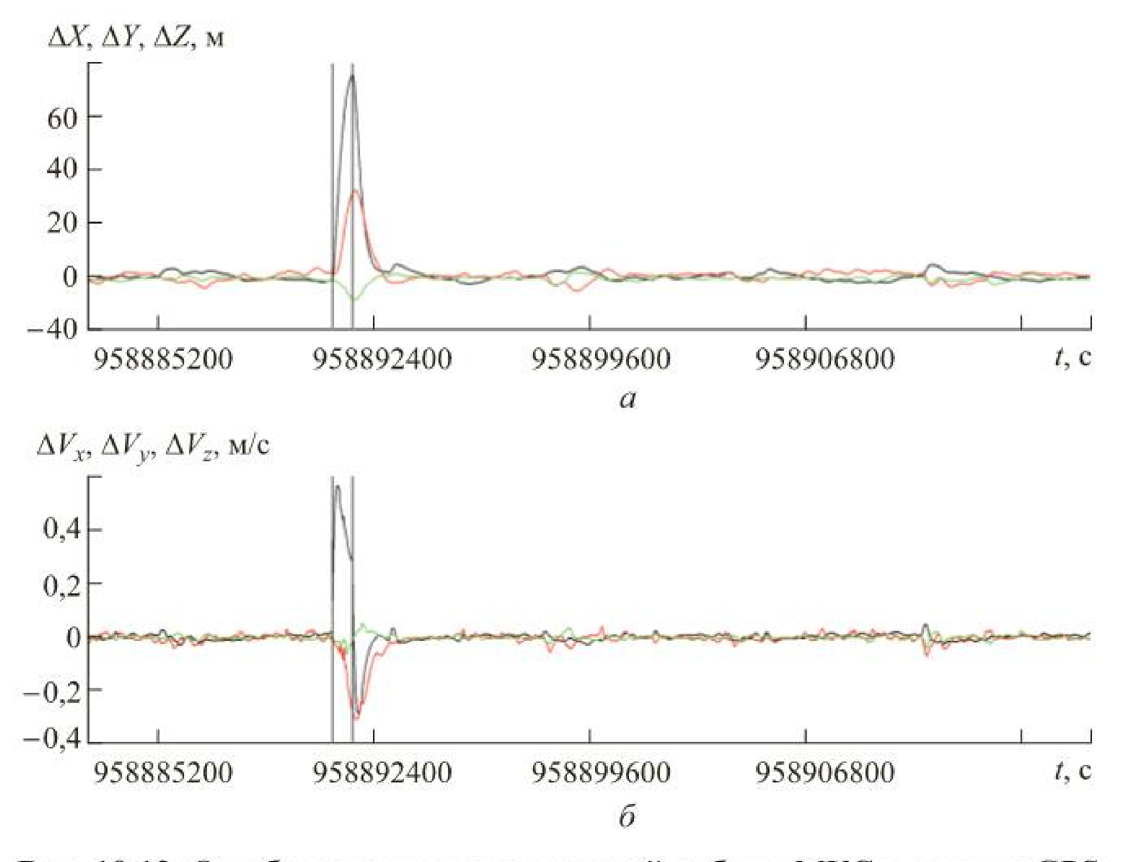


Рис. 10.12. Ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS на участке коррекции с ускорением от двигателей коррекции 10^{-2} м/с^2 при постоянных времени фильтра $T_X = 1000$ с, $T_V = 10$ с, $T_P = 300$ с: *а* — по координатам; *б* — по скорости

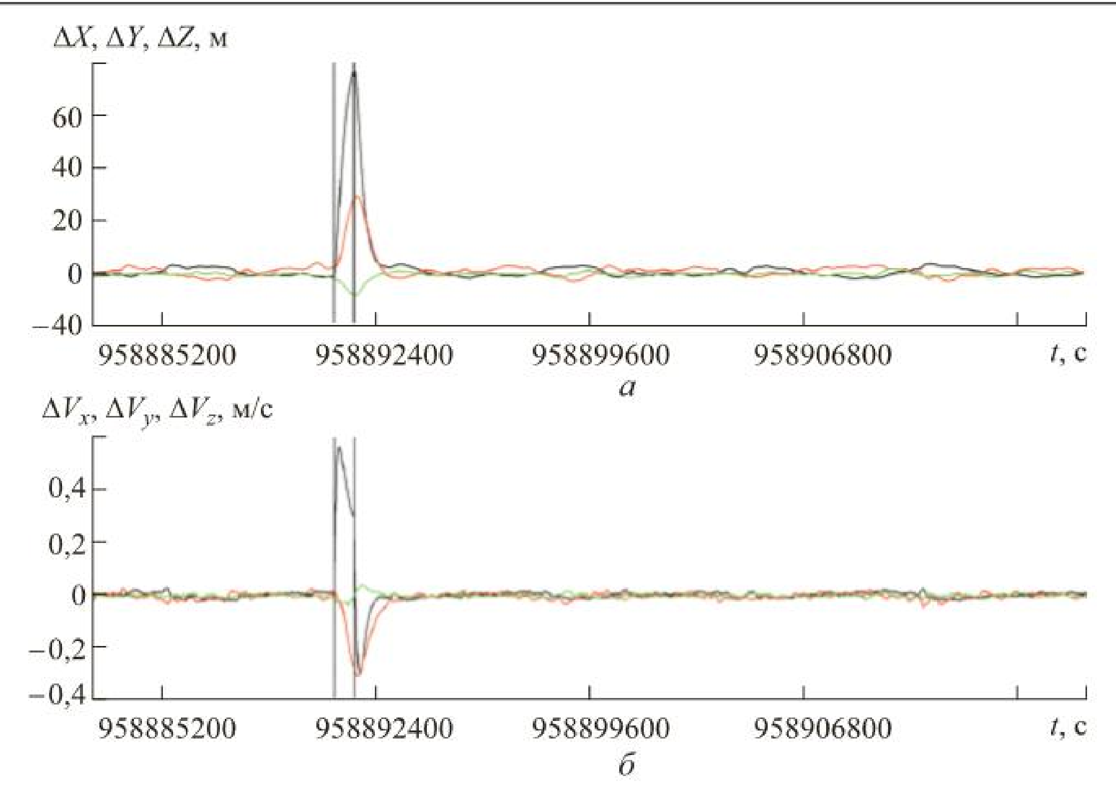


Рис. 10.13. Ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС на участке коррекции с ускорением от двигателей коррекции 10^{-2} м/с^2 при постоянных времени фильтра T_X = 1000 с, T_V = 10 с, T_P = 300 с:
а — по координатам; *б* — по скорости

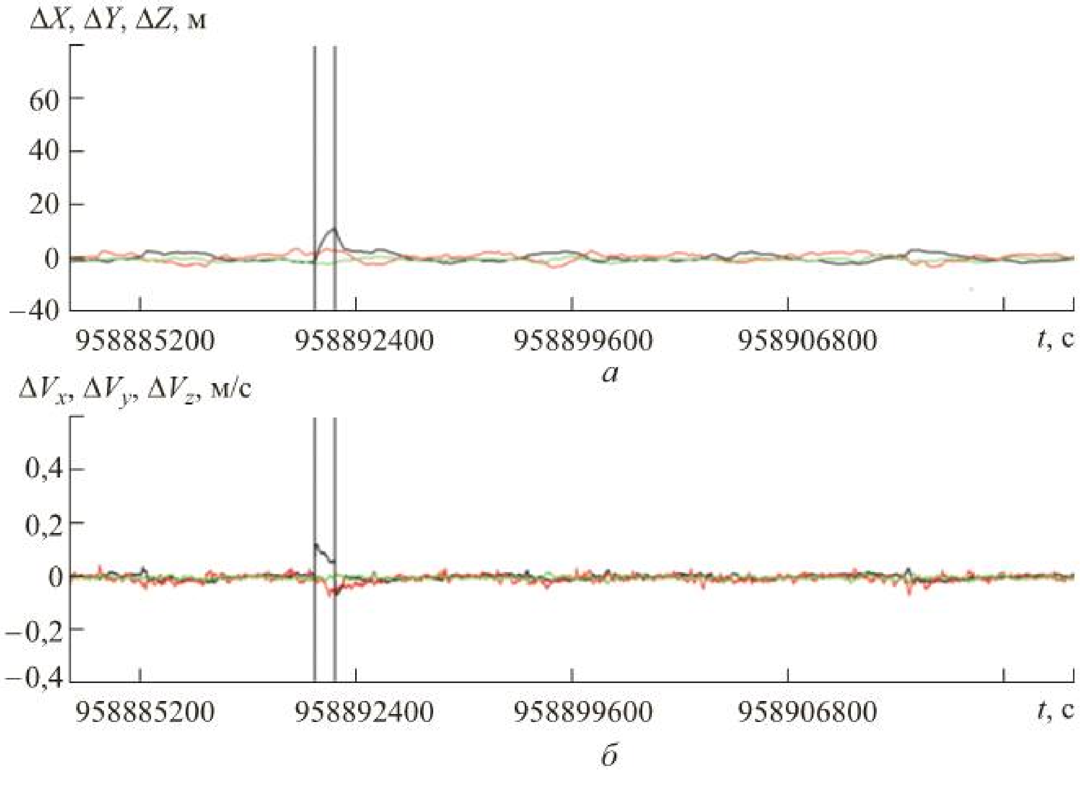


Рис. 10.14. Ошибки оценки моделируемой орбиты МКС в режиме GPS+ГЛОНАСС на участке коррекции с ускорением от двигателей коррекции 10^{-2} м/с^2 при постоянных времени фильтра T_X = 1000 с, T_V = 3 с, T_P = 300 с:
а — по координатам; *б* — по скорости

Из данных графиков видно, что «разлет» оценки по продольной дальности уменьшился со 160 м (для $T_V = 10$ с) до 20 м. Таким образом, рассмотренные в настоящей главе алгоритмы динамической фильтрации полного состава «сырых» измерений АСН при соответствующем выборе постоянных времени фильтра T_X, T_V, T_P позволяют при сохранении высокой точности формируемой оценки орбиты в десятки тысяч раз повысить устойчивость оценки к внешним возмущающим ускорениям по сравнению с алгоритмами динамической фильтрации по формируемым АСН координатам КА.

Так графики «разлета» оценки орбиты МКС, формируемой по измеряемым координатам, приведенные на рис. 10.1 показывают, что при коррекции орбиты с ускорением от двигателей $1{,}3 \cdot 10^{-3}$ м/с^2 «разлет» по продольной дальности составил 17 км. При этом фильтр «сошелся» только через 4 ч. Фильтрация по полным «сырым» измерениям (см. рис. 10.14) при внешнем ускорении 10^{-2} м/с^2 в течение 600 с обеспечила «разлет», не превышающий 20 м, при этом через 5 мин после завершения коррекции формируемая оценка вышла на установившийся уровень точности 10 м.

10.7. Алгоритм формирования оценки орбиты и кажущейся скорости при больших ускорениях от корректирующих двигателей

В гл. 8–10 были рассмотрены алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН, обеспечивающие повышение точности формируемой оценки орбиты. При этом значительное повышение точности достигается в случае свободного полета КА без выполнения коррекции орбиты с помощью реактивных двигателей. Было показано, например, что для МКС, управляемой с помощью гиродинов с разгрузкой с помощью гравитационного момента (без работы реактивных двигателей), точность формируемой оценки орбиты достигает от 3 до 5 м по координатам и ~3 мм/с по скорости. При этом выполняется оценка и компенсация текущего аэродинамического ускорения. Однако точность формируемой оценки существенно ухудшается при наличии даже незначительных ускорений от двигателей. Так рис. 10.1 демонстрирует «разлет» фильтра, реализованного на МКС во время коррекции орбиты станции с помощью двигателей корабля «Прогресс», когда ускорение от двигателей составляло ~10^{-3} м/с^2.

Ускорения такого порядка часто реализуются на КА различных классов для обеспечения коррекции орбиты. Поэтому для этих случаев были разработаны алгоритмы динамической фильтрации полных «сырых» измерений АСН, повышающих точность формируемой оценки орбиты на фоне работы корректирующих двигателей. Выбором определенной комбинации постоянных времени фильтра удалось обеспечить, с одной стороны, значительное повышение точности оценки орбиты при выключенных двигателях и, с другой, — незначительное снижение точности на участке коррекции орбиты.

Например, графики ошибок формируемой оценки орбиты, приведенные на рис. 10.3, показывают, что на участке с выключенными двигателями ошибки оценки орбиты МКС составляли 10 м по координатам, а на участке с работающими двигателями — не превышали 20 м.

Увеличение ускорений от двигателей приводит к пропорциональному росту ошибок вектора состояния. На многих КА ускорения от двигателей составляют около 1 м/с^2, а могут быть и существенно выше. В этих случаях рассмотренные алгоритмы динамической фильтрации измерений АСН не могут обеспечивать формирование оценки орбиты с достаточной точностью на фоне работающих двигателей. Тогда точность формируемой оценки орбиты будет соответствовать точности КСВ, а точность формируемой кажущейся скорости — точности КСВ по скорости. Рассмотрим алгоритм формирования оценки орбиты на фоне больших ускорений КА от двигателей и оценки кажущегося ускорения относительно ИСК.

Пусть имеются измерения КСВ АСН на i-м и (i+1)-м шагах: $\overline{X}_i$, $\Delta\overline{X}_i$, $\overline{X}_{i+1}$, $\Delta\overline{X}_{i+1}$. В качестве оценки вектора состояния КА будем рассматривать вектор измерений КСВ, включающий векторы $\Delta\overline{X}_i$ и $\Delta\overline{X}_i$ с их привязкой к системному времени. Требуется определить вектор кажущегося ускорения $\overline{a}_{\text{ИСК}}$ в ИСК на i-м шаге по измерениям АСН на i-м и (i+1)-м шагах. Векторы состояния КА на i-м и (i+1)-м шагах относительно ГСК, измеряемых АСН, связаны рекуррентным соотношением:

$$\Delta X_{Gi+1} = \left(E + 2\Omega + \Omega^2\right)\Delta X_{Gi} - \left(E + \Omega\right)\Omega^2 \overline{X}_{Gi} + (E + \Omega) A_{\text{ИСК—ГСК}i}\overline{a}_i;$$
$$\overline{X}_{Gi+1} = \overline{X}_{Gi} + \Delta\overline{X}_{Gi+1}; \qquad (10.56)$$
$$\overline{a}_i = \overline{a}_{\text{г}i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\overline{a}}_{\text{г}i}\Delta t^4 + \overline{a}_{\text{и}i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\overline{a}}_{\text{и}i}\Delta t^4,$$

где Ω — матрица вращения Земли; Δt — время между i-м и (i+1)-м измерениями; $\overline{a}_\text{г}$ — внешние гравитационные ускорения; $\overline{a}_\text{и}$ — внешние инерциальные ускорения (например, от двигателей).

Вектор $\overline{a}_\text{г}$ известен с высокой точностью из модели движения КА. Вектор $\ddot{\overline{a}}_\text{г}$ для околокруговых орбит с высокой точностью может быть представлен в соответствии с формулой (3.11) в виде

$$\ddot{\overline{a}}_\text{г} = -\omega_0^2\overline{a}_\text{г}, \qquad (10.57)$$

где ω_0 — орбитальная угловая скорость КА.

Вектор состояния на i-й момент времени $\begin{pmatrix}\overline{X}_{Gi}\\ \Delta\overline{X}_{Gi}\end{pmatrix}$ измеряется АСН на i-м шаге. Введем следующее обозначение: $\Delta\overline{X}^*_{Gi+1}$ — значение вектора $\Delta\overline{X}_{Gi+1}$ при отсутствии ускорения от двигателей $\overline{a}_{\text{и}i}$ на i-м шаге.

Вектор $\Delta\overline{X}^*_{Gi+1}$ может быть вычислен по алгоритму (10.56) при нулевом значении вектора $\overline{a}_{\text{и}i}$, тогда для его определения получим уравнение

$$\Delta\overline{X}_{Gi+1} - \Delta\overline{X}^*_{Gi+1} = A_{\text{ИСК—ГСК}i}\left(\overline{a}_{\text{и}i}\Delta t^2 + \frac{1}{12}\ddot{\overline{a}}_{\text{и}i}\Delta t^4\right). \qquad (10.58)$$

Из равенства (10.58) можно найти значение вектора ускорения $\overline{a}_{\text{и}i}$ относительно ИСК:

$$\overline{a}_{\text{и}i} = \frac{1}{\Delta t^2} A^{\text{T}}_{\text{ИСК—ГСК}i}\left(\Delta\overline{X}_{Gi+1} - \Delta\overline{X}^*_{Gi+1}\right) - \frac{1}{12}\ddot{\overline{a}}_{\text{и}i}\Delta t^2. \qquad (10.59)$$

В формуле (10.59) матрица $A_{\text{ИСК—ГСК}}$ формируется в БИНС, для АСН-К $\Delta t = 1$ с, $\Delta\overline{X}_{Gi+1}$ определяется АСН, а $\Delta\overline{X}^*_{Gi+1}$ — по алгоритму (10.56) для нулевого значения вектора $\overline{a}_{\text{и}i}$. Проблему представляет нахождение вектора $\ddot{\overline{a}}_{\text{и}}$. Если вектор ускорения $\overline{a}_{\text{и}}$ обусловлен работой двигателя, то за исключением моментов начала и конца работы вторая производная от тяги пренебрежимо мала по сравнению с тягой $\overline{a}_{\text{и}}$. С учетом коэффициента 1/12 вектором $\ddot{\overline{a}}_{\text{и}}$, последним слагаемым равенства (10.59), можно пренебречь практически без потери точности.

Вычисленный вектор $\overline{a}_{\text{и}}$ может быть преобразован к ССК по формуле

$$\overline{a}_{\text{ССК}i} = A_{\text{ИСК—ССК}i}\,\overline{a}_{\text{и}i}, \qquad (10.60)$$

где $A_{\text{ИСК—ССК}i}$ — матрица перехода от ИСК к ССК.

Таким образом, используя в качестве текущего вектора состояния непосредственно измерения КСВ АСН, можно непрерывно формировать вектор состояния на фоне значительных возмущений от корректирующих двигателей. При этом возмущения орбиты не влияют на точность измерений АСН. Сами возмущения могут быть оценены по формулам (10.56), (10.59), что показано на рис. 10.15. Графики получены по результатам моделирования дальнего и ближнего сближения корабля «Союз» с МКС.

В процессе сближения на дальнем расстоянии работают корректирующие двигатели (КД), создающие ускорение ~0,5 м/с^2, на малых расстояниях сближение обеспечивается с помощью двигателей причаливания и ориентации (ДПО). Циклограмма включения КД и ДПО приведена на рис. 10.15, *в*. На рис. 10.15, *а* представлены ошибки КСВ по координатам, на рис. 10.15, *б* — ошибки КСВ по скорости. Из графиков видно, что работа двигателей КД и ДПО не влияет на измерения АСН. Точность измерений КСВ по координатам составляет 10…20 м. Более высокие ошибки (до 20 м), обусловленные ионосферными задержками, отмечаются по вертикали ΔY на солнечной стороне части орбиты.

Ошибки по скорости составляют 3…5 см/с и также в основном обусловлены влиянием ионосферы на солнечной части орбиты. Отметим, что наблю-

даемые на графиках ошибок по скорости одномоментные всплески обусловлены дискретностью модели ионосферы Земли. В реальности такие всплески отсутствуют.

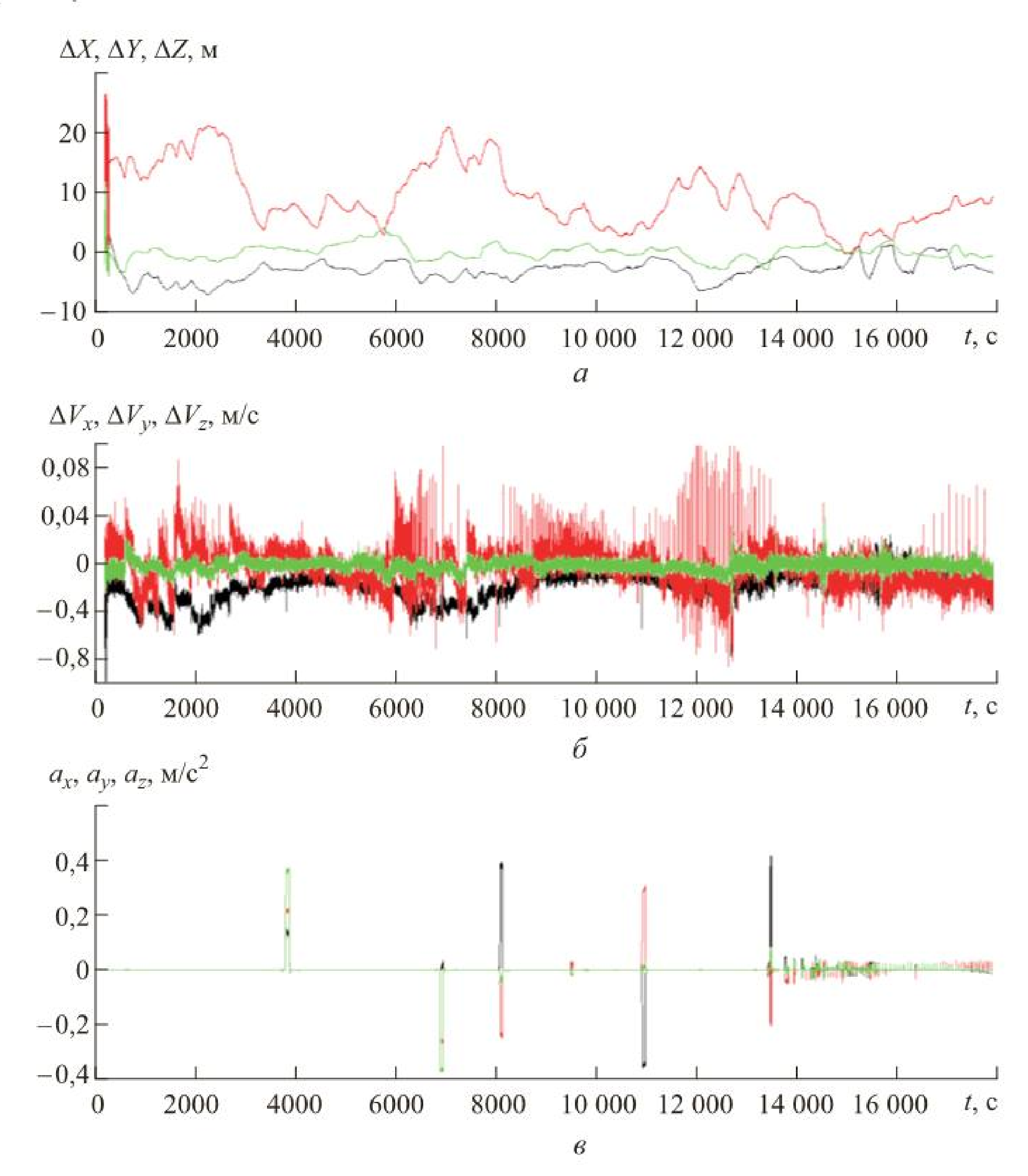


Рис. 10.15. Ошибки КСВ по координатам (*а*) и скорости (*б*) на фоне работы СКД и ДПО, циклограмма включений двигателей на участках дальнего и ближнего сближения (*в*)

На рис. 10.16 для этого же участка моделирования дальнего и ближнего сближения КА «Союз» с МКС приведены графики ускорений от двигателей к ИСК. На рис. 10.16, *а* представлено реальное ускорение в ИСК, на рис. 10.16, *б* — ускорение оцененное по измерениям АСН. Из графиков следует, что оцененное ускорение с высокой точностью совпадает с реальным. Оцененное ускорение имеет шумовую составляющую амплитудой ~0,02 м/с^2, обусловленную ошибками измерений АСН.

Возможность оценки ускорений от двигателей с помощью АСН придает АСН новое качество. Совместно с определением ориентации определение ускорений позволяет с помощью АСН на КА решить задачи БИНС. Например, одной из таких задач является управление включениями КД при коррекции орбиты. Для этого на КА используются акселерометры, установленные по оси КД. При включении двигателя акселерометр осуществляет интегрирование продольного ускорения и по достижении кажущейся скорости (интеграла от ускорения) заданного значения осуществляет выключение КД.

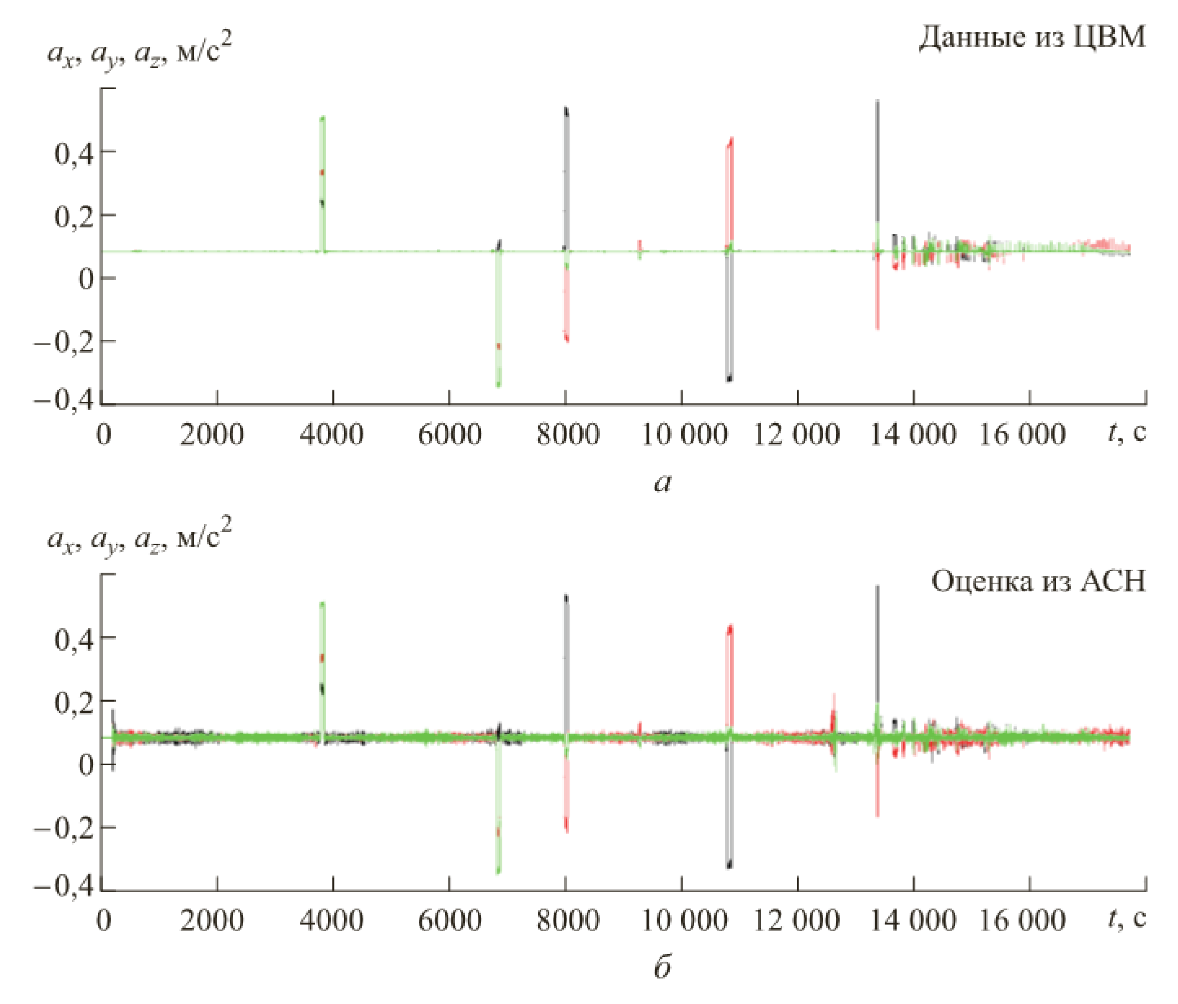


Рис. 10.16. Ускорения от двигателей в ССК на участках дальнего и ближнего сближения:

а — реальное ускорение; *б* — ускорение, измеренное АСН

Аналогичная задача может быть решена с помощью АСН интегрированием значения кажущегося ускорения $\overline{a}_{\text{ССК}i}$, сформированного по (10.60). Ожидаемая ошибка определения вектора кажущейся скорости составляет 5…10 см/с, что соответствует точности формируемых импульсов скорости на участке дальнего сближения кораблей «Союз» и «Прогресс» с МКС.

Контрольные вопросы

1. Каковы алгоритмы динамической фильтрации полных «сырых» измерений АСН в приращениях?

2. Как влияют внешние возмущающие ускорения на устойчивость оценки орбиты, формируемой методом динамической фильтрации полных «сырых» измерений АСН в приращениях?

3. Как зависит точность оценки орбиты от числа НС в группировке спутников?

4. Каковы алгоритмы формирования оценки орбиты по кажущейся скорости при больших ускорениях от корректирующих двигателей?

5. Как можно скомпенсировать влияние ускорений от двигателей при формировании оценки орбиты по кажущейся скорости?

Глава 11
Навигация высокоорбитальных космических аппаратов по измерениям глобальных спутниковых навигационных систем

11.1. Общие сведения

К низким орбитам с точки зрения навигации по измерениям ГСНС будем относить орбиты, на которых в верхней полусфере (над местным горизонтом) всегда или почти всегда находится четыре и более НС. Типовой график видимости НС GPS антенной АСН-М МКС, направленной в зенит, представлен на рис. 7.1. Число одновременно видимых спутников НС находится в диапазоне 5…12, т. е. среднее их число составляет ~8 НС.

С увеличением высоты орбиты число видимых спутников уменьшается, появляются участки орбиты, на которых их меньше четырех. Дальнейшее увеличение высоты приводит к увеличению количества таких участков и их длительности. На высоте свыше 2000 км участки орбиты с числом видимых НС менее четырех начинают по суммарной длительности превышать участки с числом НС более четырех. Поэтому высоту 2000 км условно будем считать границей между низкими и высокими орбитами. В качестве примера низкоорбитального КА рассматривалась МКС. Возможности ГСНС в части решения навигационной задачи МКС исследовались как путем моделирования измерений АСН, так и с использованием реальных лётных данных, полученных на МКС в процессе проведения различных экспериментов, а также в процессе штатной работы АСН-М МКС.

В качестве примера высокоорбитальных КА будем рассматривать спутники, находящиеся на ВЭО, ГСО, а также НС ГЛОНАСС и GPS. Особенности функционирования АСН на ВЭО и ГСО будут исследоваться путем моделирования с использованием разработанных моделей движения КА. Результаты моделирования можно считать верными, если есть абсолютная уверенность в правильности разработанных моделей. Сегодня существует уникальная возможность проведения такой верификации с использованием высокоточных эфемерид спутников ГЛОНАСС и GPS. В Интернете для этих спутников представлены реальные высокоточные эфемериды, полученные постобработкой передаваемых потребителю *broadcast*-эфемерид с использованием дополнительных измерений. Эфемериды представлены в виде векторов координат центров масс спутников в ГСК (*WGS*-84) дискретностью 15 мин. Их точность составляет единицы сантиметров (декларируемая точность эфемерид GPS — 3 см, ГЛОНАСС — 5 см). Это означает, что для спутников ГЛОНАСС и GPS исследования можно проводить практически с идеальными данными об их

движении, по которым с высокой точностью верифицируют разработанные модели движения КА, используемые как в наземных исследовательских стендах, так и в бортовом ПО разрабатываемых объектов. Такая верификация была рассмотрена в гл. 2.

Было показано, что для высокоорбитальных КА разработанные модели движения КА при трехсуточном прогнозе дают суммарную ошибку порядка 3 м относительно точной орбиты, что соответствует значению неучтенных возмущающих ускорений $\sim 10^{-9}$ м/с^2.

Другим источником ошибок моделирования являются ошибки моделирования самих измерений АСН. Здесь следует отметить, что сравнение результатов моделирования измерений с реальными измерениями АСН, выполненными как на Земле, так и на МКС, позволяют сделать заключение, что используемые модели измерений АСН близки к измерениям реальных АСН, работающих, соответственно, на Земле или на орбите КА. Поэтому с большой долей уверенности можно сказать, что представленные ниже ожидаемые характеристики систем навигации высокоорбитальных КА близки характеристикам проектируемых реальных систем, реализующим предлагаемые алгоритмы решения соответствующих задач.

11.2. Навигация высокоэллиптических КА по измерениям АСН в окрестности перигея

Навигация высокоэллиптических КА с использованием АСН существенно отличается от навигации низкоорбитальных КА. На низкоорбитальных КА антенна АСН, направленная в зенит, всегда «видит» достаточное количество НС для одномоментного решения навигационной задачи и формирования КСВ. Измеренные КСВ непрерывно поступают в динамический фильтр, формирующий более точную (по сравнению с КСВ) оценку орбиты. В гл. 7 было показано, что динамический фильтр КСВ, реализованный на МКС, обеспечивает точность оценки орбиты 3…5 м при условии, что бортовая модель движения КА, реализованная в фильтре, включает модель гравитационного поля Земли порядка не ниже 72×72 и модель аэродинамического торможения. При этом нет необходимости в модели движения учитывать такие возмущающие факторы, как влияние Луны и Солнца, сил солнечного давления.

Для высокоэллиптических КА возможны два принципиально разных метода измерений АСН и формирования орбиты по этим измерениям: по прямым НС и по обратным НС.

Измерения по прямым НС предполагают, что антенна АСН направлена по местной вертикали (как и у низкоорбитальных КА). Для высокоэллиптических КА в поле зрения «зенитной» антенны сигналы НС могут попадать лишь на коротком интервале пролета КА в окрестности перигея. На остальном интервале времени оценка должна формироваться путем прогноза орбиты, сформированной по измерениям АСН в окрестности перигея. Точность оценки орбиты в этом случае во многом будет определяться точностью бор-

товой модели движения КА. В данном случае основными возмущающими факторами кроме аномалии гравитационного поля Земли будут ошибки модели гравитационного влияния Луны и Солнца, а также сил солнечного давления. Аэродинамическим торможением можно пренебречь.

Измерения по обратным НС предполагают, что антенна АСН направлена на Землю, и измерения ведутся по пригоризонтным НС. Измерения по обратным НС характерны тем, что на большей части траектории число НС, видимых антенной АСН, меньше четырех, минимально необходимых для одномоментного решения навигационной задачи. В этом случае в качестве измеряемых параметров должны использоваться, например, псевдодальности.

Несмотря на то что при работе по обратным спутникам существуют достаточно длительные интервалы времени, на которых измерения вообще отсутствуют, тем не менее, на большей части траектории, включая участок апогея, измерения могут выполняться, и может проводиться коррекция оценки орбиты, формируемой фильтром. Поэтому измерения по обратным НС обеспечивают более высокую точность оценки орбиты по сравнению с измерениями по прямым НС. Однако АСН, работающая по прямым НС на низких орбитах, обладает весьма важным преимуществом: она реально существует, достаточно хорошо отработана и широко используется на различных КА. АСН, работающая по обратным спутникам, аппаратно более сложная — она должна работать по более слабому сигналу НС, а также из-за больших разбросов расстояний между КА и НС обеспечивать устойчивую работу в большом диапазоне мощности принимаемых сигналов.

В настоящем разделе приведено исследование вопросов точности навигации высокоэллиптических КА по измерениям АСН в окрестности перигея. Будем рассматривать орбиты КА с высотой перигея ~1500 км, апогея ~40 000 км и наклонением ~62°. Период такой орбиты равен ~12 ч.

Определим следующую стратегию решения навигационной задачи.

При подлете к окрестности перигея антенна АСН направляется по местной вертикали, приемник АСН начинает отслеживать видимые НС и при уровне GDOP видимых НС меньше порогового значения (~5) формирует КСВ. Навигационный процессор АСН реализует динамическую фильтрацию измерений и по серии измерений формирует оценку орбиты КА. На участках отсутствия измерений КСВ оценка орбиты формируется путем прогноза движения КА. Аналогичная стратегия решения навигационной задачи реализована в АСН-М. Рекуррентный алгоритм динамической фильтрации измерений АСН имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\overline{P}_{n+1} = A^{\mathrm{T}}\left(\overline{\xi}_{\textit{и}\,n+1} - \hat{\xi}^{*}_{n+1}\right);\\
&W_{n+1} = \lambda^{2} B^{-1\,\mathrm{T}}_{n\,n+1} W_{n} B^{-1}_{n\,n+1} + A^{\mathrm{T}} A;\\
&\Delta\overline{\xi}^{*}_{n+1} = W^{-1}_{n+1}\overline{P}_{n+1};\\
&\overline{\xi}^{*}_{n+1} = \hat{\xi}^{*}_{n+1} + \Delta\overline{\xi}^{*}_{n+1},
\end{aligned}
\qquad (11.1)
$$

где $\overline{\xi}_n^*$ — формируемая оценка 6-мерного вектора состояния на n-м шаге; $\hat{\xi}_{n+1}^*$ — прогнозируемая оценка вектора состояния на (n+1)-м шаге, формируемая из $\overline{\xi}_n^*$, путем интегрирования уравнений движения от момента n до $n + 1$; $\overline{\xi}_{\text{и}\,n+1}$ — измеренный вектор состояния на (n+1)-м шаге, формируется из измерений КСВ АСН; $A = (E_3 0_3)$ — матрица размером 3×6, E_3 — единичная матрица размером 3×3, 0_3 — нулевая матрица размером 3×3; W_n — накапливаемая матрица измерений ($W_0 = 0$); $B_{n\,n+1}$ — матрица преобразований ошибок вектора состояния от n-го шага к (n+1)-му; λ — константа, близкая к единице.

Константа λ определяет постоянную времени фильтра T и связана с ней соотношением

$$\lambda = \frac{T}{T+1}. \tag{11.2}$$

Постоянная времени T в АСН-М МКС выбрана равной одному витку (5500 с). С некоторой степенью приближения можно считать, что формируемая фильтром (11.1) оценка текущего вектора состояния $\overline{\xi}_{n+1}^*$ определяется по измерениям АСН, полученным на интервале времени T, который предшествует текущему моменту. Точность формируемой фильтром оценки существенно зависит от точности бортовой модели движения КА.

11.2.1. Зависимость ошибок формируемой оценки орбиты от параметров динамического фильтра и различных возмущающих факторов: ошибок измерений АСН, ошибок моделирования гравитационного поля Земли, гравитационного воздействия Луны и Солнца, сил солнечного давления

Минимизация ошибок формируемой оценки орбиты требует исследования влияния различных возмущающих факторов на точность этой оценки. Такое исследование было проведено путем моделирования.

Оценим длительность интервала измерений в окрестности перигея.

На рис. 11.1 приведен график GDOP для альманаха GPS из 30 НС с максимальным уровнем 10. Во внимание принимались НС, попадающие в поле зрения антенны АСН, направленной в зенит и имеющей диаграмму направленности шириной 170°.

Из приведенного графика видно, что длительность такого интервала измерений составляет ~45 мин. Однако начало и конец интервала имеют повышенное значение GDOP и, следовательно, повышенные ошибки измерений. Для исключения таких ошибок обычно ограничиваются измерениями с порогом по GDOP, равным 3–5.

На рис. 11.2 показан график числа используемых НС с порогом по GDOP, равным 3. Из графика видно, что длительность интервала измерений

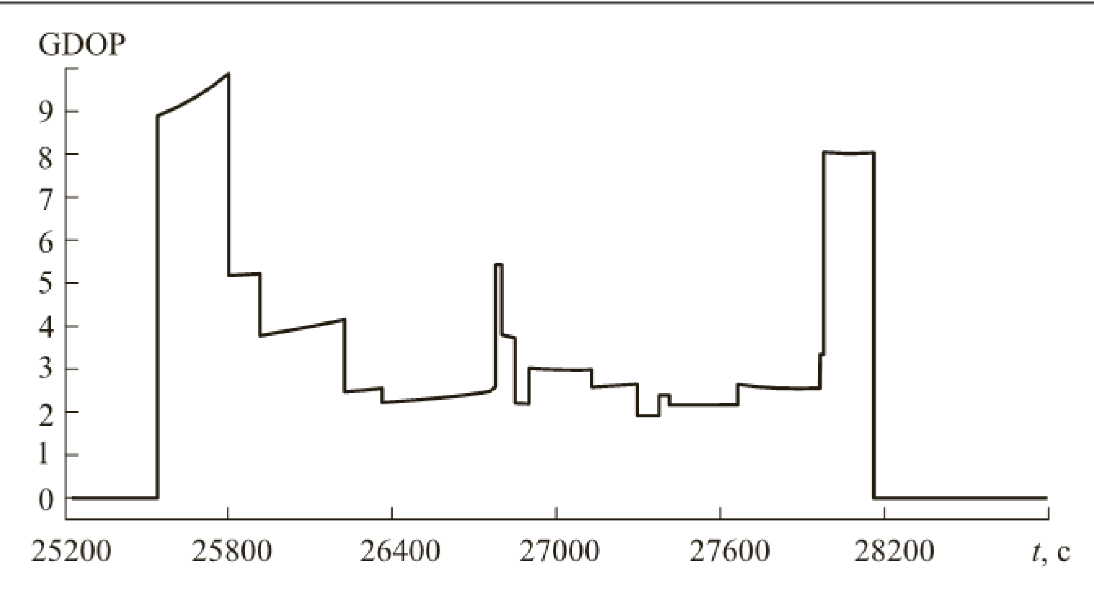


Рис. 11.1. Геометрический фактор GDOP для КА на ВЭО в окрестности перигея для альманаха GPS из 30 спутников

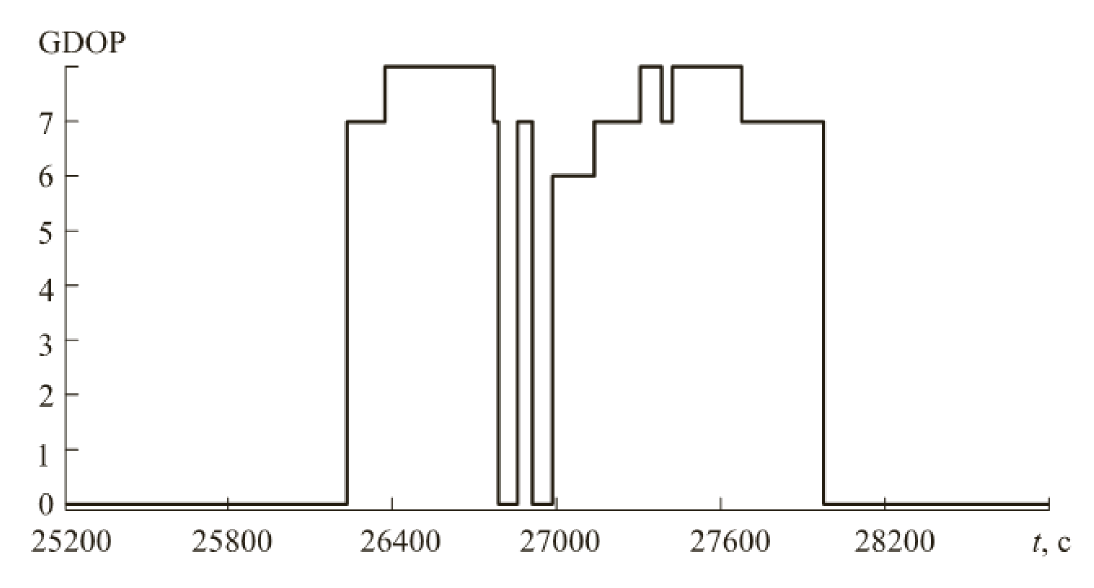


Рис. 11.2. Число видимых НС для GDOP ≤ 3

в этом случае составляет ~25 мин, количество используемых для решения навигационной задачи НС находится в диапазоне 6…8.

На рис. 11.3 для этого интервала приведены моделируемые ошибки измерений АСН для трех каналов в орбитальной системе координат.

В целом представленный график моделируемых ошибок измерений АСН соответствует графику реальных ошибок измерений АСН-М МКС, приведенному в гл. 8. Отличие состоит в том, что моделируемые ошибки несколько выше реальных ошибок АСН-М МКС. Если в лётных данных ~95 % ошибок измерений АСН-М не превышали ±5 м, то моделируемые ошибки в основном лежат в диапазоне ±10 м. В то же время реальные измерения АСН-М МКС содержат достаточно большие по значению ошибки (достигающие 40 м), обусловленные переотражениями сигналов НС от элементов конструкции МКС. В отличие от МКС, высокоэллиптические КА имеют существенно

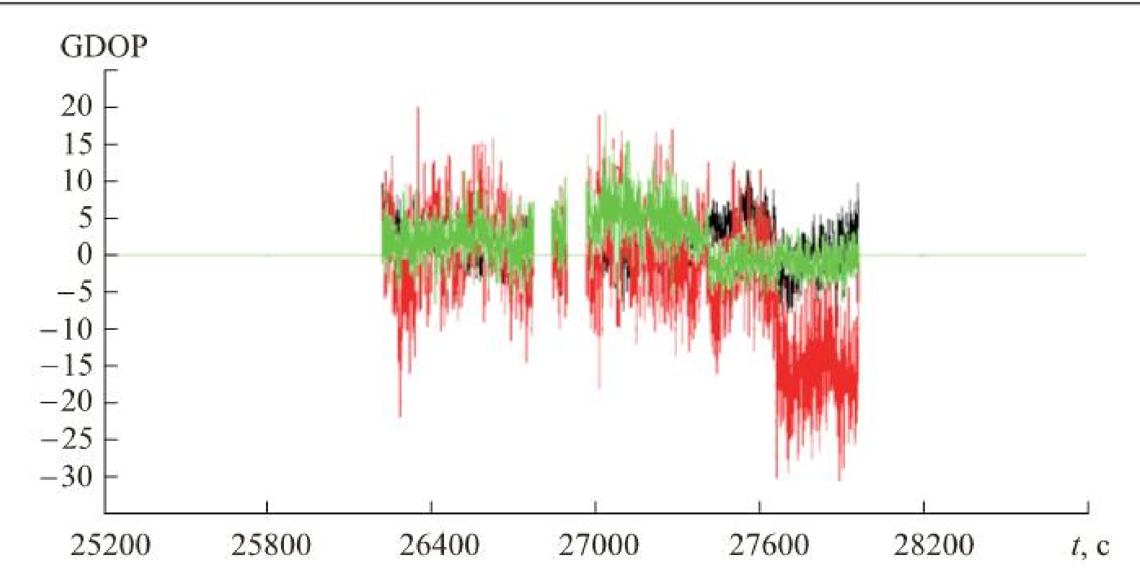


Рис. 11.3. Ошибки КСВ по координатам в ОСК для GDOP ≤ 3

меньшие габариты. Для их конструкций ошибки, обусловленные переотражениями, не превышают 10…15 м. В приведенных на рисунке графиках эти ошибки сливаются с шумовыми ошибками приемника АСН. Ошибки измерений АСН приводят к ошибкам оценки орбиты, формируемой фильтром.

На рис. 11.4 показаны графики модуля ошибок оценки орбиты, обусловленных только ошибками измерений АСН для различных постоянных времени фильтра T (T = 1, 12, 24 ч). Из рисунка следует, что при постоянной времени фильтра T = 1 ч ошибка оценки орбиты в окрестности апогея по положению составляет ~1 км, при подлете к области измерений в окрестности перигея ~6 км. При значениях постоянной времени 12 и 24 ч эти ошибки на порядок уменьшаются после прохождения второго участка измерений (через виток после начала работы), а через 2–4 витка после начала работы система

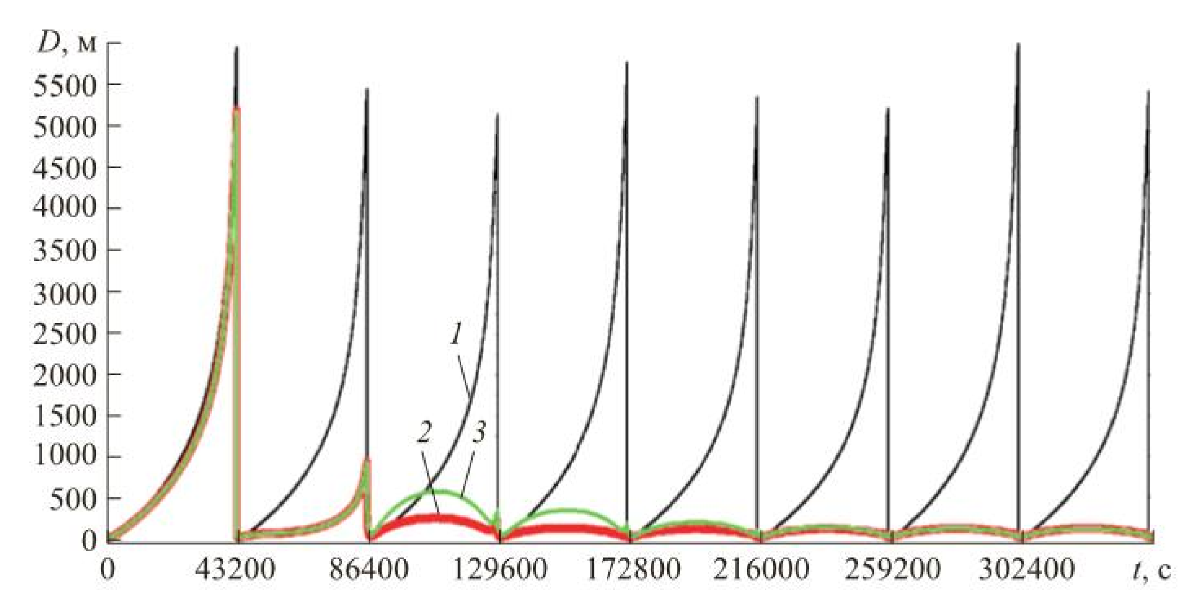


Рис. 11.4. Ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН для различных постоянных времени фильтра:
1 — T = 1 ч; *2* — T = 12 ч; *3* — T = 24 ч

приходит в установившееся состояние, в котором ошибки оценки орбиты на всем ее протяжении не превышают 100 м. При этом для T = 12 ч установившееся состояние начинается практически через два витка после начала работы, для T = 24 ч — через четыре витка. Постоянная времени T = 12 ч обеспечивает как наилучшие точностные выходные характеристики, так и минимальное время выхода в установившееся состояние. Поэтому дальнейшее исследование влияния различных возмущающих факторов на точность формируемой оценки орбиты будем проводить для постоянной времени фильтра T = 12 ч.

Рассмотрим влияние ошибок бортовой модели гравитационного поля Земли на точность формируемой фильтром орбиты. Движение КА будем моделировать с использованием модели гравитационного поля Земли порядка 144×144 при отсутствии каких-либо других возмущающих факторов.

В бортовой модели движения КА последовательно используем модель гравитационного поля Земли порядка 2×0, 8×8, 72×72, а измерения АСН выполняем без ошибок.

На рис. 11.5 приведены графики модулей ошибок оценок формируемых орбит по положению для моделей гравитационного поля порядка 2×0 и 8×8. Использование в бортовой модели движения КА модели гравитационного поля Земли порядка 2×0 ошибки оценки орбиты по положению (обусловленные ошибкой модели гравитационного поля Земли) достигают ~1,6 км, для модели порядка 8×8 эти ошибки (в установившемся режиме) не превышают ~30 м, для модели порядка 72×72 — практически равны нулю.

Ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН, составляют ~100 м, для сохранения точности системы автономной навигации на этом уровне необходимо, чтобы ошибки от всех остальных возмущений, влияющих на точность формируемой оценки орбиты, были заметно меньше.

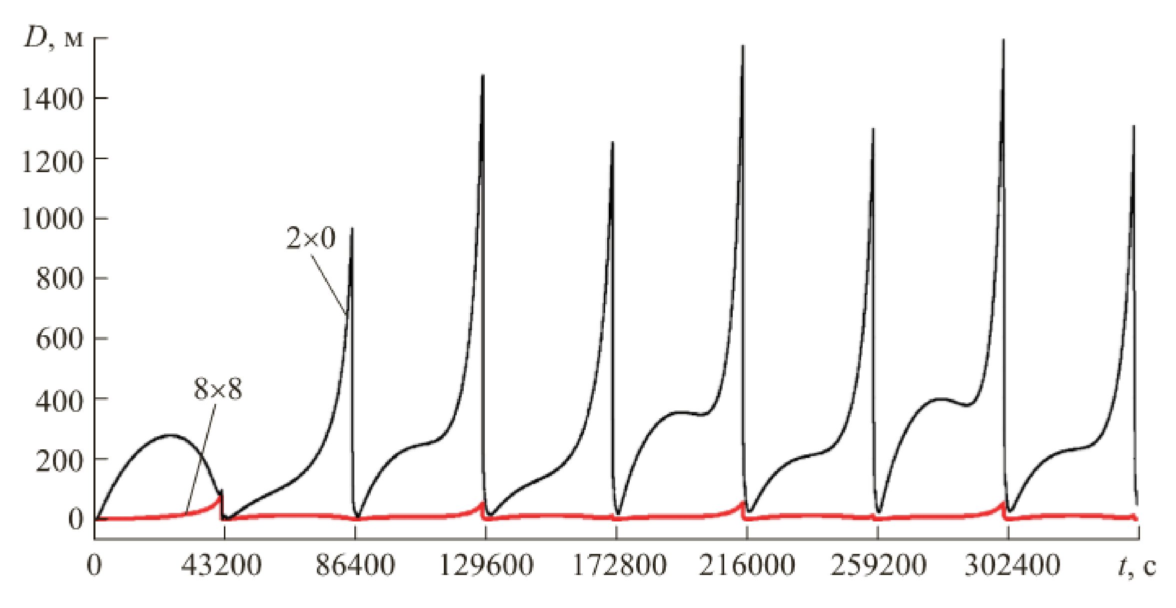


Рис. 11.5. Ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками модели гравитационного поля Земли

Это означает, что бортовая модель гравитационного поля Земли должна иметь порядок не ниже 8×8. В этом случае в установившемся режиме ошибки, обусловленные неточностью модели поля, в окрестности апогея не превышают 15 м, а при подлете к зоне измерений в окрестности перигея — 60 м.

Второй составляющей возмущения движения КА, существенно влияющей на точность формируемой оценки, является гравитационное возмущение от Луны и Солнца. На рис. 11.6 приведен график модуля обусловленной этим возмущением ошибки оценки орбиты для рассматриваемого динамического фильтра. Из рисунка следует, что ошибка оценки орбиты в окрестности апогея может достигать 2 км. Для уменьшения этой ошибки в бортовую модель движения КА необходимо вводить модель влияния Луны и Солнца.

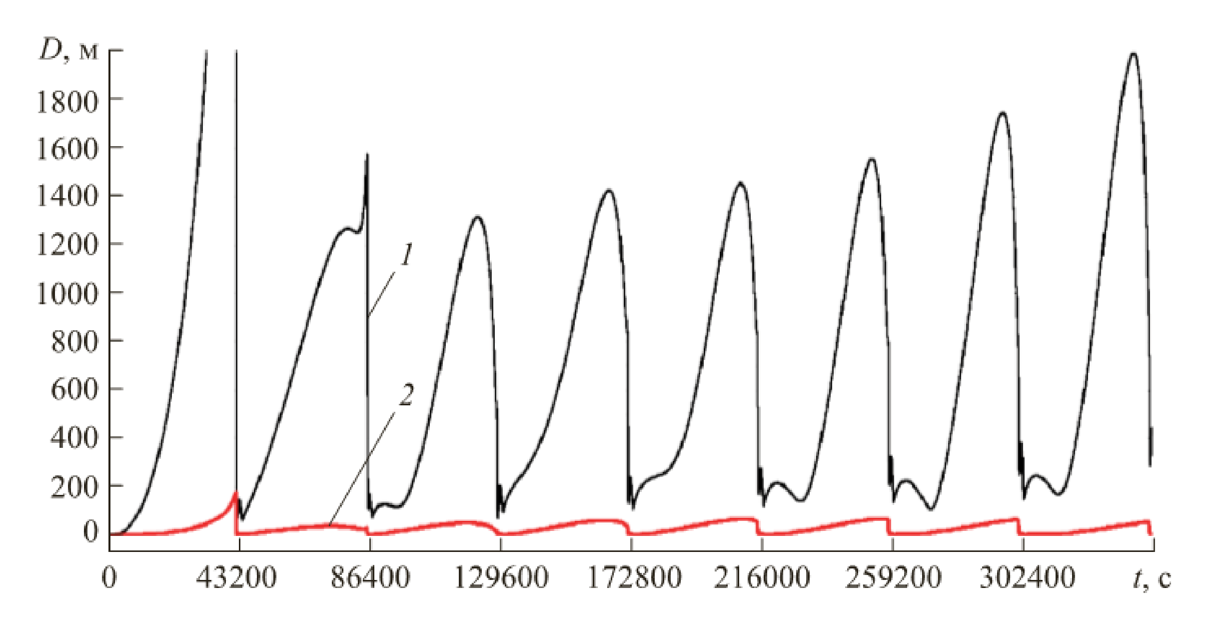


Рис. 11.6. Ошибки оценки орбиты, обусловленные гравитационным влиянием Луны и Солнца:
1 — без использования модели возмущения от Луны и Солнца; *2* — с использованием упрощенной модели возмущения от Луны и Солнца

Были использованы две модели гравитационного возмущения от Луны и Солнца:

модель на основе точной теории Брауна;

приближенная модель влияния Луны и Солнца.

Первая модель основана на точной теории Брауна и позволяет вычислить эфемериды Луны с точностью 1″. Ошибки этой модели не превышают 0,1 % от возмущения.

Вторая модель использует упрощенные алгоритмы расчета эфемерид Луны, точность составляет ~5 % от возмущения. График модуля ошибки оценки орбиты, обусловленной неточностью бортового моделирования влияния Луны и Солнца с использованием данной модели, приведен на рис. 11.6. Из рисунка следует, что эти ошибки в установившемся режиме достигают ~50 м.

Использование же в бортовой модели движения КА модели на основе точной теории Брауна позволяет практически полностью исключить влияние Луны и Солнца на точность формируемой оценки орбиты.

Третьим по степени влияния на точность формируемой оценки орбиты является возмущение от сил солнечного давления, значение которого во многом определяется отношением площади миделевого сечения к массе КА:

$$K_S = \frac{S_м}{m}.$$

Коэффициент солнечного давления K_S для разных КА может изменяться в достаточно широких пределах. На рис. 11.7 приведен график модуля ошибки оценки орбиты для рассматриваемого динамического фильтра. Здесь рассматривается ошибка, обусловленная силами солнечного давления для КА с коэффициентом K_S, равным 0,08. Из графика следует, что эти ошибки в установившемся режиме в окрестности апогея достигают ~50 м.

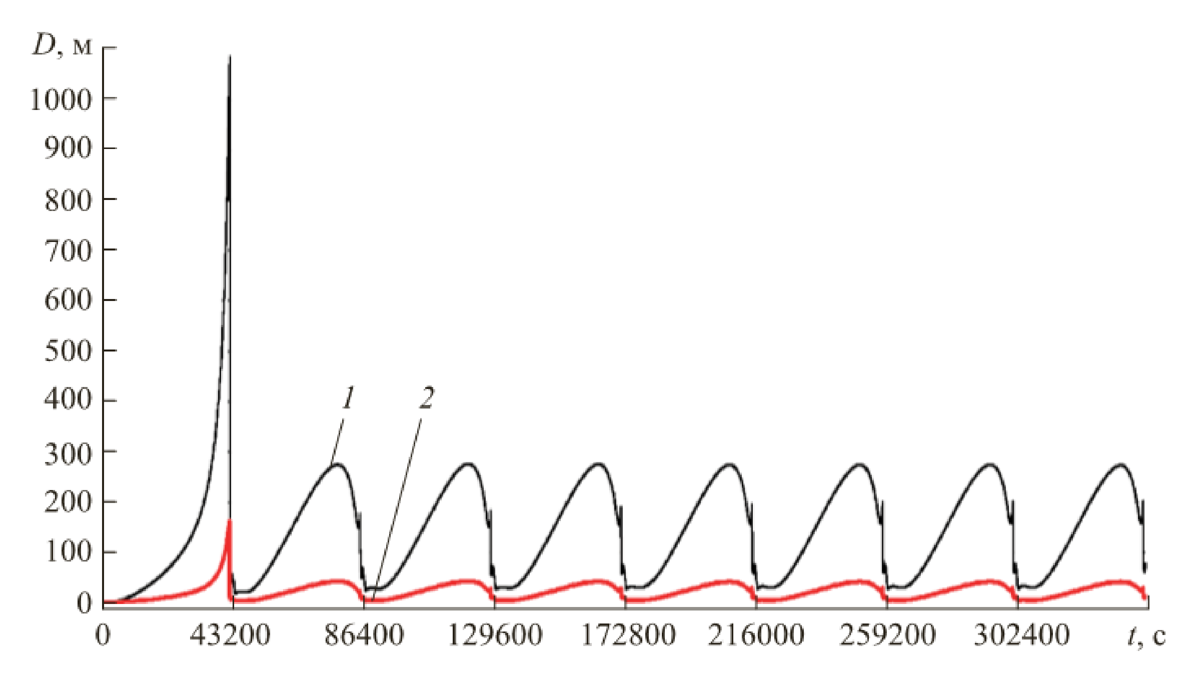


Рис. 11.7. Ошибки оценки орбиты, обусловленные силами солнечного давления:
1 — без использования модели сил солнечного давления; *2* — с использованием модели сил солнечного давления

Из приведенного графика следует, что ошибка оценки орбиты в окрестности апогея может достигать ~300 м. Для уменьшения этой ошибки в бортовую модель движения КА необходимо вводить модель сил солнечного давления. В отличие от моделей рассмотренных выше возмущений модели сил солнечного давления, в силу целого ряда неопределенностей, являются достаточно грубыми. Обычно такие модели имеют точность ~15 % возмущения.

11.2.2. Влияние разгрузки инерционных исполнительных органов на точность формируемой оценки орбиты

Возможны два типа возмущений от двигателей:

– при коррекции орбиты КА;

– при разгрузке инерционных исполнительных органов (ИИО).

При коррекции происходит сильное изменение орбиты, приводящее в течение витка к ошибкам по положению, в зависимости от корректирующего импульса, до нескольких сотен километров. Если корректирующий импульс оценивается, например, с помощью акселерометров, то ошибка оценки орбиты в течение витка может достигать нескольких километров. Для обеспечения навигации КА с точностью до сотни метров формирование орбиты по измерениям АСН после коррекции требуется выполнять с нуля. В этом случае проведение измерений должно проводиться в перигее орбиты, а изменение точности формируемой оценки во времени будет соответствовать графикам, приведенным на рис. 11.8.

Менее сильные возмущения орбиты происходят при разгрузке ИИО КА с помощью двигателей. На рассматриваемом типе КА обычно реализуется гравитационная разгрузка ИИО без использования двигателей. В этом случае возмущение орбиты отсутствует. Однако в нештатных ситуациях разгрузка может выполняться с помощью двигателей. В этом случае возмущение орбиты может быть значительным и достигать несколько километров до очередного интервала измерений АСН. При этом даже после проведения измерений АСН ошибки оценки, обусловленные работой двигателей, не компенсируются до нуля, и хотя значительно уменьшаются, остаются заметными в течение 2–3 витков.

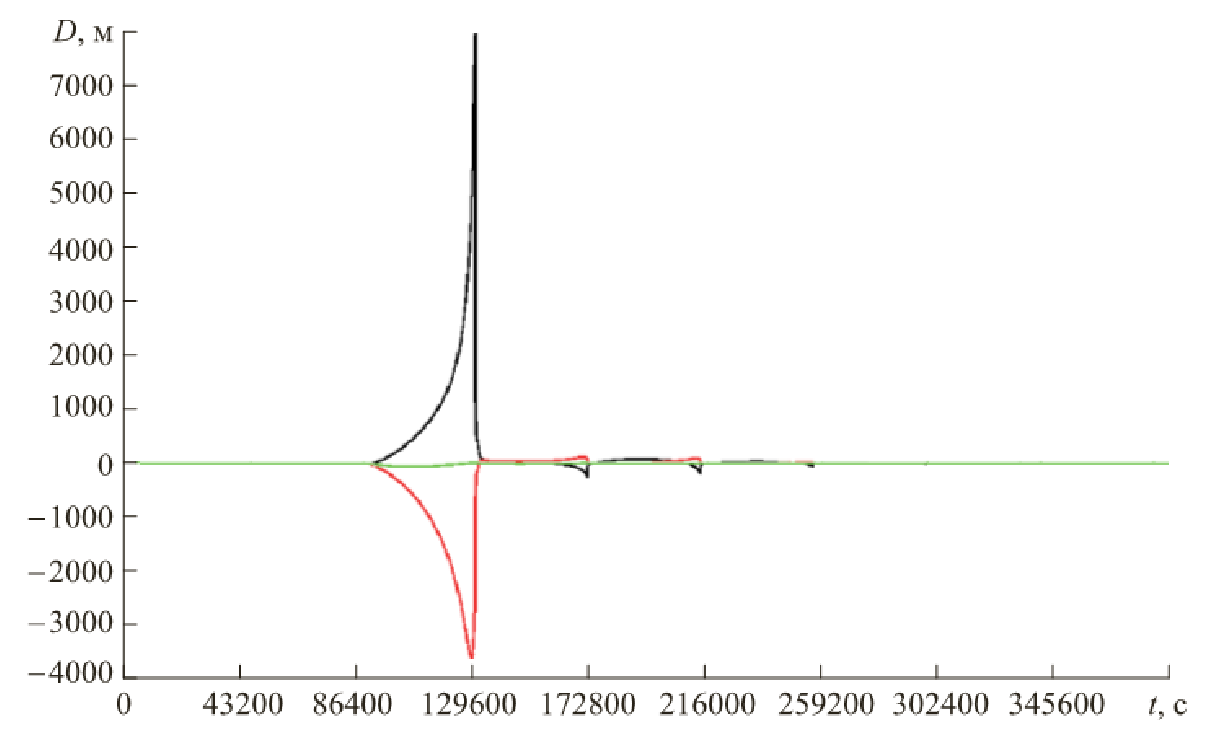


Рис. 11.8. Ошибки оценки орбиты, обусловленные работой двигателей после проведения разгрузки ИИО

Сказанное иллюстрирует рис. 11.8, на котором приведены графики ошибок оценки орбиты по положению после проведения разгрузки ИИО. Разгрузка выполнена после завершения очередного сеанса измерений АСН в окрестности перигея. В таком случае реализуется максимальное возмущение орбиты от работы двигателей. Приведенные графики соответствуют возмущению скорости КА 1 см/с по трем осям ОСК. При этом в момент достижения апогея ошибка оценки орбиты по положению составила ~1000 м по трем осям. В перигее эта ошибка по продольной дальности составила ~8000 м, по высоте ~3500 м, по боковой дальности ~50 м. На каждом последующем витке все ошибки пропорционально уменьшались в ~3–4 раза. Приведенные значения ошибок орбиты соответствуют возмущающему импульсу скорости КА от разгрузки ИИО двигателями 1 см/с по трем осям орбитальной системы. С увеличением возмущающего импульса скорости пропорционально увеличиваются ошибки оценки орбиты по положению.

Снижение возмущений оценки орбиты от работы двигателей КА может быть достигнуто путем оценки возмущающего импульса скорости с помощью акселерометров. Однако кардинальным способом является реализация гравитационной разгрузки ИИО, полностью исключающая использование двигателей для этих целей.

11.2.3. Достигаемая точность навигации

Проведенное исследование показало, что формирование орбиты высокоэллиптического КА с достаточно высокой точностью может быть реализовано по измерениям прямых НС в окрестности перигея. При этом длительность интервала измерений составляет 20…30 мин. Динамическая фильтрация измерений может выполняться с использованием фильтра, реализованного в АСН-М МКС. Оптимальным значением постоянной времени фильтра, минимизирующим ошибки оценки орбиты, обусловленные ошибками измерений АСН, является $T = 12$ ч. Бортовая модель движения КА, реализуемая в процессе динамической фильтрации, должна включать модель гравитационного поля Земли, гравитационного влияния Луны и Солнца и модель сил солнечного давления.

На рис. 11.9 приведены результирующие графики ошибок оценки орбиты по положению в орбитальной системе координат при одновременном влиянии всех рассмотренных возмущающих факторов. Интервал измерений выбирался по условию GDOP $\leq$ 3. В качестве бортовой модели гравитационного поля Земли использовалась модель порядка 72×72, в качестве модели влияния Луны и Солнца — упомянутая выше упрощенная модель, имеющая точность ~5 %.

Воздействие сил солнечного давления рассматривалось для коэффициента $K_S = 0{,}08$. В бортовой модели движения была реализована упрощенная модель сил солнечного давления с точностью ~15 %. При воздействии всех возмущающих факторов в установившемся состоянии точность оценки орбиты по продольной дальности составила ~100 м, по местной вертикали и боковой

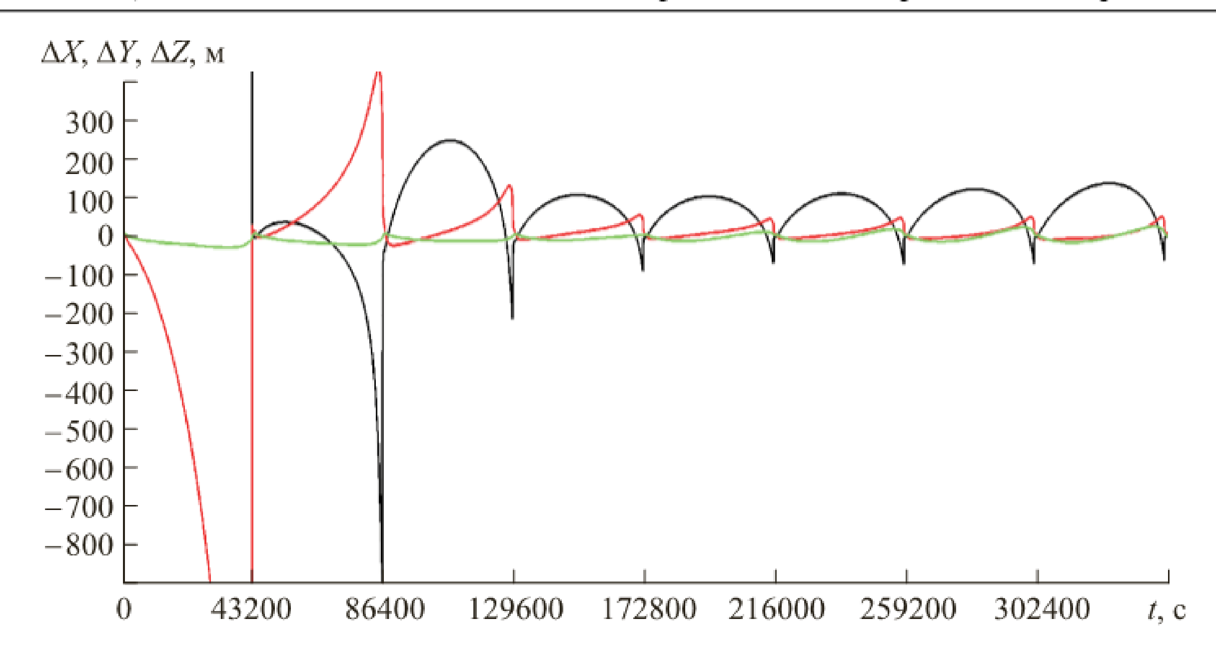


Рис. 11.9. Суммарные ошибки оценки орбиты в переходном и установившемся режимах

дальности — 30 м. После первого интервала измерений ошибка в апогее достигала 1 км, в перигее перед вторым интервалом измерений — 6 км. После второго интервала измерений ошибка в апогее составила 100 м, в перигее перед третьим интервалом измерений — 1 км. После третьего интервала измерений система практически приходила в установившийся режим.

Указанная достигаемая точность может нарушаться в случае работы двигателей КА. После проведения коррекции процесс формирования орбиты необходимо начинать заново. Возмущения орбиты от работы двигателей в процессе выполнения разгрузки ИИО зависят от возмущающего импульса скорости КА и могут быть значительными. Количественные характеристики возмущений оценки орбиты от работы двигателей при разгрузке ИИО были представлены на рис. 11.8. Исключение возмущений оценки орбиты от работы двигателей обеспечивается при реализации гравитационной разгрузки ИИО.

Таким образом, рассмотренные алгоритмы обеспечивают достаточно высокую точность формирования оценки орбиты КА, находящегося на ВЭО, по измерениям АСН в окрестности перигея. В установившемся режиме эта точность по координатам составляет ~100 м. Однако данные алгоритмы имеют два существенных недостатка.

1. Большая длительность переходного процесса (~3 витка), в течение которого ошибки могут достигать ~2 км.

2. Чувствительность к неучтенным возмущениям от двигателей. Импульс скорости 1 см/с может приводить к ошибкам по координатам, достигающим 8 км.

Существенное сокращение времени переходного процесса, снижение чувствительности к неучтенным возмущениям от двигателей, а также повышение точности навигации может быть достигнуто при измерениях АСН по обратным НС.

11.3. Навигация высокоэллиптических КА по полным «сырым» измерениям от прямых и обратных НС

В предыдущем разделе были рассмотрены характеристики АСН, работающей на ВЭО по прямым НС, т. е. по НС, находящимся выше КА. В этом случае антенна АСН устанавливается таким образом, чтобы ее поле зрения было направлено в зенит. Однако тогда сигналы НС могут быть приняты на коротком интервале времени (~300 с), когда КА находится в окрестности перигея.

Рассмотрим вариант построения АСН для ВЭО, когда сигналы НС принимаются в течение всего витка. В этом случае на КА должны быть установлены два типа антенн:

для работы по прямым НС;

для работы по обратным НС.

Антенны, работающие по прямым НС обеспечивают измерения в окрестности перигея, а антенны, работающие по обратным НС — на остальной части орбиты. Одним из основных факторов, влияющих на построение АСН, является число видимых НС со стороны КА.

На рис. 11.10 приведены графики числа видимых НС для ВЭО в режимах GPS, ГЛОНАСС и GPS+ГЛОНАСС, из которых видно, что в течение короткого интервала времени в окрестности перигея число видимых НС достигает ~10 для GPS, ~8 для ГЛОНАСС и ~18 для GPS+ГЛОНАСС. На всей остальной части орбиты в режимах GPS и ГЛОНАСС число видимых НС находится в диапазоне 0–3, в режиме GPS+ГЛОНАСС — в диапазоне 0–6.

Во всех режимах наблюдаются достаточно длительные интервалы, когда число видимых НС больше 3. Принципиально на этих участках орбиты можно формировать КСВ. Однако в силу малости углового расстояния между видимым НС уровень GDOP на этих участках оказывается настолько большим, что точность формируемых КСВ оказывается недопустимо низкой.

На рис. 11.11 для этих участков орбиты приведены графики ошибок КСВ по координатам и графики уровня GDOP. Из рисунка видно, что уровень GDOP находится в диапазоне 100…1000 при допустимом значении 2…6. Высокий уровень GDOP обусловливает большие ошибки определяемых координат КА, достигающих 5 км, при этом ошибки прогноза орбиты на интервале, где КСВ не формируются ($n < 4$), может составлять десятки километров. Очевидно также, что оценивать орбиту по измерениям КСВ в режимах GPS или ГЛОНАСС вообще невозможно. Поэтому оценку орбиты для ВЭО необходимо проводить по «сырым» измерениям. При этом максимальная точность оценки орбиты обеспечивается, если она осуществляется по полным «сырым» измерениям — псевдодальностям и интегральным фазам, например, по алгоритмам, рассмотренным в гл. 10. Приведем эти алгоритмы применительно к ВЭО.

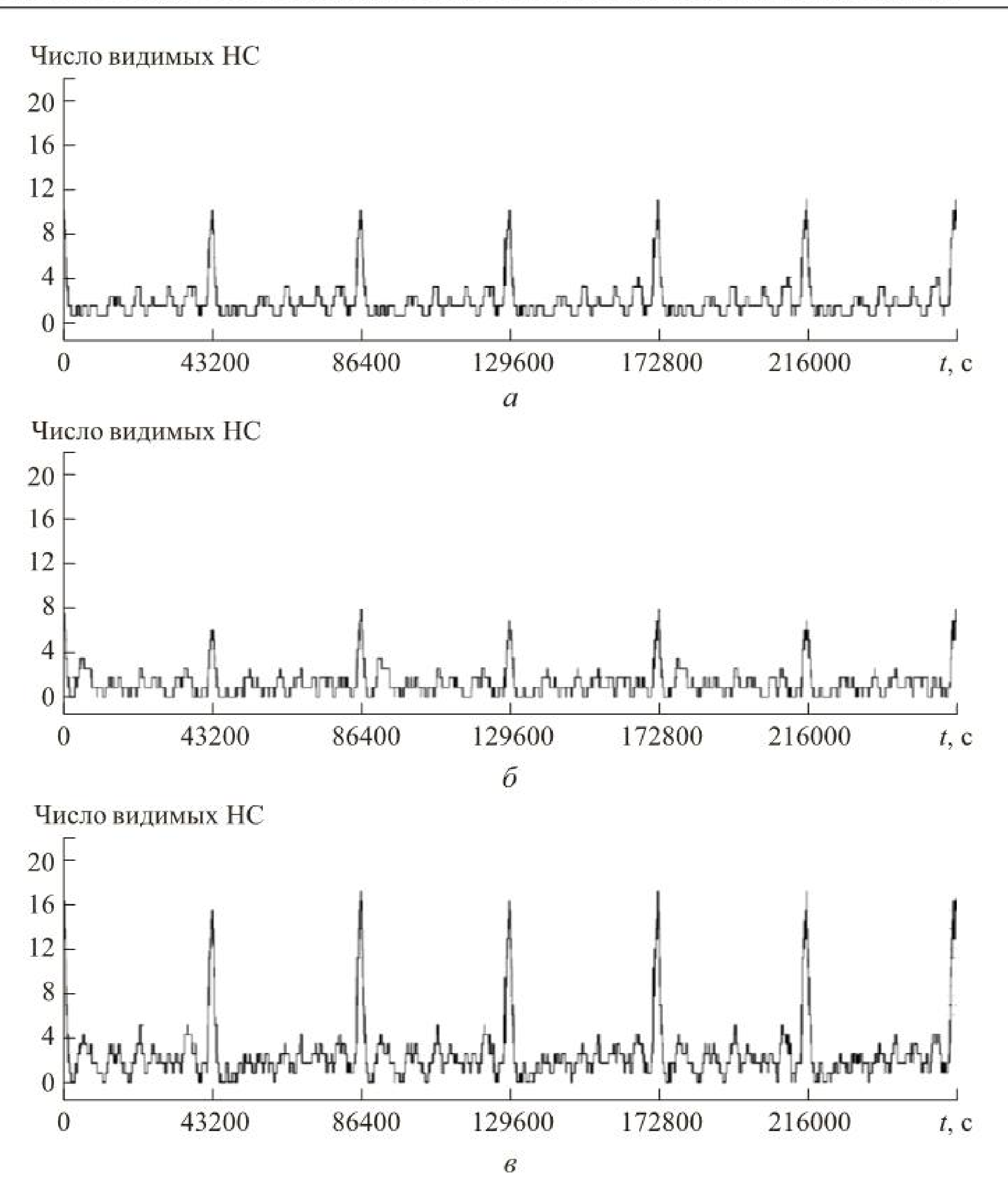


Рис. 11.10. Число видимых НС для ВЭО в режимах GPS (*а*), ГЛОНАСС (*б*), GPS+ГЛОНАСС (*в*) (графики получены путем моделирования для группировки GPS из 30 НС и ГЛОНАСС из 24 НС)

Пусть в начальный момент времени t_0 известно начальное приближение вектора координат $\bar{X}_0$ и скорости $\bar{V}_0$ КА. Например, этот вектор можно получить, когда КА находится в окрестности перигея, где в поле зрения антенн АСН находится достаточное количество НС для формирования КСВ. Если оценка вектора состояния представляется в форме координат и их приращений, то в качестве $\Delta\bar{X}_0$ может быть взят вектор скорости. Пусть также измерения проводятся в моменты t_i, а n_i — число видимых НС в момент t_i, $n_i \geq 2$. Если эфемериды видимых НС в моменты t_i известны, то по измерениям псевдодальностей PR_j и приращениям интегральных фаз ΔCP_j, оценке орбиты КА

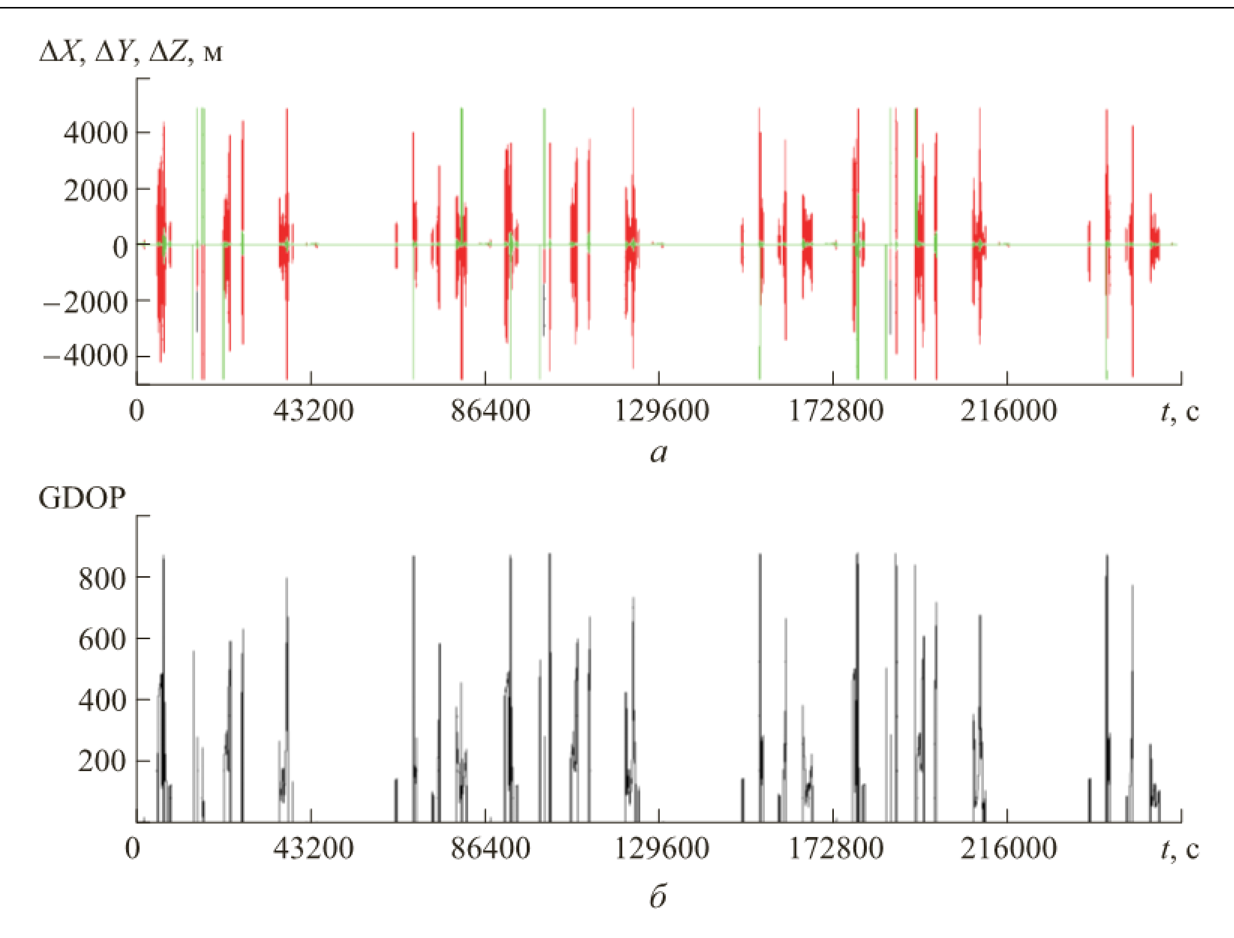


Рис. 11.11. Ошибки КСВ по координатам и уровень GDOP для ВЭО в режиме GPS+ГЛОНАСС на участках орбиты, где число видимых НС > 3

и эфемеридам НС в соответствии с алгоритмом (10.30) могут быть сформированы векторы измерения $\overline{\xi}_{и1}$, $\overline{\xi}_{и2}$ и их оценки $\overline{\xi}^*_{и1}$, $\overline{\xi}^*_{и2}$:

$$\overline{\xi}_{и1} = \begin{pmatrix} PR_1 - PR_2 \\ \vdots \\ PR_n - PR_i \end{pmatrix}; \ \overline{\xi}_{и2} = \begin{pmatrix} \Delta CP_1 - \Delta CP_2 \\ \vdots \\ \Delta CP_n - \Delta CP_1 \end{pmatrix};$$
$$\overline{\xi}^*_{и1} = \begin{pmatrix} PR_1^* - PR_2^* \\ \vdots \\ PR_n^* - PR_1^* \end{pmatrix}; \ \overline{\xi}^*_{и2} = \begin{pmatrix} \Delta CP_1^* - \Delta CP_2^* \\ \vdots \\ \Delta CP_n^* - \Delta CP_1^* \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

По алгоритму (10.29) для момента t_i формируется общий вектор измерений $\overline{\xi}_{и}$ и его оценка $\overline{\xi}^*_{и}$:

$$\overline{\xi}_{и} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{T_P}\dfrac{\overline{\xi}_{и1}}{R_0} + \dfrac{T_P - 1}{T_P}\dfrac{\overline{\xi}_{и2}}{V_0}\omega_0 \\ \dfrac{\overline{\xi}_{и2}}{V_0} \end{pmatrix}; \quad \overline{\xi}^*_{и} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{T_P}\dfrac{\overline{\xi}^*_{и1}}{R_0} + \dfrac{T_P - 1}{T_P}\dfrac{\overline{\xi}^*_{и2}}{V_0}\omega_0 \\ \dfrac{\overline{\xi}^*_{и2}}{V_0} \end{pmatrix}, \tag{11.4}$$

где T_P — постоянная времени сглаживания псевдодальности.

Тогда вектор измерений, входящий в левую часть уравнений (10.11), будет иметь вид

$$\bar{\xi}_m = \bar{\xi}_{\text{и}} - \bar{\xi}^*_{\text{и}}, \tag{11.5}$$

где векторы $\bar{\xi}_{\text{и}}$ и $\bar{\xi}^*_{\text{и}}$ формируются по алгоритму (11.4).

Рекуррентный алгоритм решения системы (10.11) аналогичен алгоритму (10.12) и имеет вид

$$\begin{aligned}
&\bar{P} = C^{\text{T}}_{0m+1}\left(\bar{\xi}_{\text{и}\,m+1} - \hat{\xi}^*_{\text{и}\,m+1}\right);\\
&W_{m+1} = B^{-1\,\text{T}}_{m\,m+1}\lambda W_m \lambda B^{-1}_{m\,m+1} + C^{\text{T}}_{0m+1} C_{0\,m+1};\\
&\delta\bar{\xi}^*_{m+1} = W^{-1}_{m+1}\bar{P};\\
&\bar{\xi}^*_{m+1} = \hat{\xi}^*_{m+1} + \delta\bar{\xi}^*_{m+1},
\end{aligned} \tag{11.6}$$

где $\bar{P}$ — промежуточный вектор размерностью 6; W_i — накапливаемая матрица размером 6×6. На нулевом шаге эта матрица равна 0; $\bar{\xi}_{\text{и}\,m+1}$ — вектор измерения на (m+1)-м шаге; $\hat{\xi}^*_{m+1}$ — оценка вектора состояния на (m+1)-м шаге, полученная из вектора состояния $\bar{\xi}^*_m$, сформированного на m-м шаге путем прогноза на (m+1)-й шаг; $\hat{\xi}^*_{\text{и}\,m+1}$ — оценка вектора измерения на (m+1)-м шаге, полученная из оценки вектора состояния $\hat{\xi}^*_{m+1}$;

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_X E & 0 \\ 0 & \lambda_V E \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица размером 3×3; 0 — нулевая матрица размером 3×3.

Матрица $B_{m\,m+1}$ в алгоритме (11.6) представляет собой матрицу (размером 6×6) преобразования ошибок вектора состояния на шаге m к ошибкам на (m+1)-м шаге:

$$B_{m\,m+1} = \frac{\partial\bar{\xi}_{m+1}}{\partial\bar{\xi}_m}, \tag{11.7}$$

где $\bar{\xi}_m = \begin{pmatrix} \bar{X}_m \\ \Delta\bar{X}_m \end{pmatrix}$ — вектор состояния КА в приращениях и формируется по алгоритму (10.26):

$$B_{m\,m+1} = \frac{\partial\bar{\xi}_{m+1}}{\partial\bar{\xi}_m} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\bar{x}_{m+1}}{\partial\bar{x}_m} & \dfrac{\partial\bar{x}_{m+1}}{\partial\Delta\bar{x}_m} \\ \dfrac{\partial\Delta\bar{x}_{m+1}}{\partial\bar{x}_m} & \dfrac{\partial\Delta\bar{x}_{m+1}}{\partial\Delta\bar{x}_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E + \omega_0 \Delta t \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & \omega_0 \Delta t \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2 \right) \\ \dfrac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} & E + 2\Omega + 2\Omega^2 \end{pmatrix}. \tag{11.8}$$

Здесь $\bar{x} = \dfrac{1}{R_0} \bar{X}$, $\Delta \bar{x} = \dfrac{1}{V_0 \Delta t} \Delta \bar{X}$, R_0 — радиус Земли; $V_0 = \sqrt{\mu / R_0}$ — круговая скорость; $\omega_0 = V_0 / R_0$ — орбитальная угловая скорость;

$$\frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} = \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2 \right);$$

$$\frac{\partial \Delta \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} = -\frac{1}{\omega_0 \Delta t} (E + \Omega) \Omega^2 - \omega_0 \left(\frac{E + \Omega}{r_0^3} \right) \left(E - 3 \frac{x_m \bar{x}_m^{\mathrm{T}}}{r_0^2} \right) \Delta t;$$

$$\frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \Delta \bar{x}_m} = \omega_0 \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2 \right) \Delta t;$$

$$\frac{\partial \bar{x}_{m+1}}{\partial \bar{x}_m} = E + \omega_0 \frac{\partial \Delta x_{m+1}}{\partial x_m} \Delta t;$$

$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta t$ — матрица вращения Земли; ω_3 — угловая скорость вращения Земли.

Оценка вектора состояния $\hat{\xi}^*_{m+1}$, формируемая из оценки вектора состояния $\bar{\xi}^*_m$ путем прогноза на шаг $m + 1$ по алгоритму (10.17) имеет вид

$$\begin{aligned} &\Delta \bar{X}_{m+1} = \left(E + 2\Omega + 2\Omega^2 \right) \Delta \bar{X}_m - (E + \Omega) \Omega^2 \bar{X}_m + (E + \Omega) A_{\text{ИСК—ГСК}} \bar{a}_m; \\ &\bar{X}_{m+1} = \bar{X}_m + \Delta \bar{X}_{m+1}, \end{aligned} \tag{11.9}$$

где $\bar{X}$ — вектор координат КА относительно ГСК; $\Delta \bar{X}$ — вектор приращения координат КА за шаг относительно ГСК; $A_{\text{ИСК—ГСК}}$ — текущая матрица перехода от ИСК БИНС к ГСК; $\bar{a}$ — вектор ускорений КА в ИСК БИНС.

Вектор $\bar{a}_i$ определяется по формуле

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{\text{г}i} \Delta t^2 + \bar{a}_{\text{и}i} \Delta t^2 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{\text{г}i} \Delta t^4 + \frac{1}{12} \ddot{\bar{a}}_{\text{и}i} \Delta t^4, \tag{11.10}$$

где $\bar{a}_{\text{г}i}$ — суммарный вектор гравитационных возмущений, действующих на КА; $\bar{a}_{\text{и}i}$ — вектор инерциальных возмущений, измеряемых БИНС.

Формирование оценки орбиты для ВЭО по приведенным выше алгоритмам (11.6)–(11.10) было выполнено путем моделирования при различных возмущениях. Для исключения ионосферных ошибок измерений в обработку

принимались НС, высота линий визирования которых относительно Земли была более 600 м (маска 600 км). Поэтому моделируемые ионосферные ошибки не превышали 2…4 м. Моделировались также эфемеридные ошибки, шумы измерений псевдодальностей, переотражения сигналов от элементов конструкции КА. Все эти ошибки также не превышали ~5 м. На рис. 11.12 приведены графики ошибок формируемой оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_X = T_V = 43\,000$ с. Предполагалось, что модель движения КА, реализуемая в АСН при прогнозе движения объекта, абсолютно точная. Из приведенных графиков следует, что в начальный момент формирования оценки орбиты при полете в окрестности перигея ошибки оценки по координатам в основном составляют 10…20 м, по скорости — не превышают 2 см/с. Начиная со второго витка, когда процесс формирования оценки орбиты приходит в установившееся состояние, ошибки оценки по координатам не превышают 5 м, по скорости — 0,5 см/с.

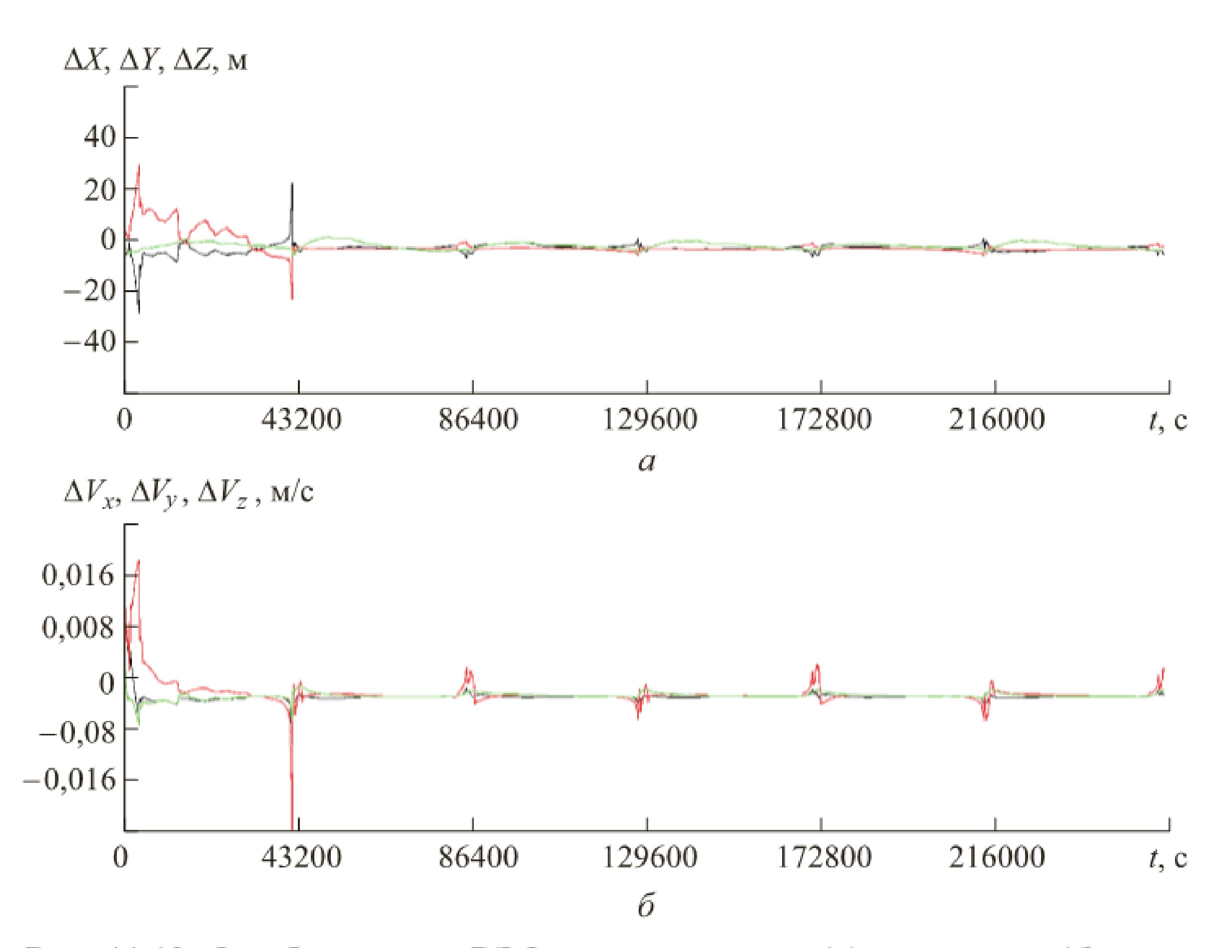


Рис. 11.12. Ошибки оценки ВЭО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 43\,000$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН)

На рис. 11.13 приведены аналогичные графики ошибок оценки ВЭО с той лишь разницей, что в качестве возмущений рассматривались ошибки измерений АСН и влияние сил солнечного давления, т. е. предполагалось, что в бортовой модели выполняется точное моделирование гравитационного поля

Земли и гравитационного воздействия Луны и Солнца. Действительно, эти возмущения легко могут моделироваться в АСН с высокой точностью, тогда как моделирование сил солнечного давления для многих КА представляет собой сложную задачу из-за неопределенности ряда параметров. Поэтому моделирование реального движения КА учитывало силы солнечного давления, а в бортовой модели движения КА при выполнении динамической фильтрации измерений АСН эти возмущения не моделировались. Из графиков на рис. 11.13 видно, что вследствие нескомпенсированного влияния сил солнечного давления ошибки оценки орбиты по координатам возросли до 30 м, по скорости — до 0,008 м/с.

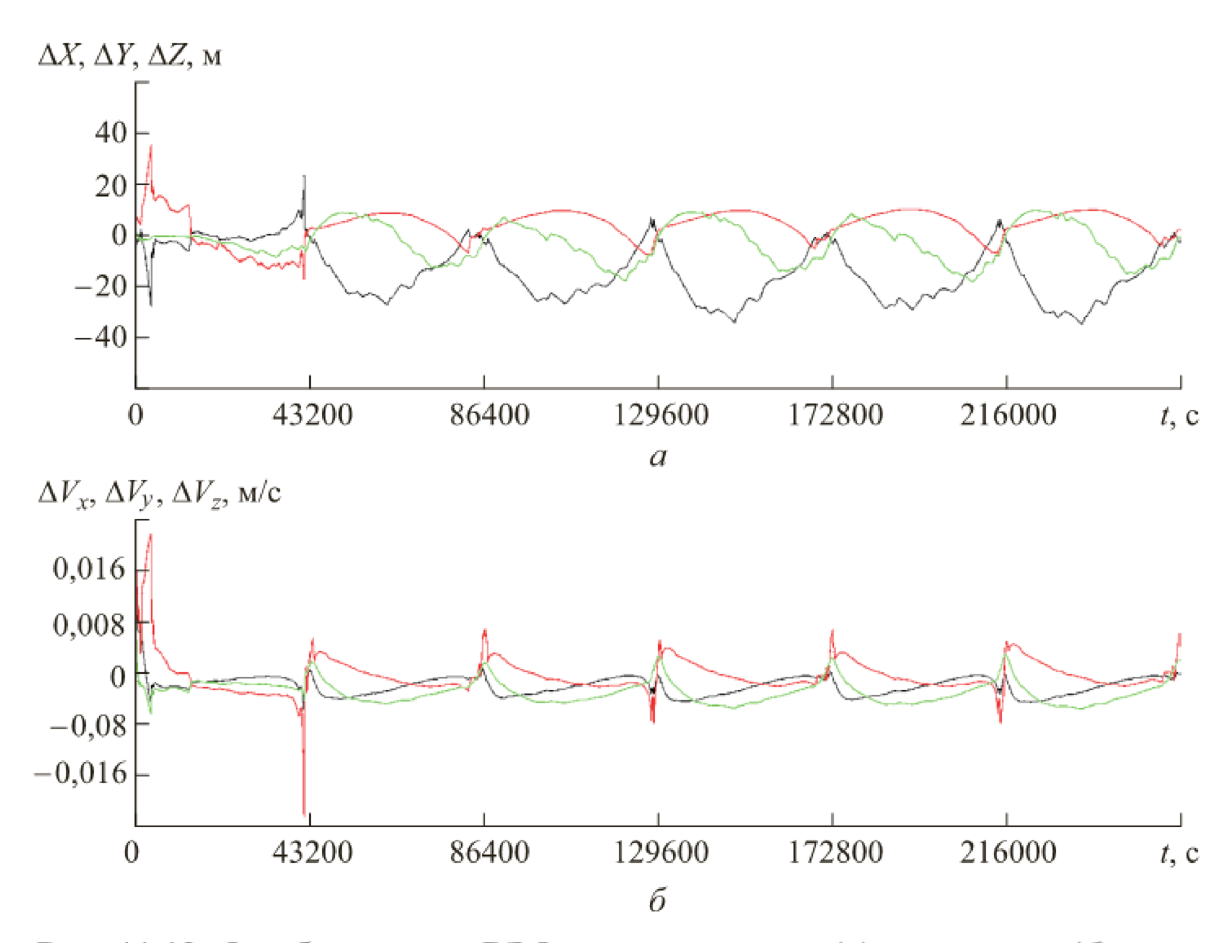


Рис. 11.13. Ошибки оценки ВЭО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 43\,000$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН и солнечное давление)

На рис. 11.14 показаны результаты аналогичного моделирования для режима ГЛОНАСС, когда измерения в АСН проводились только по сигналам спутников ГЛОНАСС. Из рисунка видно, что ошибки оценки по координатам практически не изменились и достигают 30 м, ошибки по скорости несколько возросли и составили 1,5 см/с.

Однако полученный результат относится к случаю, когда КА находится в свободном полете и на него влияют только внешние силы. При выполненной коррекции орбиты на КА действуют повышенные возмущающие силы

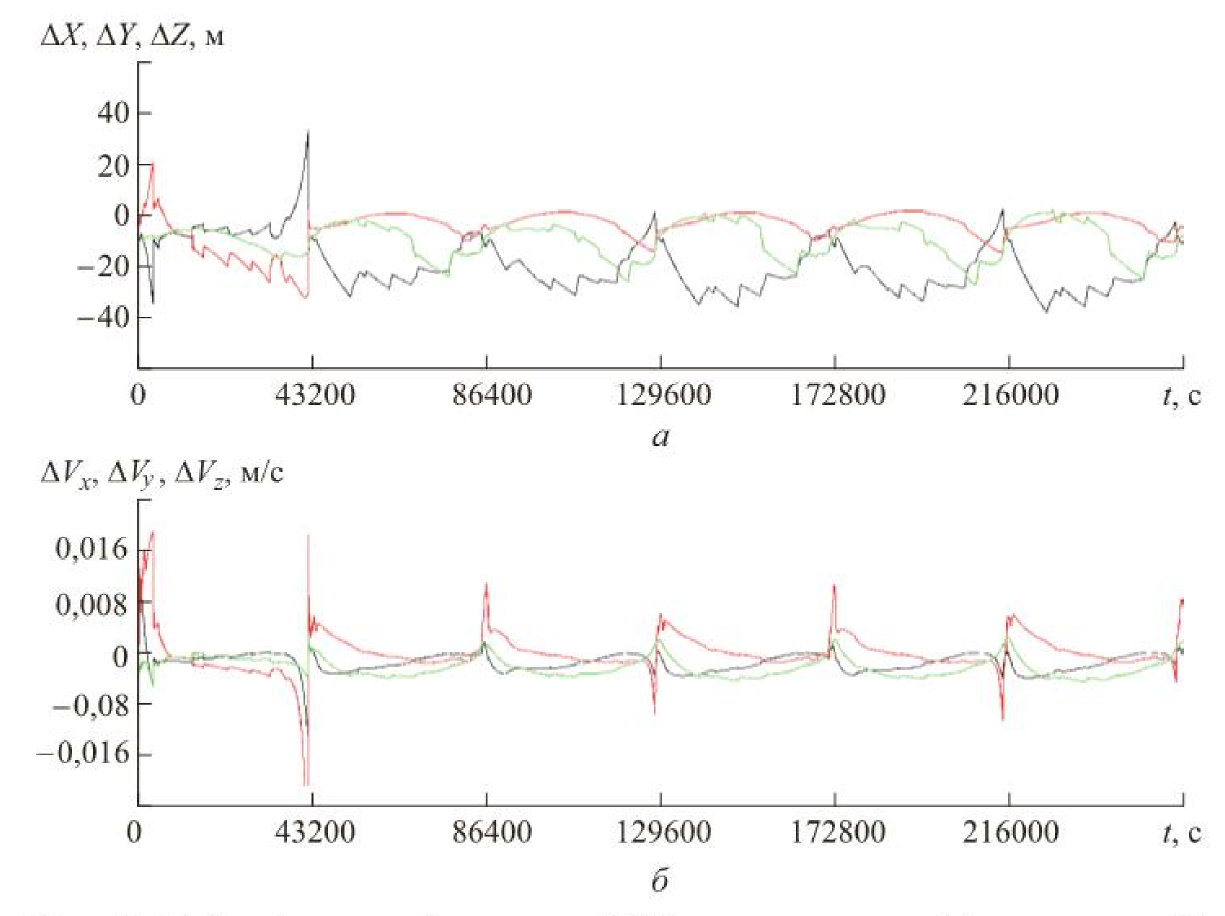


Рис. 11.14. Графики ошибок оценки ВЭО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 43\,000$ с. Действующие возмущения — ошибки измерений АСН и солнечное давление

от двигателей коррекции, сильновлияющие на точность формируемой оценки. Двигатели коррекции орбиты КА могут быть двух типов: большой и малой тяги.

Двигатели большой тяги — это реактивные двигатели, создающие ускорения в диапазоне $10^{-2}\ldots10$ м/с^2 и работающие при коррекции орбиты от нескольких секунд до нескольких минут. Такую коррекцию будем называть *импульсной*. Двигатели малой тяги — это, как правило, электрические реактивные двигатели с тягой от нескольких десятков граммов до нескольких сотен граммов. Они создают ускорение КА в диапазоне $10^{-4}\ldots10^{-5}$ м/с^2. Длительность коррекции с помощью таких двигателей может находиться в диапазоне от нескольких десятков минут вплоть до непрерывной работы в течение месяцев.

На КА с корректирующими двигателями большой тяги, как правило, в состав системы управления входит БИНС, оценивающая ускорение от двигателей. Будем считать, что точность оценки ускорения с помощью БИНС составляет 10^{-4} м/с^2. Тяга малых двигателей хотя и грубо, но также может быть оценена по управляющим параметрам двигателя, по крайней мере, с точностью до 10 %. С учетом сказанного будем предполагать, что при проведении непрерывной коррекции ошибка моделируемого на борту ускорения от дви-

гателей составляет 10^{-5} м/с^2. Определим, как влияет ошибка оценки непрерывного возмущающего ускорения от двигателей на точность формируемой оценки орбиты КА.

На рис. 11.15 приведены графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС с постоянной времени фильтра $T_X = T_V =$ $= 43\,000$ с при непрерывной коррекции орбиты с ошибкой оценки ускорения от двигателей 10^{-5} м/с^2. Из графиков видно, что ошибки по координатам достигают 60 км, по скорости — 60 м/с, т. е. по сравнению со свободным полетом, ошибки увеличились в 2000 раз. Существенное уменьшение ошибок может быть достигнуто благодаря изменению постоянной времени фильтра. Наиболее приемлемыми значениями постоянных времени фильтра, обеспечивающими существенное повышение точности формируемой оценки ВЭО и сохраняющими устойчивость процесса фильтрации, являются значения $T_X =$ $= 10\,000$ с, $T_V = 2000$ с. Графики ошибок оценки ВЭО для этих значений постоянной времени фильтра в режиме GPS+ГЛОНАСС и возмущений от двигателей 10^{-5} м/с^2 приведены на рис. 11.16, из которого следует, что ошибки оценки ВЭО по координатам в этом случае не превышают 1,5 км, по скорости — 0,2 м, т. е. по сравнению с предыдущим случаем ($T_X = T_V = 43\,000$ с) уменьшились в 50 раз. Обеспечиваемая в этом случае точность оценки орби-

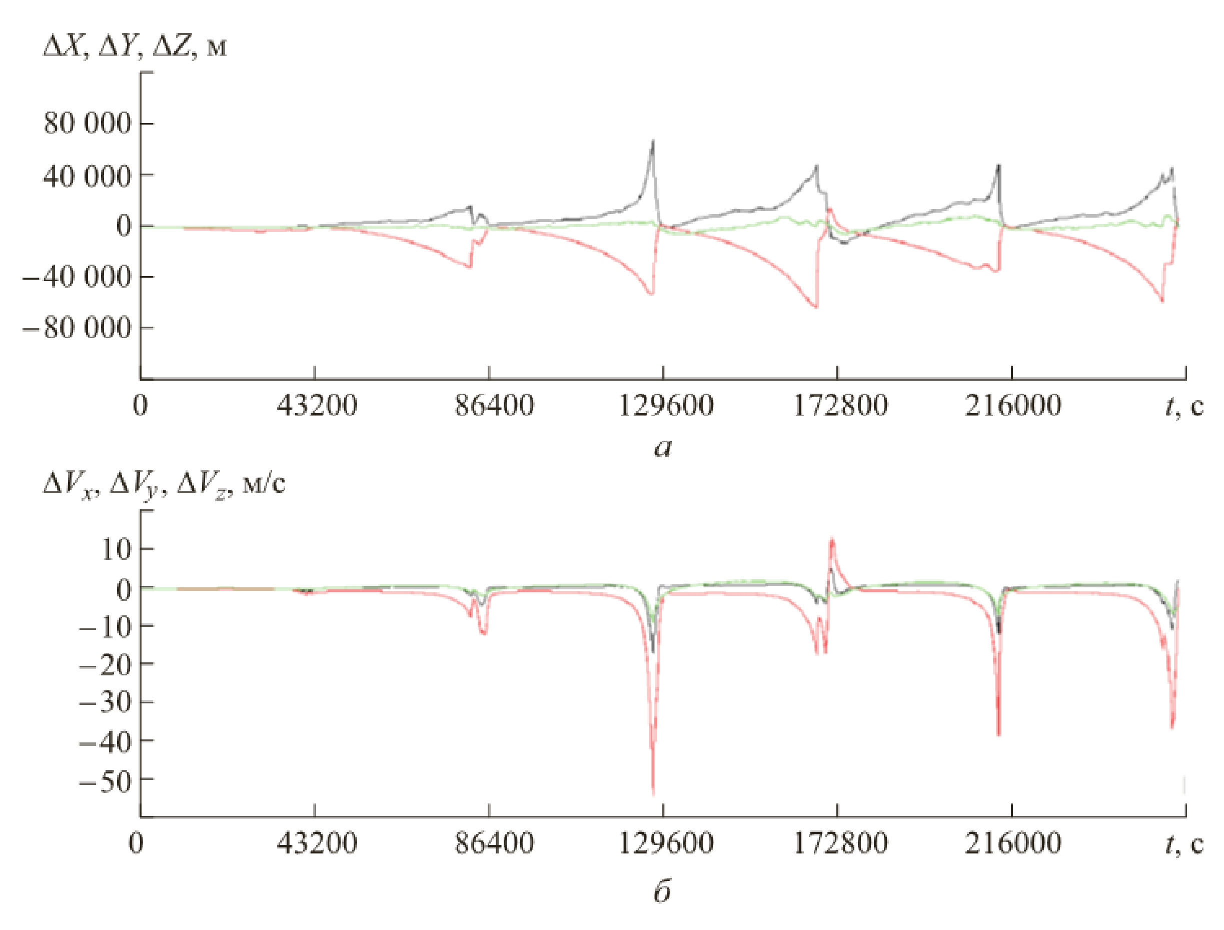


Рис. 11.15. Ошибки оценки ВЭО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 43\,000$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН, солнечное давление, постоянное возмущение от двигателей коррекции с ускорением 10^{-5} м/с^2)

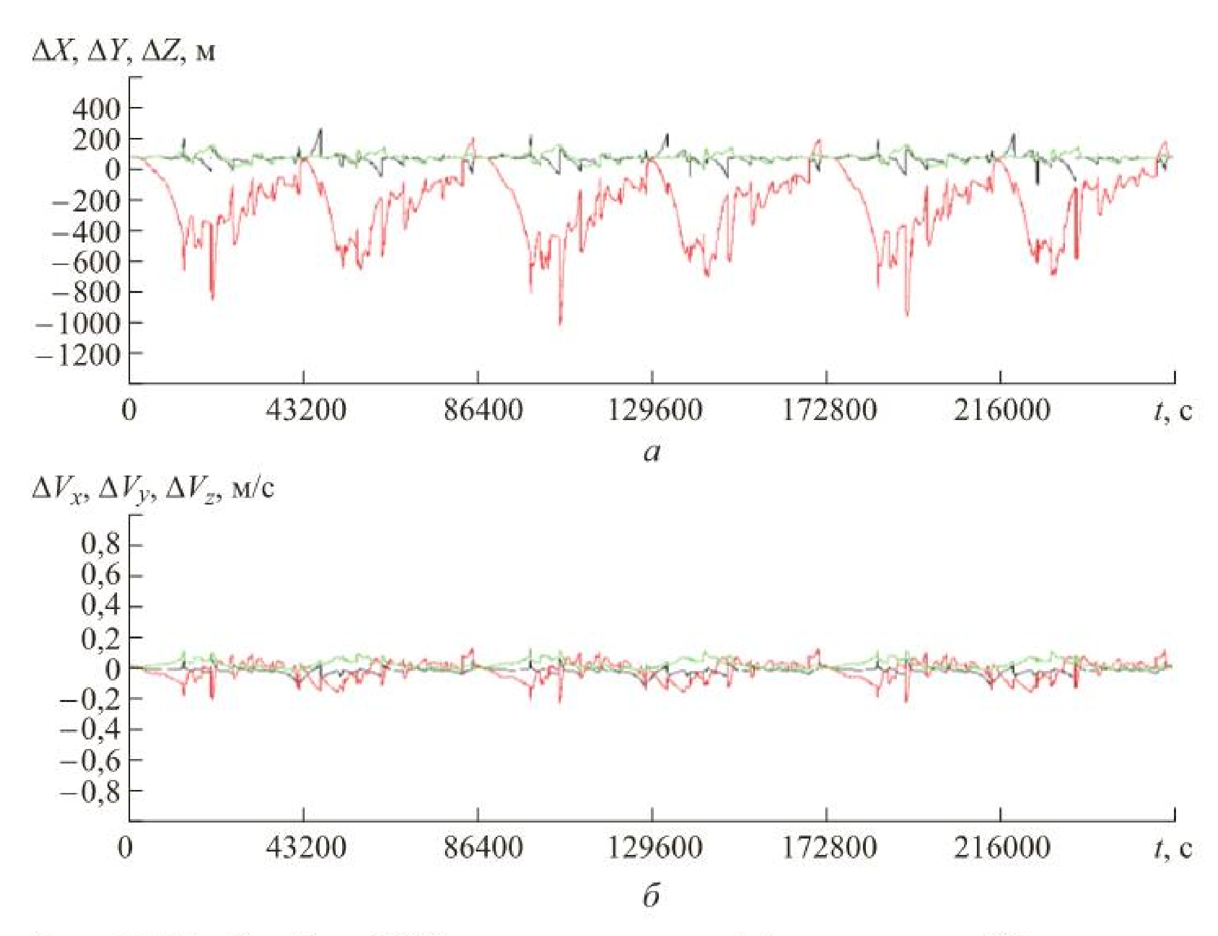


Рис. 11.16. Ошибки ВЭО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_X = 10\,000$ с; $T_V = 2000$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН, силы солнечного давления, возмущения от двигателей коррекции с ускорением 10^{-5} м/с^2)

ты (порядка километра) во многих случаях достаточна для решения функциональных задач КА, тогда они могут выполняться и на фоне коррекции орбиты. После завершения коррекции максимальные ошибки оценки ВЭО по координатам и скорости для постоянной времени $T_X = 10\,000$ с, $T_V = 2000$ с в режиме GPS+ГЛОНАСС приведены на рис. 11.17.

Таким образом, уменьшение постоянных времени T_X и T_V обеспечивает повышение точности формируемой оценки орбиты при проведении коррекции орбиты. Однако в этом случае ухудшается устойчивость процесса динамической фильтрации измерений АСН. При уменьшении числа НС в группировке процесс динамической фильтрации может стать неустойчивым. Например, на рис. 11.18 приведены графики ошибок оценки ВЭО для постоянной времени $T_X = 10\,000$ с и $T_V = 2000$ с в режиме ГЛОНАСС, которые демонстрируют большой «разлет» при фильтрации — ошибки по координатам начинают превышать десятки километров, а по скорости — десятки метров в секунду. Поэтому выбор минимально допустимых значений постоянных времени T_X и T_V должен осуществляться для каждой конкретной группировки НС.

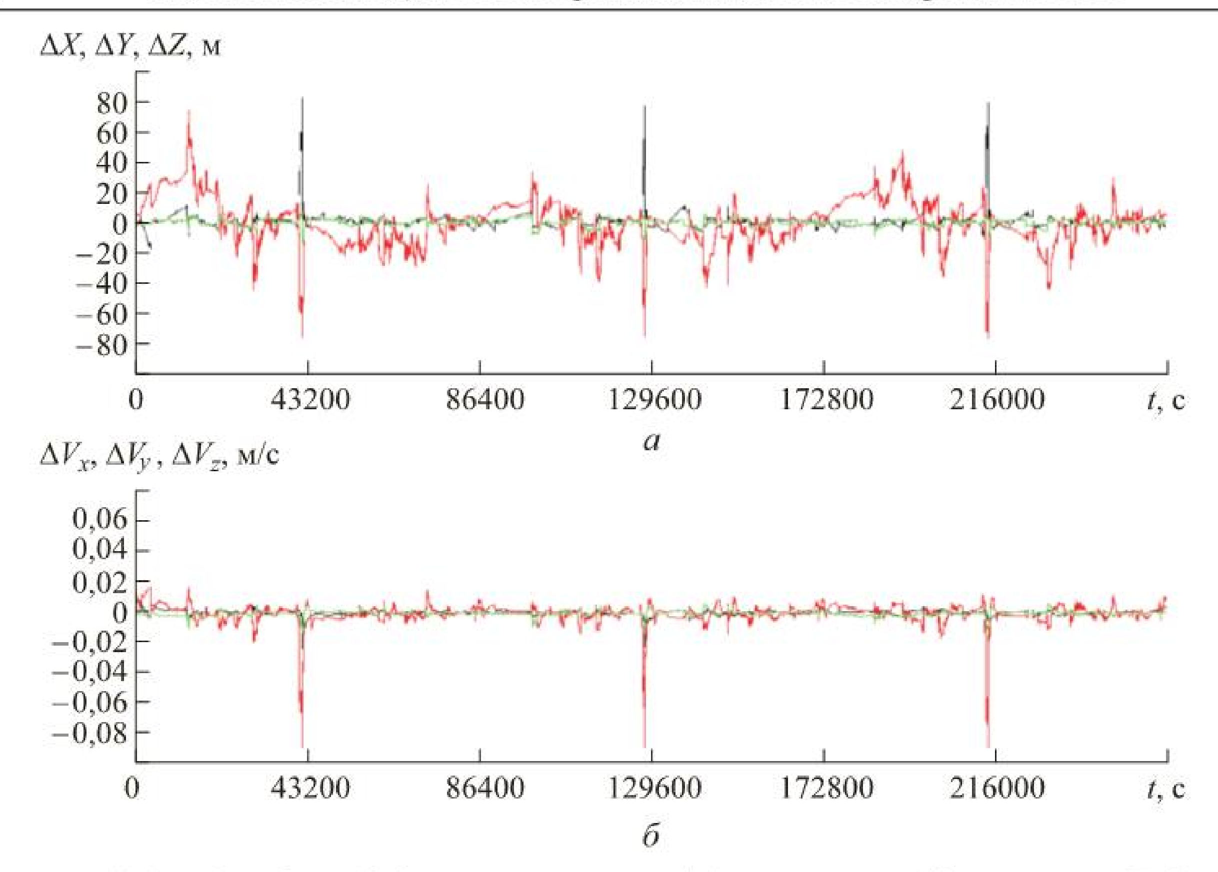


Рис. 11.17. Ошибки ВЭО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени T_X = 10 000 с, T_V = 2000 с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН и силы солнечного давления)

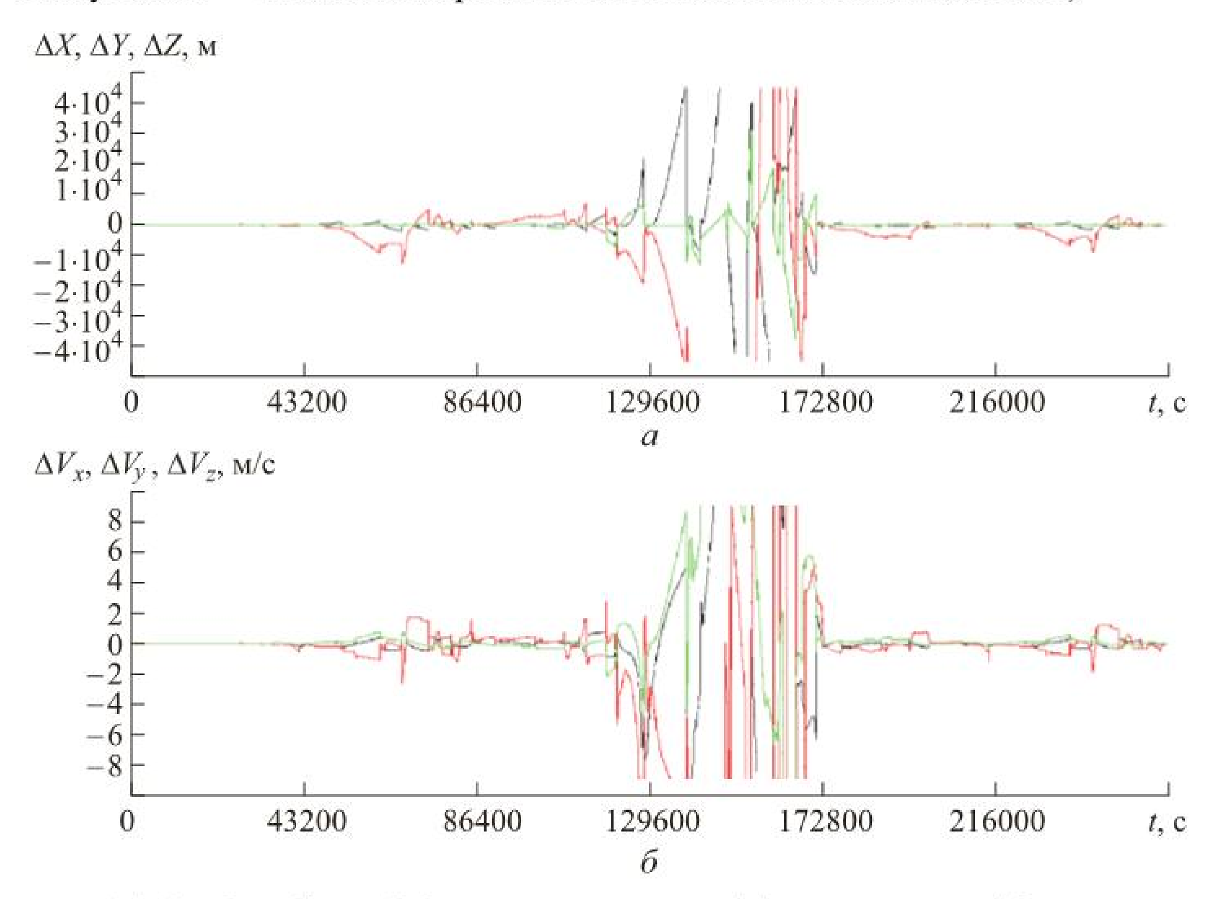


Рис. 11.18. Ошибки ВЭО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме ГЛОНАСС при постоянной времени T_X = 10 000 с; T_V = 2000 с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН и силы солнечного давления)

Импульсная коррекция орбиты приводит к временному снижению точности формируемой оценки орбиты. На рис. 11.19 показаны графики ошибок оценки ВЭО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_X = 10\,000$ с, $T_V = 2000$ с и импульсной коррекции орбиты с ускорением 10^{-4} м/с^2 и длительностью 2000 с. Из графиков видно, что в процессе коррекции ошибки по координатам возрастают до 1,5 км, по скорости — до 0,4 м/с^2. После завершения коррекции ошибки оценки начинают уменьшаться и выходят на установившийся уровень (см. графики на рис. 11.17) за время ~1 виток.

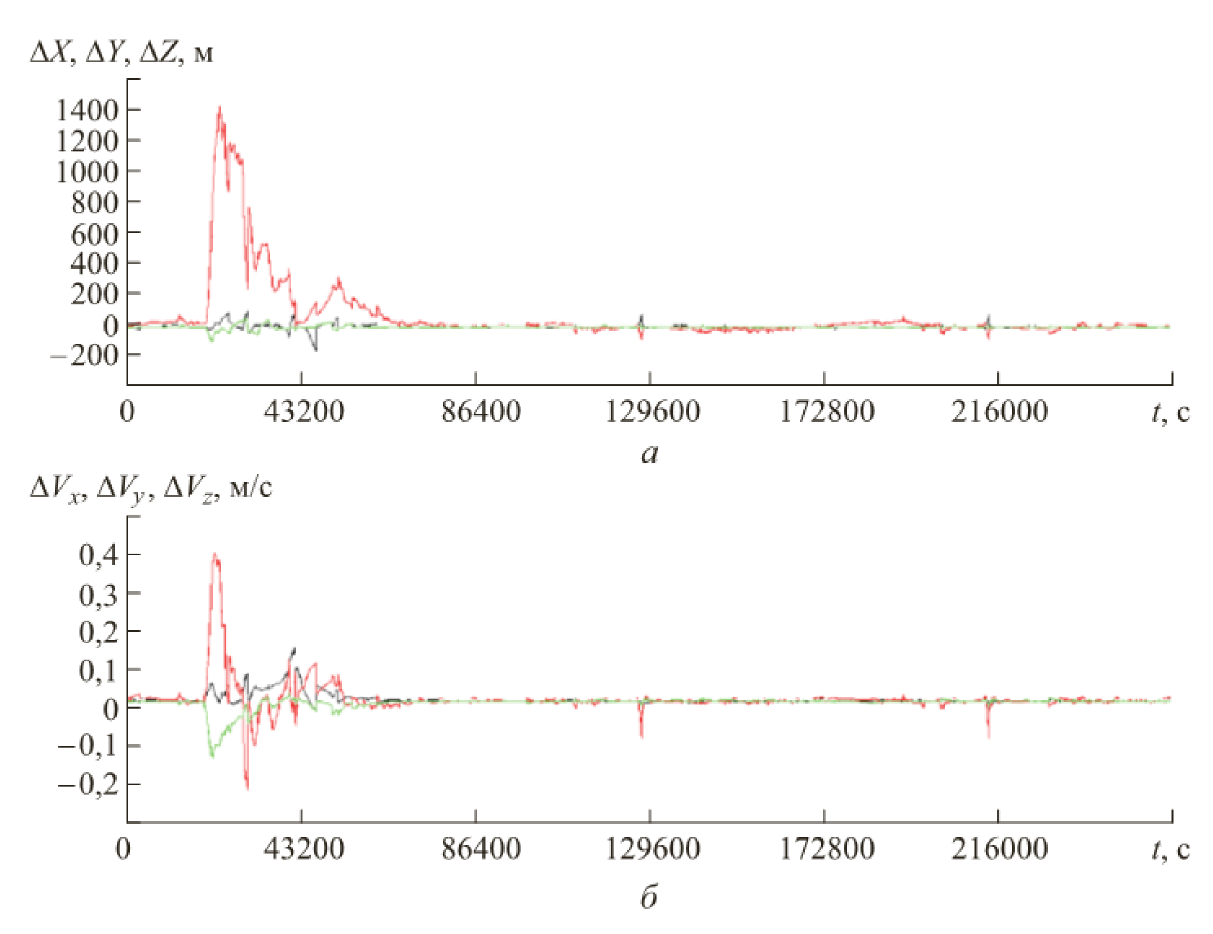


Рис. 11.19. Ошибки оценки ВЭО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = 10\,000$ с; $T_V = 2000$ с и импульсной коррекции орбиты с ускорением 10^{-4} м/с^2 и длительностью 2000 с

Таким образом, формирование оценки орбиты ВЭО по полным «сырым» измерениям АСН в соответствии с алгоритмами динамической фильтрации (11.3)–(11.10) при значениях постоянной времени $T_X = T_V = 43\,000$ с (один виток), моделировании гравитационного поля Земли с точностью до ~70 порядка и гравитационных возмущений от Луны и Солнца обеспечивают точность по координатам ~30 м, по скорости — 1,5 см/с.

При проведении коррекции орбиты КА с помощью корректирующих двигателей ошибки оценки резко возрастают. Но они могут быть существенно снижены за счет уменьшения значений постоянных времени T_X и T_V.

Однако эти постоянные времени ограничены условиями устойчивости динамической фильтрации, зависящими, в том числе, от альманаха НС и особенно от числа НС в спутниковой группировке. Получить аналитически условия устойчивости невозможно в силу существенной нелинейности процесса динамической фильтрации (особенно для высоких орбит при малом числе видимых НС). Поэтому исследование точностных и динамических характеристик формируемой оценки орбиты должно выполняться для каждого конкретного КА и альманаха НС. Приведенные выше результаты моделирования позволяют оценить достигаемые точности в тех или иных режимах работы АСН и систем КА. При проектировании КА для нахождения точностных характеристик системы необходимо выполнять аналогичное моделирование с учетом конкретных характеристик КА, его орбиты и состояния группировок НС.

11.4. Навигация геостационарных космических аппаратов по полным «сырым» измерениям от обратных НС

Если КА, находящиеся на ВЭО, периодически видят прямые НС и они могут формировать КСВ, то КА на ГСО могут видеть только обратные НС. Типовые графики видимости НС на ГСО в режимах GPS, ГЛОНАСС и GPS+ГЛОНАСС приведены на рис. 11.20. Они получены путем моделирования для группировки GPS из 30 НС и ГЛОНАСС из 24 НС. Из рисунка видно, что на всей орбите в режиме GPS число видимых НС находится в диапазоне 0–4, в режиме ГЛОНАСС — 0–3, а в режиме GPS+ГЛОНАСС — 0–6.

В режиме GPS и GPS+ГЛОНАСС наблюдаются интервалы, когда число видимых НС больше трех. На этих участках орбиты можно формировать КСВ, однако в силу малости углового расстояния между видимыми НС, уровень GDOP на этих участках настолько большой, что точность формируемых КСВ становится недопустимо низкой.

На рис. 11.21 для этих участков орбиты приведены графики ошибок КСВ по координатам и графики уровня GDOP.

Очевидно, что уровень GDOP находится в диапазоне 100…1000 при допустимом значении 2…6. Высокий уровень GDOP обусловливает большие ошибки определяемых координат КА, достигающие 5 км. В таком случае ошибки прогноза орбиты на интервале, где КСВ не формируются ($n < 4$), могут составлять десятки километров. Оценивать орбиту по измерениям КСВ в режимах GPS или ГЛОНАСС невозможно, поэтому оценку орбиты для ГСО необходимо проводить по «сырым» измерениям. При этом обеспечивается максимальная точность оценки орбиты, если она осуществляется по полным «сырым» измерениям — псевдодальностям и интегральным фазам, например, по алгоритмам (11.6)–(11.10). Формирование оценки орбиты для ГСО по этим алгоритмам было выполнено моделированием при различных возмущениях. Для исключения ионосферных ошибок измерений в обработку принимались НС, высоты линий визирования которых относительно Земли были более

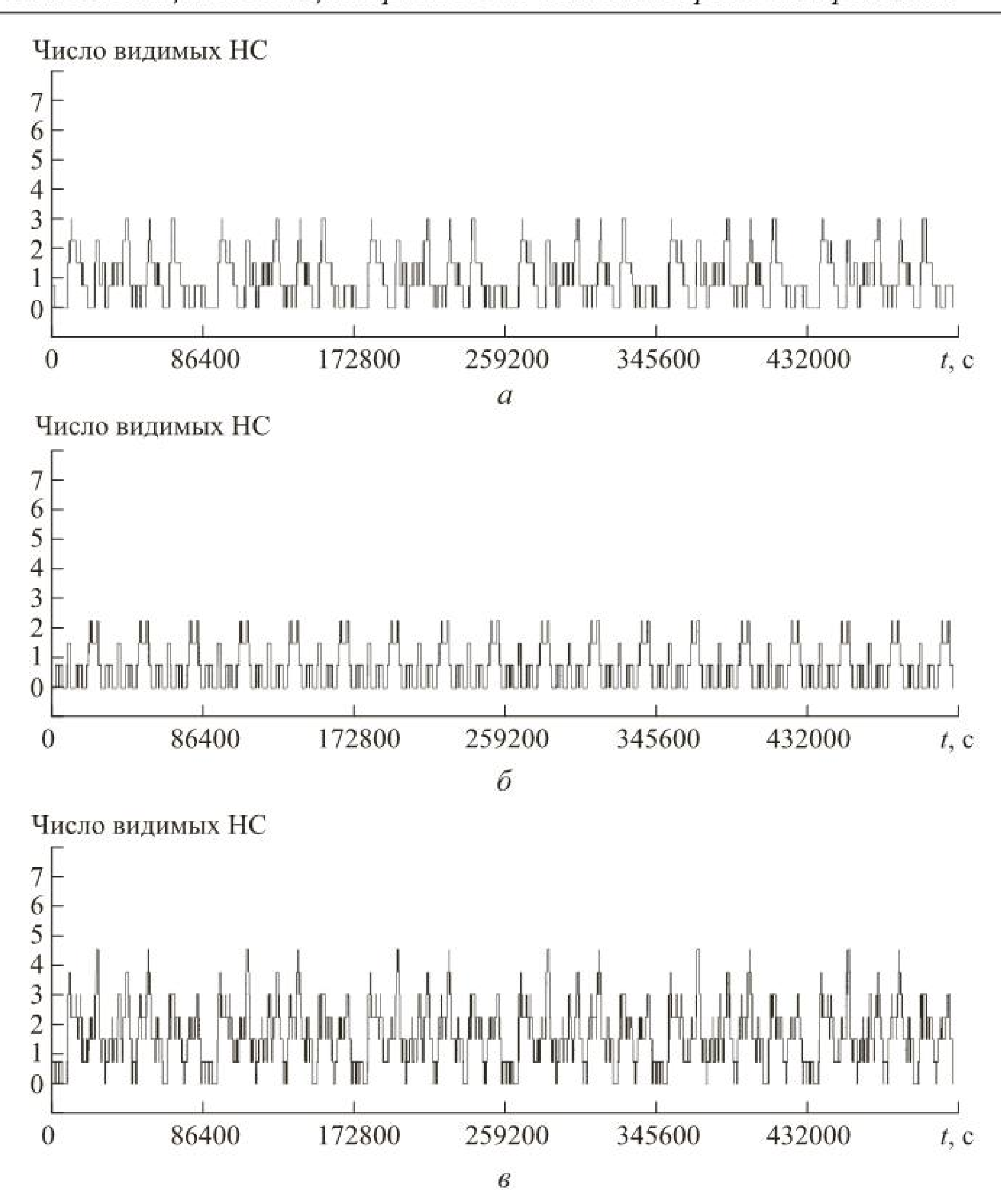


Рис. 11.20. Число видимых НС для ГСО в режимах GPS (*а*), ГЛОНАСС (*б*) и GPS+ГЛОНАСС (*в*)

600 м (маска 600 км). Поэтому моделируемые ионосферные ошибки не превышали 2…4 м. Моделировались также эфемеридные ошибки, шумы измерений псевдодальностей, переотражения сигналов от элементов конструкции КА. Все эти ошибки также не превышали ~5 м. На рис. 11.22 показаны графики ошибок формируемой оценки ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянной времени $T_X = T_V = 86\,000$ с. При моделировании предполагалось, что модель движения КА, реализуемая в АСН при прогнозе движения объекта, абсолютно точная.

Из рисунка следует, что в установившемся состоянии ошибки оценки по координатам не превышают 3 м, по скорости — 0,1 см/с. Длительность переходного процесса составляет ~1 сут. В течение переходного процесса ошибки изменяются от начальных значений в момент t_0 до установленных значений.

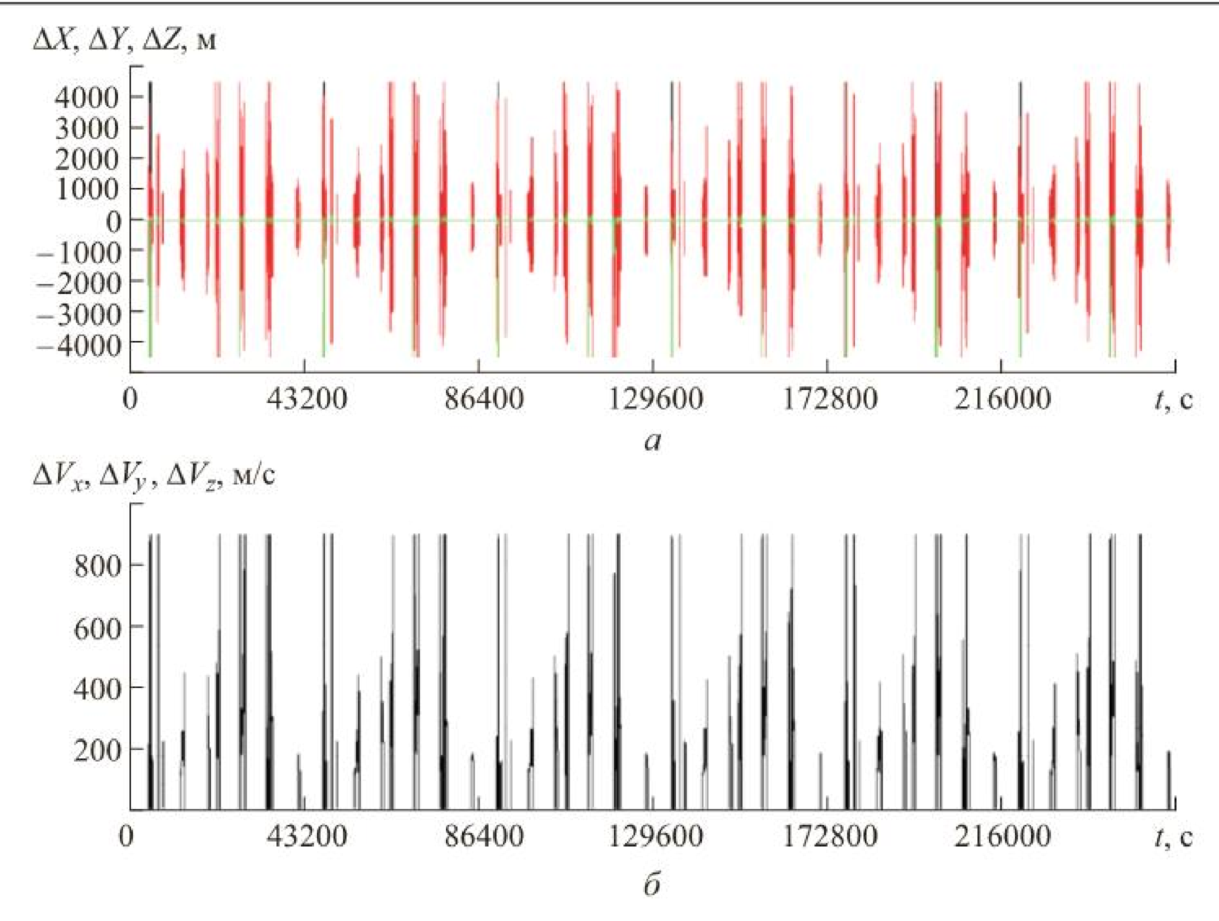


Рис. 11.21. Ошибки КСВ по координатам (*а*) и уровень GDOP (*б*) для ГСО в режиме GPS+ГЛОНАСС на участках орбиты, где число видимых НС > 3

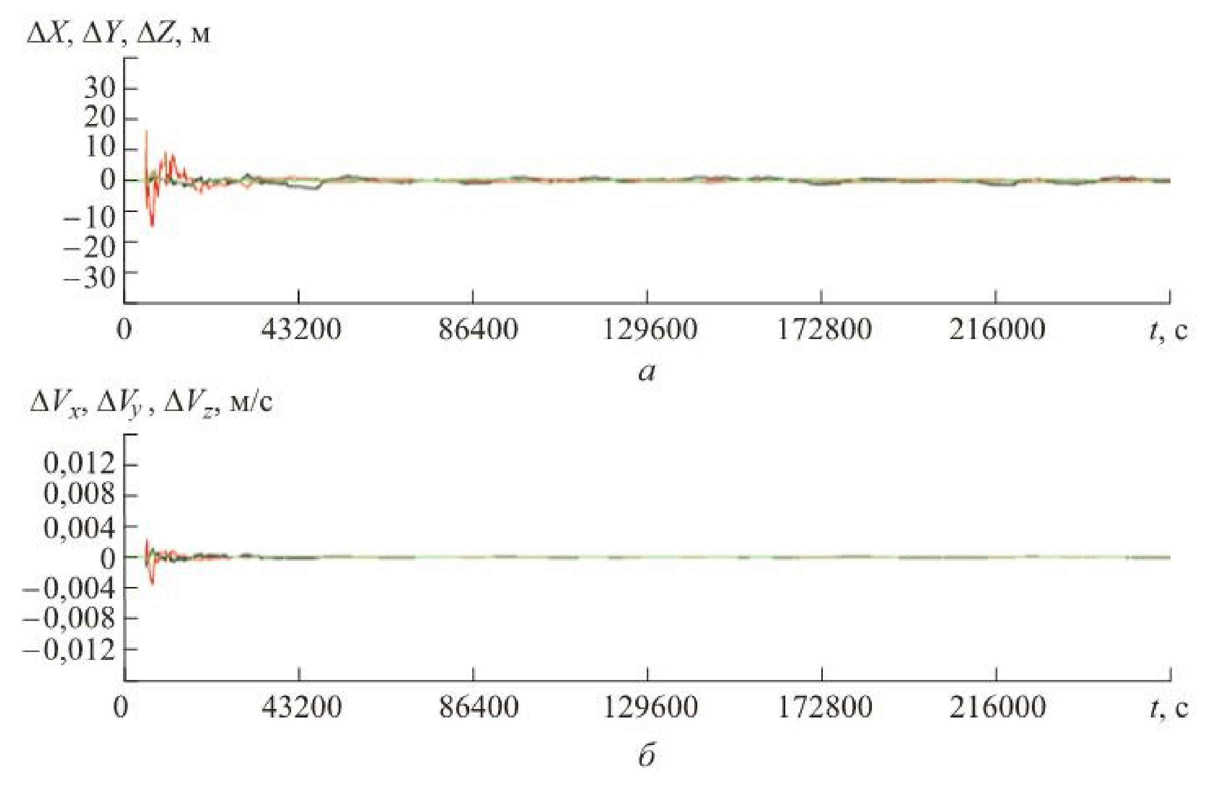


Рис. 11.22. Ошибки оценки ГСО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 86\,000$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН)

На рис. 11.23 приведены аналогичные графики ошибок оценки ГСО, где в качестве возмущений рассматривались ошибки измерений АСН и влияние сил солнечного давления, т. е. предполагалось, что в бортовой модели выполняется точное моделирование гравитационного поля Земли и гравитационного воздействия от Луны и Солнца. Действительно, эти возмущения легко моделируются в АСН с высокой точностью, тогда как моделирование сил солнечного давления для многих КА представляет собой проблему из-за неопределенности ряда параметров. Поэтому моделирование реального движения КА учитывало силы солнечного давления, а в бортовой модели движения КА при выполнении динамической фильтрации измерений АСН эти возмущения не моделировались. Из приведенных графиков видно, что из-за нескомпенсированного влияния сил солнечного давления ошибки оценки орбиты по координатам возросли до 200 м, по скорости — до 2 см/с.

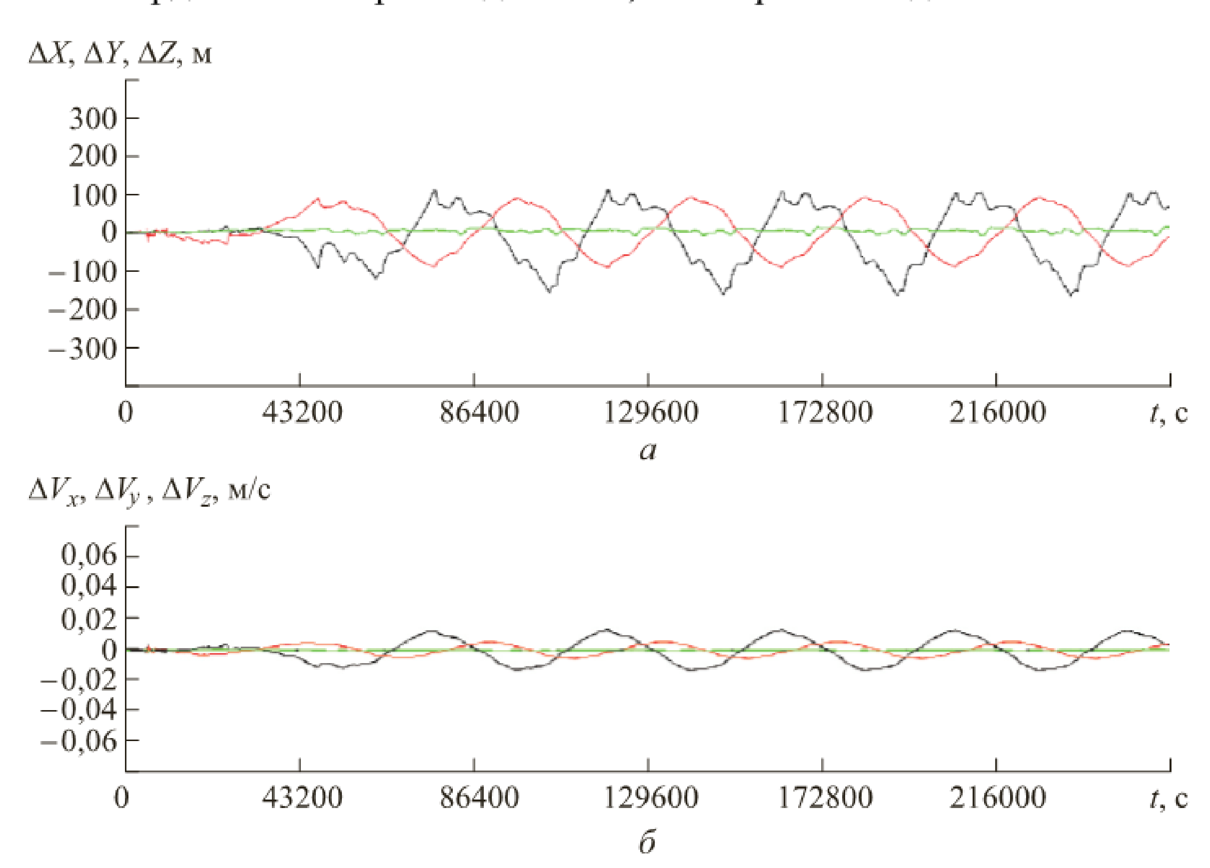


Рис. 11.23. Ошибки оценки ГСО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 86\ 000$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН и солнечное давление)

На рис. 11.24 показаны результаты аналогичного моделирования для режима ГЛОНАСС, когда измерения в АСН проводились только по сигналам спутников ГЛОНАСС. Очевидно, что ошибки оценки по координатам достигают 300 м, а по скорости — 1,5 см/с.

На рис. 11.25 приведены графики ошибок оценки ГСО по координатам и скорости в режиме GPS+ГЛОНАСС с постоянной времени фильтра $T_X = T_V = 86\ 400$ с при непрерывной коррекции орбиты с ошибкой оценки ускорения от двигателей 10^{-5} м/с^2.

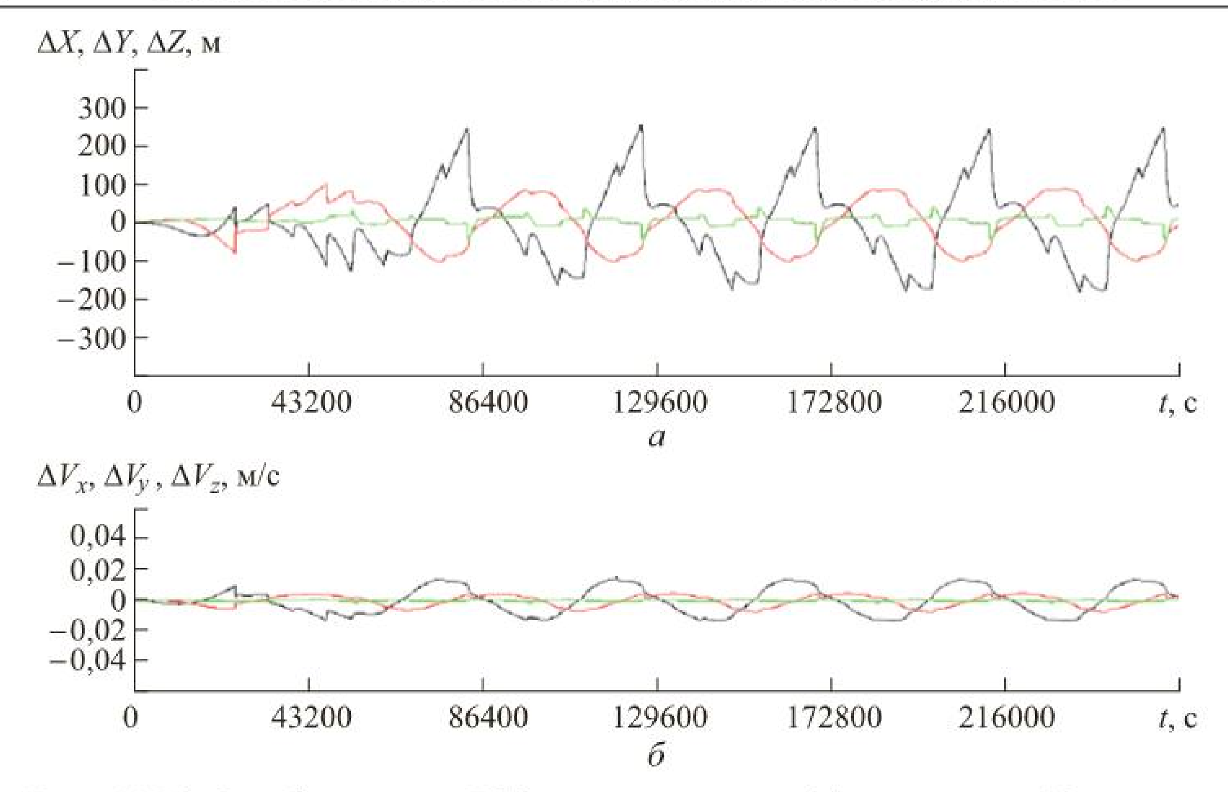


Рис. 11.24. Ошибки оценки ГСО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 86\ 000$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН и солнечное давление)

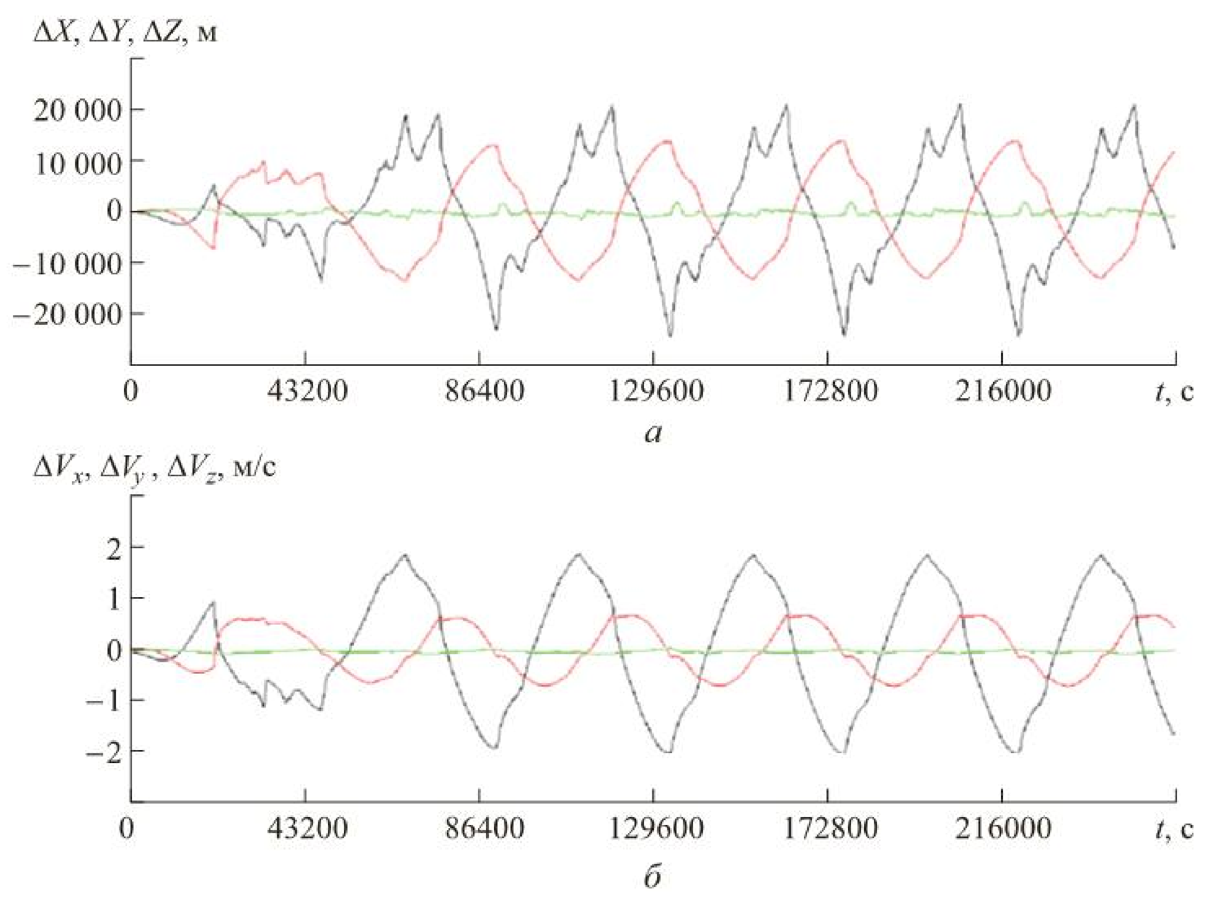


Рис. 11.25. Ошибки оценки ГСО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = T_V = 86\ 400$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН, силы солнечного давления, возмущения от двигателей коррекции с ускорением 10^{-5} м/с^2)

Из рисунка видно, что ошибки по координатам достигают 30 км, а по скорости — 2 м/с, т. е. по сравнению со свободным полетом ошибки возросли примерно в 100 раз.

Существенное уменьшение ошибок может быть обеспечено при изменении постоянных времени фильтра T. Проведенное исследование показало, что наиболее приемлемыми значениями постоянных времени фильтра, существенно повышающими точность формируемой оценки ГСО и сохраняющими устойчивость процесса фильтрации, являются $T_X = 10\ 000$ с, $T_V = 2000$ с. Графики ошибок оценки ГСО для этих значений постоянной времени фильтра в режиме GPS+ГЛОНАСС и возмущений от двигателей 10^{-5} м/с^2 показаны на рис. 11.26.

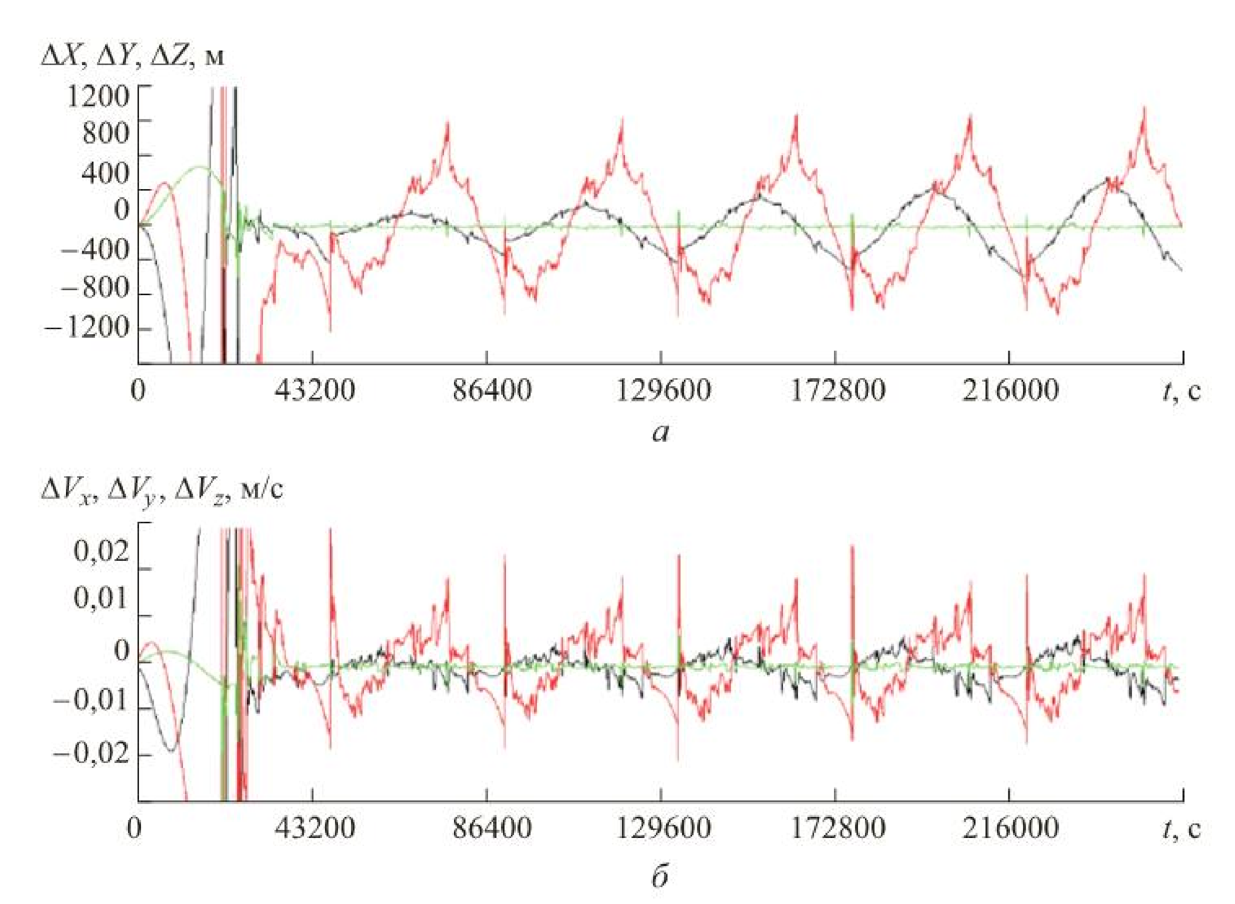


Рис. 11.26. Ошибки ГСО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени $T_X = 10\ 000$ с, $T_V = 2000$ с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН, силы солнечного давления, возмущения от двигателей коррекции с ускорением 10^{-5} м/с^2)

Из графиков видно, что ошибки оценки ГСО по координатам в этом случае не превышают 1,5 км, по скорости — 0,2 м/с, т. е. по сравнению с предыдущим случаем они уменьшились в 20 раз. Обеспечиваемая в этом случае точность оценки орбиты (порядка километра) во многих случаях достаточна для решения функциональных задач КА, которые в таком случае могут выполняться и на фоне коррекции орбиты. После завершения коррекции максимальные ошибки оценки ГСО по координатам и скорости для постоянной времени $T_X =$ $= 10\ 000$ с, $T_V = 2000$ с в режиме GPS+ГЛОНАСС приведены на рис. 11.27.

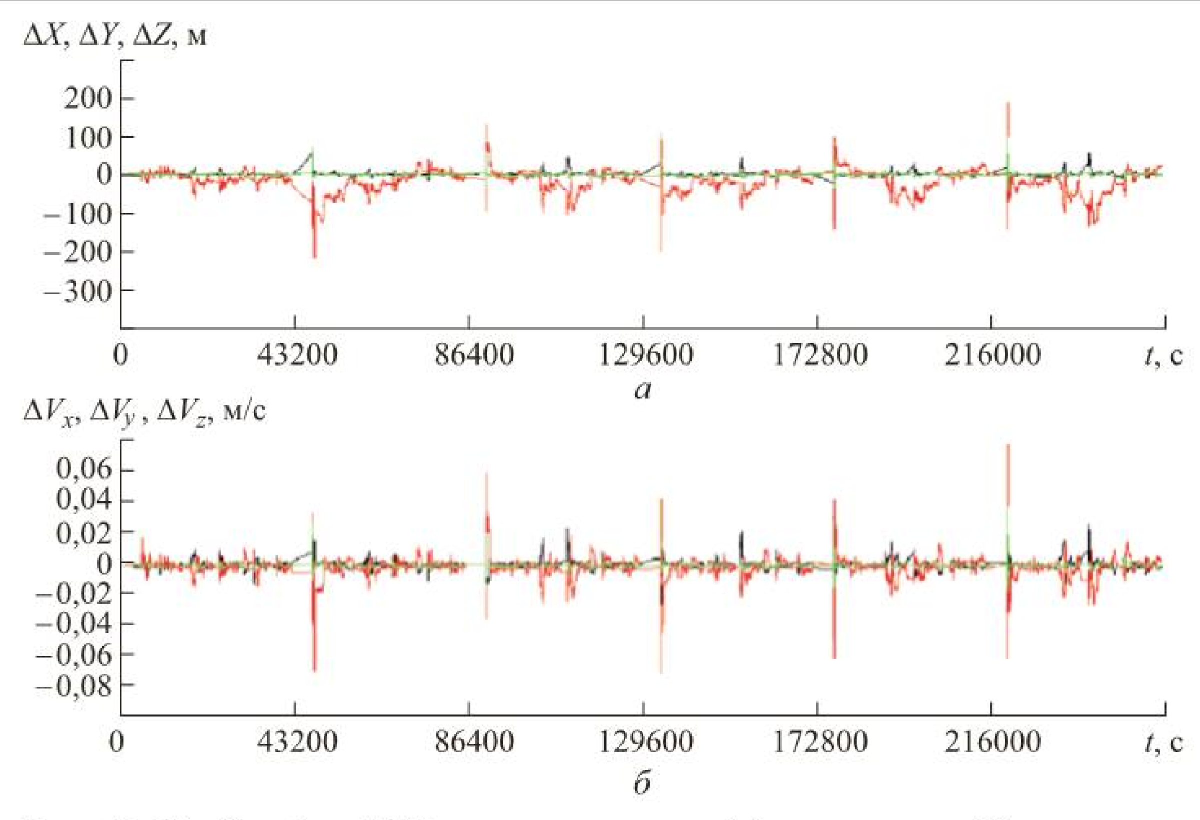
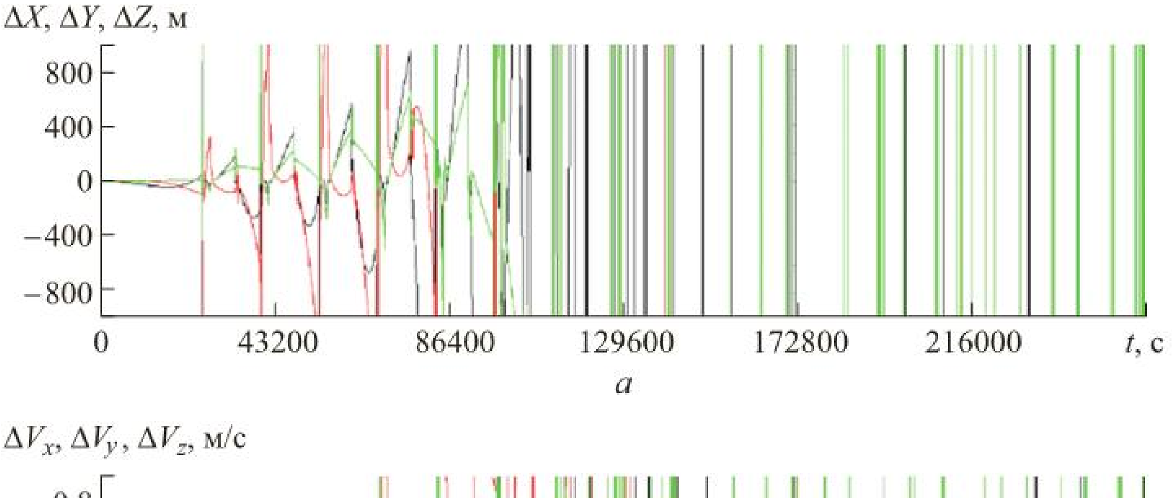


Рис. 11.27. Ошибки ГСО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени T_X = 10 000 с, T_V = 2000 с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН и силы солнечного давления)



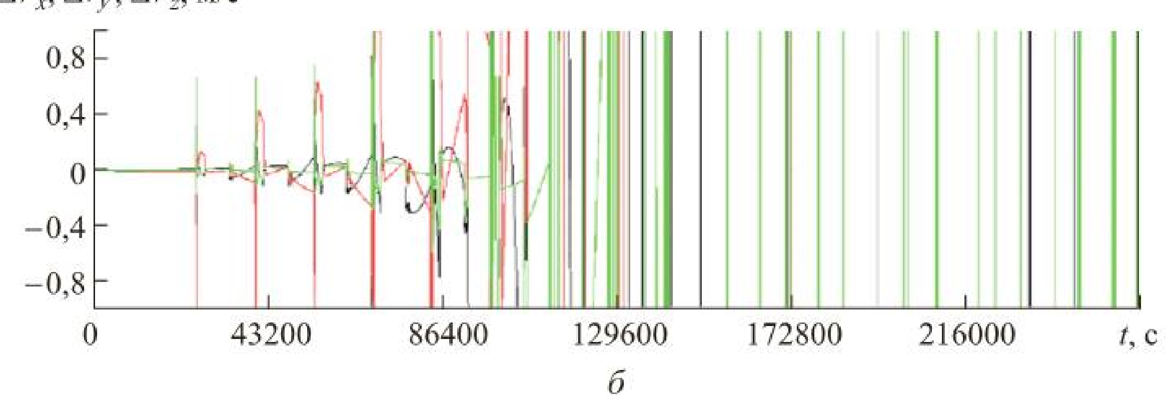


Рис. 11.28. Ошибки ГСО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме ГЛОНАСС при постоянных времени T_X = 10 000 с, T_V = 2000 с (действующие возмущения — ошибки измерений АСН и силы солнечного давления)

Уменьшение постоянных времени T_X и T_V повышает точность формируемой оценки орбиты при проведении коррекции орбиты. Однако в этом случае ухудшается устойчивость процесса динамической фильтрации измерений АСН. При снижении числа НС в группировке процесс динамической фильтрации может стать неустойчивым. На рис. 11.28 приведены графики ошибок оценки ГСО для постоянных времени T_X = 10 000 с, T_V = 2000 с в режиме ГЛОНАСС, которые демонстрируют «развал» процесса фильтрации — ошибки по координатам начинают превышать десятки километров, а по скорости — десятки метров в секунду. Поэтому выбор минимально допустимых значений постоянных времени T_X и T_V должен осуществляться для каждой группировки НС.

Импульсная коррекция орбиты приводит к временному снижению точности формируемой оценки орбиты (рис. 11.29). Из рисунка видно, что в процессе коррекции ошибки по координатам возрастают до 900 м, по скорости — до 0,3 м/с^2. После завершения коррекции ошибки оценки начинают уменьшаться и выходят на установившийся уровень (см. рис. 11.27) примерно за один виток.

Таким образом, формирование оценки орбиты ГСО по полным «сырым» измерениям АСН в соответствии с алгоритмами динамической фильтрации (11.3)–(11.10) при постоянных времени T_X = T_V = 86 000 с (1 виток), модели-

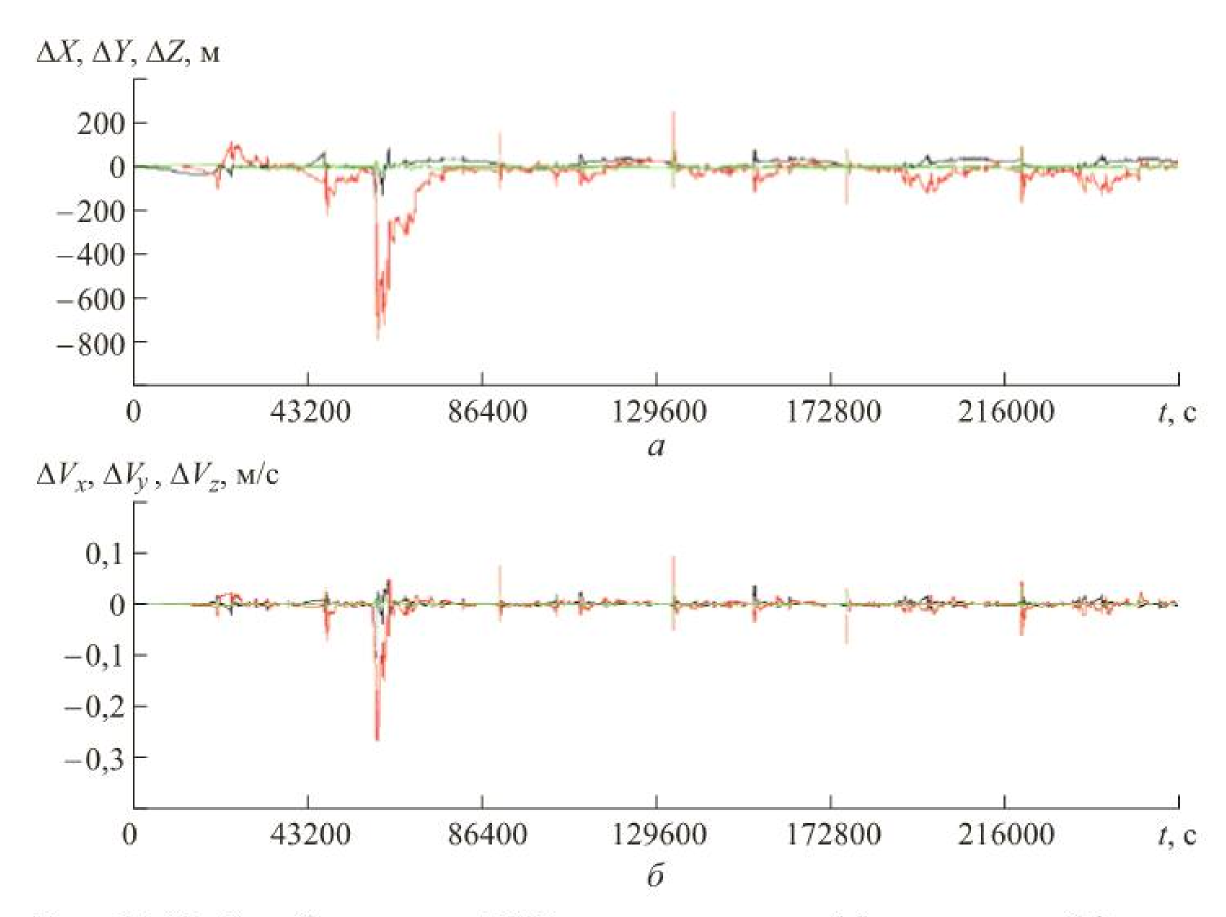


Рис. 11.29. Ошибки оценки ГСО по координатам (*а*) и скорости (*б*) в режиме GPS+ГЛОНАСС при постоянных времени T_X = 10 000 с, T_V = 2000 с и импульсной коррекции орбиты с ускорением 10^{-4} м/с^2 и длительностью 2000 с

ровании гравитационного поля Земли с точностью до ~8 порядка и гравитационных возмущениях от Луны и Солнца обеспечивают точность по координатам ~200 м, по скорости — 1,5 см/с.

При проведении коррекции орбиты КА с помощью корректирующих двигателей ошибки оценки резко возрастают, однако они могут быть значительно снижены путем уменьшения постоянных времени T_X и T_V. Следует отметить, что постоянные времени ограничены условиями устойчивости динамической фильтрации, зависящими, в том числе, от альманаха НС и особенно от числа НС в спутниковой группировке. Получить аналитически условия устойчивости невозможно в силу существенной нелинейности процесса динамической фильтрации (особенно для высоких орбит при малом числе видимых НС). Поэтому исследование точностных и динамических характеристик формируемой оценки орбиты должно выполняться для каждого КА и альманаха НС. Приведенные выше результаты моделирования позволяют оценить полученные точности в тех или иных режимах работы АСН и систем КА. При проектировании КА для определения точностных характеристик системы необходимо выполнять аналогичное моделирование с учетом конкретных характеристик КА, его орбиты и состояния группировок навигационных спутниковых систем.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается навигация высокоэллиптических КА по измерениям АСН в окрестности перигея и на полной орбите?

2. Как возмущения влияют на оценку орбиты? Благодаря чему достигается точность навигации?

3. В чем заключается навигация геостационарных КА по полным «сырым» измерениям от обратных НС?

Литература

Основная

Автономная система навигации модернизированных кораблей «Союз» и «Прогресс» / Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, И.В. Орловский [и др.] // Сб. тр. XXI Санкт-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2013. С. 304–309.

Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическими летательными аппаратами. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Машиностроение, 1974.

Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов / Ю.Г. Марков, В.Н. Почукаев, С.Н. Рожков [и др.] // Космические исследования. 2015. Т. 53. № 6. С. 1–9.

Бартенев В.А., Гречкосеев А.К., Марарескул Д.И. Применение ГЛОНАСС и GPS для навигации космических аппаратов на геостационарных и высокоэллиптических орбитах. Методы навигации, построения аппаратуры и технология испытаний // Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ. 2007. № 3(48),

Бранец В.Н., Михайлов М.В. Аппаратура спутниковой навигации на существующих и перспективных изделиях РКК «Энергия». Функциональные возможности, технические характеристики // Междунар. форум по спутниковой навигации. М.: Правительство Москвы, 2007.

Бранец В.Н., Михайлов М.В. Навигационное обеспечение МКС // Сб. тр. X Санкт-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2003.

Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992.

Бэттин Р. Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966.

Высокоточный прогноз орбит космических аппаратов, анализ влияния различных возмущающих факторов на движение низкоорбитальных и высокоорбитальных КА / Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков [и др.] // Сб. тр. XXI Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор». 2014. С. 77–88.

Дишель В.Д., Межерицкий Е.Л., Немкевич В.А. Методология формирования объединенного контура терминального наведения и инерциально-спутниковой корректируемой навигации в системах управления космических средств выведения. Анализ натурных испытаний. XV Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2008.

Дишель В.Д., Паластин В.Л. Методы навигации и ориентации геостационарных и высокоэллиптических космических аппаратов при использовании БИНС, корректируемой по кодовым и фазовым измерениям ГЛОНАСС/GPS. X Санкт-Петербургская межунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2003.

Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.

Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки результатов измерений. М.: Физматгиз, 1962.

Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И. Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989.

Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Почукаев В.Н. Высокоточный прогноз орбит космического аппарата как результат рационального выбора возмущающих факторов // Доклады академии наук. 2014. Т. 457. № 2. С. 170–174.

Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Почукаев В.Н. Учет фундаментальных составляющих параметров вращения Земли в формировании высокоточной орбиты навигационных спутников // Доклады Академии наук. 2012. Т. 445. № 1.

Метод повышения точности и «времени жизни» эфемерид GPS и ГЛОНАСС / Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков [и др.] // Сб. трудов XIX Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2012.

Метод повышения точности и «времени жизни» эфемерид ГЛОНАСС / Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков [и др.] // Космонавтика и ракетостроение. 2011. № 4(65).

Микрин Е.А., Михайлов М.В. Использование спутниковой навигации для обеспечения полета автоматического транспортного корабля ATV к Международной космической станции // Сб. тр. XIII Санкт-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб: ЦНИИ «Электроприбор», 2006.

Микрин Е.А., Михайлов М.В. Ориентация, выведение, сближение и спуск космических аппаратов по измерениям от глобальных навигационных систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.

Микрин Е.А., Михайлов М.В. Ориентация перспективных кораблей «Союз» и «Прогресс» по измерениям асинхронных приемников GPS // Сб. тр. XV Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2008.

Микрин Е.А., Михайлов М.В. Прецизионная навигация спутника дистанционного зондирования Земли // V научные чтения памяти М.К. Тихонравова. МО, Королёв, 2004.

Микрин Е.А., Михайлов М.В. Эксплуатация АСН-М МКС, ее характеристики и возможности. Перспективы использования АСН на КА «Союз» и «Прогресс» // Сб. тр. XVI Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2009.

Микрин Е.А., Михайлов М.В., Рожков С.Н. Автономная навигация и сближение КА на лунной орбите // Гироскопия и навигация. 2010. Т. 1. № 4.

Микрин Е.А., Михайлов М.В., Рожков С.Н. Автономная навигация и сближение КА на лунной орбите // Сб. тр. XVII Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2010.

Михайлов М.В. Метод определения ориентации космических аппаратов по измерениям асинхронных приемников GPS-ГЛОНАСС // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2009. № 6.

Михайлов М.В. Определение ориентации космических аппаратов по измерениям асинхронных приемников GPS-ГЛОНАСС и датчиков угловой скорости // Космонавтика и ракетостроение. 2009. № 2(55).

Михайлов М.В. Система спутниковой навигации МКС. Функциональное назначение и прикладные эксперименты // Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ. 2007. № 3(48).

Михайлов М.В., *Ларьков И.И.* Решение задачи относительной навигации по измерениям глобальной спутниковой навигационной системы при сближении космических аппаратов // Труды МФТИ. 2011. Т. 3. № 2.

Михайлов М.В., *Рожков С.Н.* Автономная навигация высокоэллиптических космических аппаратов по измерениям АСН // Космонавтика и ракетостроение. 2009. № 2(55).

Михайлов М.В., *Рожков С.Н.* Высокоточный метод ускорения интегрирования уравнений движения космических аппаратов // Космонавтика и ракетостроение, 2014. Т. 1(74). С. 76–88.

Михайлов М.В., *Рожков С.Н.* Прецизионная автономная навигация МКС по измерениям АСН // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2009. № 5.

Михайлов М.В., *Федулов Р.В.* Определение относительного положения двух КА по сигналам навигационных систем GPS и ГЛОНАСС // Сб. тр. V Междунар. конф. Авиация и космонавтика. М., 2006.

Михайлов М.В., *Федулов Р.В.* Применение аппаратуры спутниковой навигации для навигационного обеспечения сближения и стыковки ATV с МКС // Ракетно-космическая техника. РКК «Энергия». 2008. Вып. 3–4.

Михайлов Н.В. Автономная навигация космических аппаратов при помощи спутниковых радионавигационных систем. СПб.: Политехника, 2014.

Муртазин Р.Ф. Баллистическое обеспечение схем быстрого сближения космического корабля с орбитальной станцией // Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ. 2012. № 4(69).

Обеспечение надежности работы аппаратуры спутниковой навигации МКС, кораблей «Союз» и «Прогресс» в условиях локальных и глобальных сбоев систем ГЛОНАСС и GPS, значительного сокращения спутниковых группировок / Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков, И.А. Краснопольский // Сб. тр. VII Российской мультиконференции по проблемам управления // Материалы конференции «Управление в морских и аэрокосмических системах» (УМАС-2014). Санкт-Петербург. 2014. С. 315–324.

Основы теории полета космических аппаратов / под ред. Г.С. Нариманова и М.К. Тихонравова. М.: Машиностроение, 1972.

Разыграев А.П. Основы управления полетом космических аппаратов. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Машиностроение, 1990.

Раушенбах Б.В., *Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974.

Результаты лётного эксперимента на МКС по исследованию влияния переотражений на решение задач навигации, ориентации и сближения по измерениям аппаратуры спутниковой навигации / Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков, А.С. Семенов // Гироскопия и навигация. 2012. № 1(76).

Результаты лётного эксперимента на МКС по исследованию влияния переотражений на решение задач навигации, ориентации и сближения по измерениям аппаратуры спутниковой навигации / Е.А. Микрин, М.В. Михайлов, С.Н. Рожков, А.С. Семенов // Сб. тр. XVIII Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2011.

Сетевые спутниковые радионавигационные системы / В.С. Шебшаевич, П.П. Дмитриев, Н.В. Иванцевич [и др.]. М.: Радио и связь, 1993.

Совершенствование бортового математического обеспечения первой инерциально-спутниковой системы навигации и ориентации космических средств выведения / В.Д. Дишель, А.К. Быков, В.Г. Сулимов, Н.В. Соколова // Обобщение результатов серии лётных испытаний системы: XIII Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2006.

Соловьев Ю.А. Системы спутниковой навигации. М.: ЭКО-ТРЕНДЗ, 2000.

Тихонравов М.К. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли. М.: Машиностроение, 1962.

Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в формировании высокоточной спутниковой навигации / Ю.Г. Марков, С.Н. Рожков, С.С. Крылов [и др.] // Космические исследования, 2015. Т. 53. № 2. С. 152–164.

Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.

Дополнительная

Аншаков Г.П., *Мантуров А.И.*, *Мостовой Я.А.*, *Рублев В.И.*, *Усталов Ю.М.* Бортовое навигационное обеспечение космического аппарата дистанционного зондирования Земли «Ресурс – ДК» / Г.П. Аншаков, А.И. Мантуров, Я.А. Мостовой [и др.] // XIII Санкт-Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2006.

Аппазов Р.Ф., *Лавров С.С.*, *Мишин В.П.* Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М.: Наука, 1966.

Аппазов Р.Ф., *Сытин О.Г.* Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987.

Ахметов Р.Н., *Мантуров А.И.*, *Мостовой Я.А.*, *Рублев В.И.*, *Усталов Ю.М.*, *Дзесов Р.А.* Некоторые результаты анализа эксплуатации системы спутниковой навигации на КА «Ресурс-ДК» / Р.Н. Ахметов, А.И. Мантуров, Я.А. Мостовой [и др.] // XV Санкт-Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2006.

Болдин В.А. Зарубежные глобальные системы навигации. М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1986.

Брандин В.Н., *Васильев А.А.*, *Худяков С.Т.* Основы экспериментальной космической баллистики. М.: Машиностроение, 1974.

Бранец В.Н., *Михайлов М.В.* Аппаратура спутниковой навигации на существующих и перспективных изделиях РКК «Энергия». Функциональные возможности, технические характеристики // Международный форум по спутниковой навигации. М.: Правительство Москвы, 2007.

Бранец В.Н., Михайлов М.В., Стишев Ю.В. «Союз»–«МИР» — орбитальный эксперимент GPS/GLONASS // Сб. докладов XII Междунар. технической конф. ION GPS 1999, Nashville Convention Center.

Интерфейсный Контрольный Документ ГЛОНАСС: версия 5.0. 2002. URL: http://www.glonass-center.ru/ICD02_e.pdf

Истон Р.Л. Роль частоты и времени в навигационных спутниковых системах. Время и частота. М.: Мир, 1973.

Ишлинский А.Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М.: Наука, 1968.

Калман Р., Бьюси Р. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказывания. Труды Американского общества инженеров-механиков. М.: 1961. Т. 33. № 1.

Каргу Л.Ч. Системы угловой стабилизации КА. М.: Машиностроение, 1980.

Козлов А.Г. и др. Проектирование космических навигационных систем. Красноярск: НИИ ИПУ, 2000.

Космическая навигация / И.К. Бажинов, В.И. Алешин, В.Н. Почукаев [и др.]. М.: Машиностроение, 1975.

Космические аппараты / Б.В. Раушенбах [и др.]; под общ. ред. К.П. Феоктистова. М.: Воениздат, 1983.

Крассовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.

Кудрявцев И.В., Мищенко И.Н., Волынкин А.И. Бортовые устройства спутниковой радионавигации / под ред. В.С. Шебшаевича. М.: Транспорт, 1988.

Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф. Баллистика ракет. М.: Машиностроение, 1970.

Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.В. Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974.

Лебедев А.А., Соколов В.Б. Встреча на орбите. М.: Машиностроение, 1969.

Легостаев В.П., Раушенбах Б.В. Автоматическая сборка в космосе. Космические исследования. 1969. № 6. Т. VII.

Легостаев В.П., Шмыглевский И.П. Управление сближением космических аппаратов на этапе причаливания. Управление в космосе. М.: Наука, 1972. Т. II.

Малышев В.В. Спутниковые системы мониторинга. Анализ, синтез, управление. М.: Издательство МАИ, 2000.

Малышев В.В., Федоров А.В. Управление движением спутников космической системы // Сб. тр. II Междунар. конф. «Малые спутники. Новые технологии. Миниатюризация. Области эффективного применения в XXI веке». М.: ЦНИИМАШ, 2000.

Марков Ю.Г., Почукаев В.Н. Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в формировании высокоточных систем навигации космических аппаратов // Доклады академии наук. 2013. № 3.

Мельников Е.К., Смирнов А.И. Метод решения многоцелевой задачи управления движением околоземной космической станции / Космонавтика и ракетостроение. 2009. Вып. 2 (55). С. 69–78.

Освоение космического пространства в СССР. 1967–1970 гг. М.: Наука, 1970.

Охоцимский Д.Е. Динамика космических полетов. М.: Изд-во МГУ, 1968.

Переверзенцев Е.Н., *Сорочинский В.А.* Алгоритмы решения задачи определения места судна по данным дальномерной навигационной спутниковой системы. Судовождение и связь / ЦНИИМФ. 1971. Вып. 147.

Переверзенцев Е.Н., *Сорочинский В.А.* Алгоритмы решения задачи определения места судна по данным разностно-дальномерных навигационных спутниковых систем. Судовождение и связь / ЦНИИМФ. 1972. Вып. 157.

Пономарев В.М. Теория управления движением космических аппаратов. М.: Наука, 1965.

Прецизионная система навигации и управления движением искусственных спутников Земли / Э.В. Гаушус, М.В. Михайлов, Ю.Н. Зыбин, А.В. Антонов // Вестник МГТУ им. Баумана. Спец. выпуск «Системы управления». 1/97(25).

Скакун И.О. Всемирное координированное время и методы сличения шкал времени // Космонавтика и ракетостроение. ЦНИИМАШ. 2012. № 4(69).

Смирнов Г.Д. Управление космическими аппаратами. М.: Наука, 1978.

Соловьев Ю.А. Состояние и развитие спутниковых навигационных систем. Научно-технический журнал по проблемам навигации // Новости навигации. 2008. № 2.

Соловьев Ю.А. Спутниковая навигация и ее применение. М.: ЭКО-ТРЕНДЗ, 2003.

Соловьев Ю.А. Точность определения относительных координат и синхронных шкал времени объектов при использовании спутниковых радионавигационных систем // Радиотехника. ИПРЖР. 1998. № 9.

Управление спуском космического аппарата в атмосфере / Э.В. Гаушус, М.В. Михайлов, Ю.Н. Зыбин, А.В. Антонов // Вестник МГТУ им. Баумана. Спец. выпуск «Системы управления». 1/97 (25).

Чмых М.К. Спутниковые системы связи и навигации: сб. статей. Красноярск: КГТУ, 1997.

Чуров Е.П. Спутниковые системы радионавигации. М.: Сов. радио, 1977.

Шебшаевич Б.В., *Тюляков А.Е.*, *Дружинин В.Е.*, *Федоров Д.Н.*, *Чухненков А.В.* Интегрированная навигационная аппаратура для низкоорбитальных космических аппаратов зондирования Земли / Б.В. Шебшаевич, А.Е. Тюляков, В.Е. Дружинин [и др.] // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2003.

Шебшаевич В.С. Введение в теорию космической навигации. М.: Сов. радио, 1971.

Шебшаевич В.С. Введение в теорию космической навигации. М.: Сов. радио, 1976.

Bamford W., *Winternitz L.*, *Hay C.* Autonomous GPS Positioning at High Earth Orbits. GPS World, Apr. 1, 2006.

Milliken R.J., *Zoller C.J.* Principle of operation of NAVSTAR and systems characteristics. “Navigation” (USA), 1978. Vol. 25. No. 2.

Murtazin R., *Budylov S.* Short Rendezvous Missions for Advanced Russian HumanSpacecraft // Acta Astronautica. 2010. No. 67. Pp. 900–909.

Murtazin R., *Petrov N.* Short Profile for the Human Spacecraft SOYUZ-TMA Rendezvous Mission to the ISS // Acta Astronautica. 2012. № 77. P. 77–82.

NASA News Release-66-226 “Project Gemini-11”, 1966.

NASA News Release-73-131 “Project Skylab-3 (Second Manned Mission)”, 1973.

Noe P.S., *Myers K.A.*, *Wu T.K.* A navigation algorithm for the low-cost GPS receiver. “Navigation” (USA), 1978. Vol. 25. No. 2.

Parkinson B.W., *Spilker J.J.* Global Positioning System: Theory and Applications. Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996. Vol. I, II.

Spilker J.J. GPS signal structure and performance characteristics. “Navigation” (USA), 1978. Vol. 25. No. 2.

Оглавление

Учебное издание

Микрин Евгений Анатольевич
Михайлов Михаил Васильевич

Навигация космических аппаратов по измерениям от глобальных спутниковых навигационных систем

Редактор *К.А. Осипова*
Художник *Я.М. Асинкритова*
Корректор *Р.В. Царева*
Компьютерная графика *Т.Ю. Кутузовой*
Компьютерная верстка *Н.Ф. Бердавцевой*

Оригинал-макет подготовлен в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 12.10.2017. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 28,11. Тираж 200 экз.

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в ПАО «Т8 Издательские Технологии»
109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.